

03

Развитие метода А.Н. Иванова для течений со свободными границами (к столетию со дня рождения А.Н. Иванова)

© Э.Л. Амромин

Federal Way WA
98003, США
e-mail: amromin@aol.com

Поступило в Редакцию 31 августа 2022 г.
В окончательной редакции 10 октября 2022 г.
Принято к публикации 10 октября 2022 г.

Анализ течений со свободными границами является нелинейной задачей, поскольку их формы заранее неизвестны и должны быть найдены. Описываемый метод эффективен для разнообразных задач с различными динамическими условиями на свободных границах. Этот итеративный метод основан на квазилинеаризации граничных условий для потенциала скорости, предложенной А.Н. Ивановым в 1962 г. Итерации включают последовательное решение интегральных уравнений Фредгольма второго рода (позволяющих затем определить давление на границе) и сингулярных интегральных уравнений (для коррекции ее формы). Здесь приведены как общая формулировка метода, так и его развитие для конкретных типов течений.

Ключевые слова: кавитация, волны, квазилинеаризация, итерации.

DOI: 10.21883/JTF.2023.01.54063.212-22

Введение

Целью настоящей работы является обобщение достижений, полученных на основе метода, предложенного профессором А.Н. Ивановым (1923–2006) для течений со свободными границами — кавитации и волн Стокса. Позже этот метод был развит для более разнообразных задач — срыва потока с крыла, капиллярных волн и пр. Однако все модификации сохраняют сходство с первоисточником. Их имеет смысл обобщить, и юбилей А.Н. Иванова, выпускника кафедры Лойцянского в ЛПИ им. М.И. Калинина (сегодня — Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого), проработавшего более полувека в ЦНИИ им. А.Н. Крылова, — подходящий повод для этого.

Анализ течений со свободными границами является нелинейной задачей, поскольку границы неизвестны и должны быть найдены на основе динамических условий. Решение Кирхгофа для двумерного течения за плоской пластиной, опубликованное в 1869 г., было первым решением такой задачи. Более века после него основные методы анализа подобных задач базировались на обращении переменных. Напомним его основы, используя модификацию задачи Кирхгофа Рябушинским. Эта модификация (описанная, в частности, в [1]) позволила исследовать зоны постоянного давления ограниченной протяженности. Фиктивная граница/тело за такой зоной была введена [2], чтобы обойти парадокс Даламбера. В теории идеальной жидкости скорость жидкости U на границе такой зоны постоянна, но она постепенно увеличивается от нуля до U_0 вдоль препятствия и постепенно уменьшается вдоль фиктивной границы. Поэтому изображение границы потока за плоской пластиной или диском в плоскости обращенных переменных $\{U, N_x\}$, где N —

нормаль к частично неизвестной границе S , — просто прямоугольник. Преобразование неизвестной части S в пространстве $\{x, y\}$ в отрезок в этой плоскости часто упрощает вычисления. Для плоских задач конформные отображения иногда позволяют получить точные решения. Обращенные переменные также использовались для осесимметричных кавитационных течений за препятствиями простой формы [3].

Однако обращение переменных становится бесполезным для анализа обтекания тел сложной формы. Это проиллюстрировано примером частичной кавитации подводного крыла ОК2003, представленным на рис. 1. Свободная граница в плоскости $\{x, y\}$ проходит по верхней стороне крыла от его передней кромки до точки с абсциссой $x = 0.6C$, где C — его хорда. Ниже по течению от этой точки находится фиктивное тело, там значение U неизвестно. Образ границы этого потока в плоскости $\{U, N_x\}$ очень сложен, и неизвестны даже концы отрезка $U = U_0$. Ситуация не улучшится при выборе других плоскостей годографа, описанных в [4]: в общем случае обращение переменных не переводит частично неизвестную границу в полностью известную границу в других плоскостях.

Линейная же теория [5] дает неудовлетворительные результаты для контуров со значительными вариациями их кривизны — таких, как сечения лопастей гребных винтов. Пессимистический тон обзора [6] о состоянии дел в области математического анализа кавитации и его применимости к техническим вопросам был понятен в 1971 г. Хотя первый прорыв уже был сделан Ивановым [7,8] с использованием итерационных методов в физических пространствах $\{x, y\}$ и $\{x, y, z\}$, а другой квазилинейный метод был вскоре разработан Тулиным [9], влияние этих нововведений не было немедленным. В

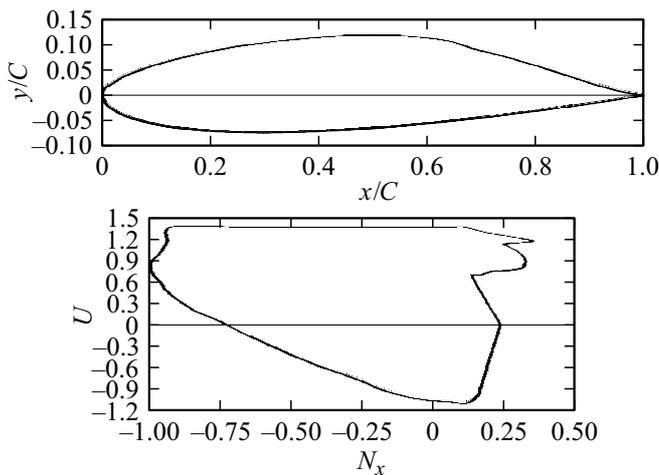


Рис. 1. Границы течения вокруг кавитирующего профиля ОК2003 в плоскостях $\{x, y\}$ и $\{U, N_x\}$.

последующие десятилетия развивались две группы итерационных методов для кавитационных течений невязкой жидкости. Первая группа использует модификации метода Иванова в точной нелинейной постановке для плоских и осесимметричных кавитационных течений — начиная с [10–14], а позднее [15–17] — для более сложных задач. Все итерации во всех модификациях этого метода состоят из двух частей. Первая — решение задачи Неймана для потенциала скорости вне приближенно определенной границы S . Вторая — коррекция границы с использованием квазилинеаризованного динамического граничного условия на свободной границе.

Вторая группа методов, описанная в [18–23], использует итерационные алгоритмы, также основанные на решении двух разных задач в двух последовательных частях каждой итерации. Первая задача решается для потенциала скорости с условием Неймана на известных частях S и условием Дирихле на свободной поверхности. Вторая задача — это коррекция S путем интегрирования кинематического граничного условия.

С 2000 года расчеты полностью турбулентных течений переменной плотности, использующие RANS- или LES-коды, часто вытесняют расчеты течений невязких жидкостей со свободной границей. Использование таких кодов (особенно некоторых коммерческих кодов) можно назвать более простым штатным приемом. Тем не менее по мнению специалистов [24,25] существуют различные задачи, где расчеты для идеальной жидкости дают лучшие результаты. Кроме того, часто бывают полезными комбинации расчетов идеальной жидкости с расчетами вязкого течения, как это сделано в [26,27].

Описание изначальной версии метода Иванова и примеры ее использования имелись в монографии [28] помимо статей [7,8,29,30]. В более поздних публикациях, где этот метод также применялся, подробное описание его модификаций отсутствовало, а упор делался скорее на физику рассматриваемых задач, чем на вычисли-

тельные аспекты их решения. Тем не менее успешное использование одного и того же метода для весьма разных задач делает целесообразным такое описание, дополненное новыми примерами решений.

1. Общая формулировка и квазилинеаризация

Течения со свободными границами рассматриваются здесь в рамках теории идеальной жидкости. Вводится потенциал скорости, который удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \quad (1)$$

и граничному условию для его нормальной производной на S :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial N} = F_1 \quad (2)$$

с заданной функцией F_1 . Также задается набегающий поток, например

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{x \rightarrow -\infty} = 1. \quad (3)$$

Потенциал и его производные здесь нормированы с использованием скорости набегающего потока U_∞ и размера тела. При фиксированном S уравнения (1)–(3) описывают задачу Неймана. В курсе математической физики [31] указано, что для областей вне замкнутой ограниченной поверхности S эта линейная задача имеет единственное решение. Однако существует еще и динамическое условие, являющееся следствием интеграла уравнения количества движения, на части S , принадлежащей свободной поверхности S_F :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = F_2, \quad (4)$$

где F_2 — функция, которая может зависеть от координат S_F , их производных или от производных Φ . Это условие делает невозможным решение задачи (1)–(4) вне границы произвольной формы. Поэтому форма S_F здесь изначально неизвестна, а условия (2), (4) нелинейны для любых F_1 , F_2 , и вся задача нелинейна. Для разных правых частей уравнений (2), (4) в различных физических задачах алгоритм их решения с использованием описываемого метода в основном одинаков. На любой итерации сначала необходимо найти $U = \text{grad}(\Phi)$ на S путем решения уравнений (1)–(3) при форме S , полученной в результате предыдущей итерации; исходная форма должна быть задана до первой итерации. Это решение может быть найдено с использованием разных численных методов. В частности, автор использовал методы граничных элементов. Полученное распределение U по S необходимо подставить в уравнение (4). Итерации будут прекращены, и S будет принята в качестве конечной границы потока, когда разность между левой и правой частями уравнения (4) нигде

не превысит заданного малого значения. В противном случае надо решать квазилинейную обратную задачу и корректировать S_F перед следующей итерацией.

Коррекцию S можно интерпретировать как движение против градиента во вспомогательном пространстве переменных, определяющих форму S_F . Хотя аналитическое описание этой поверхности могло бы иногда существовать, общим подходом является ее пошаговое определение с использованием M точек, распределенных по ней. Начнем с двумерного случая и обозначим координаты этих точек как

$$x_m^{k+1} = x_m^k + h_m^k N_{xm}^k, \quad y_m^{k+1} = y_m^k + h_m^k N_{ym}^k, \quad (5)$$

где верхние индексы указывают номер итерации, а нижние — номер точки. Квазилинеаризация уравнений (2), (4) позволяет определить компоненты антиградиента \mathbf{h}^k на S_F^k . Эта квазилинеаризация в точке $\{x_m^{k+1}, y_m^{k+1}\}$ будет осуществляться с использованием решения уравнений (1)–(3) в точке $\{x_m^k, y_m^k\}$. Нормаль и касательная к S_F^k обозначены как n и τ . Нормалью и касательной к S_F^{k+1} являются N и T . Разность компонент скорости в близких точках $\{x_m^{k+1}, y_m^{k+1}\}$ и $\{x_m^k, y_m^k\}$ вызвана, во-первых, малым поворотом нормали, во-вторых, малым расстоянием h между этими точками, в-третьих, малым изменением Φ потенциала между ними из-за малого возмущения q . Здесь

$$\varphi(q, S_F^k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int q \ln|r| ds & -2D \text{ case,} \\ \frac{1}{4\pi} \iint \frac{q}{r} ds & -3D \text{ case,} \end{cases} \quad (6)$$

$\{x, y, z\}$ — координаты точки, в которой вычисляется потенциал, а точки с координатами $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ расположены на S_F^k . В двумерном случае $r = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}$, в трехмерном $r = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2 + (z - \tilde{z})^2}$. В левой части уравнения (3) производную

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cos(N, n) + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \cos(N, \tau) \quad (7)$$

на S_F^{k+1} можно переписать как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} \Big|_{S_F^{k+1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_F^{k+1}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \Big|_{S_F^{k+1}} \frac{\partial h}{\partial \tau}, \quad (8)$$

используя связь между производной h и малым поворотом нормали. Замена разложения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_F^{k+1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_F^k} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_F^k} + h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} \Big|_{S_F^k}, \quad (9)$$

в (8) с последующим учетом уравнения (2) на обеих границах приводит к уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_F^{k+1}} + \frac{\partial(Uh)}{\partial \tau} \Big|_{S_F^k} = F_1(S_F^k) - F_1(S_F^{k+1}), \quad (10)$$

которое связывает h с q . Это уравнение линейно. Преобразуя левую часть уравнения (4) аналогичным образом, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \cos(T, n) + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \cos(T, \tau), \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} \Big|_{S_F^{k+1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \Big|_{S_F^{k+1}} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{S_F^{k+1}} \frac{\partial h}{\partial \tau}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \Big|_{S_F^{k+1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \Big|_{S_F^k} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \Big|_{S_F^k} + h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau \partial n} \Big|_{S_F^k}. \quad (13)$$

Однако в правой части квазилинеаризованного уравнения (4) появится кривизна ϑ

$$F_2(S_F^{k+1}) = F_2(S_F^k) - F_1(S_F^{k+1}) \frac{dh}{d\tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \Big|_{S_F^k} - hU\vartheta \Big|_{S_F^k}. \quad (14)$$

Вывод замены $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau \partial n}$ на ϑ довольно громоздок, и здесь он опущен. Таким образом, возможно определение h_m^k и последующее использование уравнения (5) для коррекции S_F^k после определения разности между заданной правой частью уравнения (4) и ее значением на S_F^k .

В стационарных задачах со свободными границами обычно $F_1 = 0$. Тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{S_F^k} + \frac{\partial(Uh)}{\partial \tau} \Big|_{S_F^k} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \Big|_{S_F^k} - hU\vartheta \Big|_{S_F^k} = F_2(S_F^k) - U. \quad (16)$$

Важно отметить, что уравнение (16) является сингулярным интегральным уравнением относительно q , в то время как вычисления $F_2(S_F^k)$ обычно основаны на решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для интегрирования уравнений разных типов предпочтительны разные сетки, поэтому необходимы интерполяции U , h и q из одной сетки в другую.

Это общее описание необходимо дополнить конкретными рецептами для наиболее эффективного решения разноплановых задач. Такие рецепты будут проиллюстрированы вычислительными примерами в следующих разделах настоящей работы.

2. Задачи с постоянной правой частью динамического условия

Старейшие задачи для течений со свободными границами соответствуют $F_1 = 0$ и $F_2 = \sqrt{1 + \sigma}$. Здесь $\sigma = 2(P_\infty - P_{\text{cavity}})/(\rho U_\infty^2)$ — число кавитации. Эти задачи описывают течения, где σ является константой. Такой вид F_2 соответствует условию постоянства давления с пренебрежимо малым отношением силы тяжести к силе инерции на свободной поверхности. Типичная схема для таких двумерных задач показана на рис. 2.

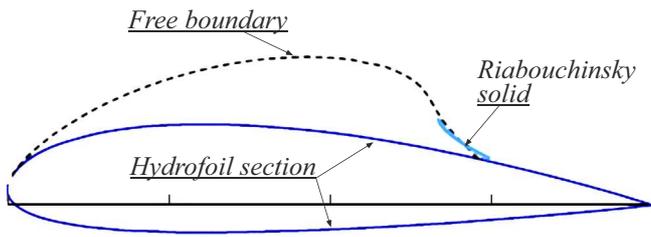


Рис. 2. Схема двумерного кавитационного обтекания крыла. Штриховая кривая — свободная граница.

Граница потока здесь состоит из трех частей. Первая — смоченная поверхность крыла. Эта часть остается неизменной во время итераций. Вторая — свободная поверхность (поверхность каверны). Ее форму необходимо найти в ходе итераций. Третья — охватывает заднюю часть каверны, где реальное течение крайне неустойчиво и там нет возможности удовлетворить как уравнению (2), так и уравнению (4). Как описано в монографии [32], для этой области предлагались различные схемы. В частности, здесь использован контур/тело Рябушинского, длина которого фиксирована, тогда как его вертикальный размер будет меняться от итерации к итерации.

Для рассматриваемых в разд. 2 $\{F_1, F_2\}$ возможно дальнейшее упрощение уравнения (16). Становится допустимым пренебрежение третьим слагаемым в правой части уравнения (16) вдоль основной части свободной поверхности (за исключением очень малой окрестности ее краев), поскольку там ее кривизна мала. Там же и потому же можно упростить второй член в правой части уравнения (16) до интеграла Коши. В результате это уравнение можно переписать в виде

$$U + \frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{q(\tilde{s})}{s - \tilde{s}} d\tilde{s} = \sqrt{1 + \sigma}. \quad (17)$$

Далее обращение интеграла Коши может быть применено к уравнению (17)

$$q = -2 \frac{Z(s)}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\sqrt{1 + \sigma} - U}{Z(\tilde{s})(s - \tilde{s})} d\tilde{s}. \quad (18)$$

Как описано в [33], существует четыре типа обращений. Три из них

$$Z(s) = \begin{cases} Z_0^0 \equiv \sqrt{(s - s_0)(s_1 - s)}, \\ Z_0^\infty \equiv \sqrt{(s - s_0)/(s_1 - s)}, \\ Z_\infty^0 \equiv \sqrt{(s_1 - s)/(s - s_0)}, \end{cases} \quad (19)$$

задействованы в рассматриваемой задаче.

То же предположение о кривизне свободной поверхности позволяет упростить уравнение (15) до $\frac{q}{2} = \frac{d(Uh)}{d\tau}$.

Однако если прямо подставить эту формулу в уравнение (18), то пострадает сходимость итераций, поскольку скорость вдоль S имеет на одну непрерывную производную меньше, чем ее ординаты. Поэтому необходимо некоторое сглаживание перед корректировками S_F , и сначала нужно находить q , а h отыскивать интегрированием

$$h(s) = \frac{b}{2U(s)} \int_{s_0}^s q(\tau) d\tau + h(s_0). \quad (20)$$

Откорректированная поверхность S должна иметь непрерывные координаты и компоненты нормали. Возможны два пути такой коррекции для двумерного и осесимметричного течений. Первый путь соответствует фиксированной длине каверны. Второй путь соответствует фиксированному σ . Разным путям соответствуют разные типы обращений интеграла Коши.

Алгоритм коррекции при фиксированном σ пояснен на рис. 3. Он основан на использовании двух решений уравнений (18), (20) и их соединении в точке x^* , где кривизна S_F наименьшая. Первое решение использует Z_0^∞ и фиксированную точку s_0 ; по этому решению будет найдена абсцисса x^* ; это решение определяет левую ветвь S_F . Второе решение использует Z_∞^0 и фиксированную точку s_1 в уравнении для h , которое симметрично уравнению (20); это решение определяет правую ветвь S_F и абсциссу x^{**} с такой же нормалью, как в x^* , но x^{**} может отличаться от x^* . Соединение ветвей производится при $x = x^*$, но правая ветвь и контур Рябушинского будут перемещены на расстояние $x^{**} - x^*$ по оси x и на расстояние h^* по перпендикулярной оси. Такое перемещение будет сопровождаться смещением и деформацией этого контура с сохранением непрерывных ординат и нормалей на его краях.

Алгоритм коррекции для каверны фиксированной длины основан на решении уравнения (18) с $Z = Z_0^0$ и уравнения (20). При этом дополнительное условие

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{(\sqrt{1 + \sigma} - U) d\tau}{Z_0^0(\tau)} = 0 \quad (21)$$

должно быть выполнено, чтобы можно было использовать Z_0^0 . Это условие является также уравнением для определения σ . Две ветви $h(x)$ соединяются в точке с $N_x = 0$, и при коррекции S_F необходимо только вертикальное смещение задней ветви.

Как показано на рис. 4, для суперкавитации одно и то же тело можно рассматривать и как кавитатор,

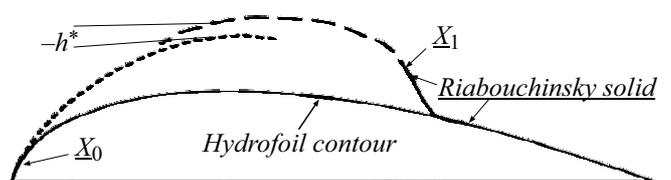


Рис. 3. Схема коррекции каверны при фиксированном σ .

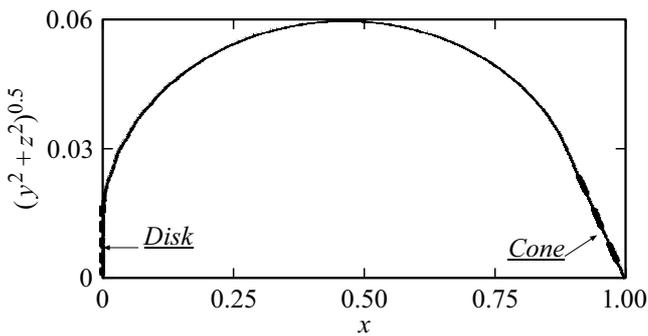


Рис. 4. Меридиональное сечение каверны за диском с конусом-телом Рябушинского (течение слева) или каверны за конусом с диском-телом Рябушинского (течение справа).

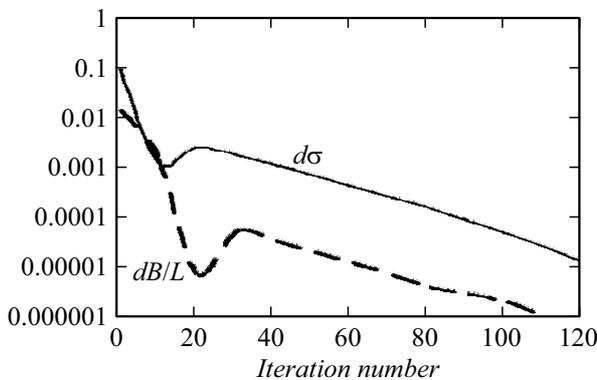


Рис. 5. Сходимость для численного решения двумерных кавитационных задач; $d\sigma$ — изменение σ от итерации к итерации, dB — соответствующее изменение толщины каверны.

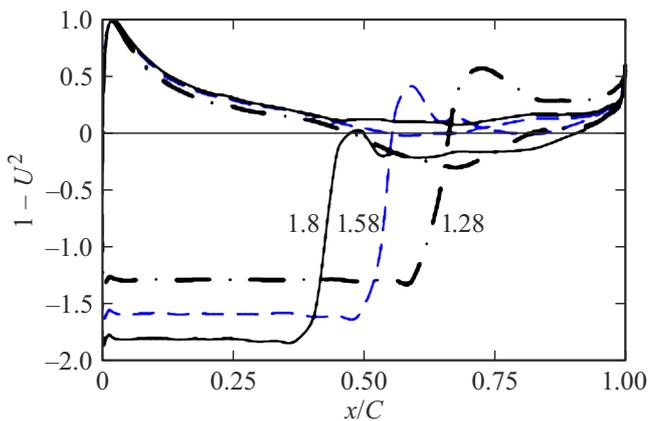


Рис. 6. Изменение безразмерного коэффициента давления $C_p = 1 - U^2$ вокруг крыла ClarkY-11.7% с кавернами под углом атаки 8° ; числа возле кривых обозначают соответствующие значения σ .

и как тело Рябушинского. Иллюстрации итерационной сходимости приведены на рис. 5 для осесимметричного течения.

На рис. 6 показано распределение коэффициента давления по кавитирующему подводному крылу после

80 итераций при $0.2 < b < 0.4$. Видимое отклонение рассчитанного коэффициента давления от постоянного остается только вблизи передней кромки каверны. Невязка в уравнении (4) на краях каверны убывает значительно медленнее, нежели в ее середине, так как кривизна S_F больше вблизи ее краев; ϑ может даже уйти в бесконечность в точке s_0 , а последний член в правой части (16) может не быть там пренебрежимо мал. На краях S_F асимптотическое решение

$$h(s) = A_1(s - s_0)^{3/2} + \dots \quad (22)$$

с неопределенными коэффициентами A_1, A_2 сшивалось с решением уравнения (20).

В трехмерных течениях протяженность каверны различна вдоль разных линий тока. Между тем касательные производные Φ имеют там ту же особенность, что и касательные производные в двумерных течениях. Поэтому можно переписать 3D-уравнение (16) как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{q(\tilde{s})}{s - \tilde{s}} d\tilde{s} = \sqrt{1 + \sigma} - U - \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \quad (23)$$

с помощью не имеющей особенности вспомогательной функции

$$\psi(q, s) = \frac{1}{4\pi} \iint \frac{q}{r} ds - \frac{1}{2\pi} \int q \ln|r| ds. \quad (24)$$

Интегрирование уравнения (20) необходимо проводить вдоль линий тока. Условие

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{(\sqrt{1 + \sigma} - U - \frac{\partial \psi}{\partial \tau}) d\tau}{Z_0^0(\tau)} = 0 \quad (25)$$

также записано вдоль линий тока, но в трехмерном случае s_1 является неизвестной величиной в уравнении (25), тогда как σ задано и одинаково для всех линий тока.

Расчетный пример поперечных сечений каверны в трехмерном потоке показан на рис. 7. Там использовалась модификация схемы Рощко с бесконечным цилиндром за каверной вместо тела Рябушинского. Как и предсказывалось теоретически [1], поперечные сечения каверны за трехмерным препятствием стремятся к окружности.

Уместны несколько общих замечаний об эффективности вычислений. Во-первых, как видно из рис. 6, решение задачи (1)–(3) на каждой итерации используемого метода позволяет оценить, насколько точно выполняются как уравнение (2), так и уравнение (4), и это существенное преимущество описанного метода. Такое использование линейной задачи (1)–(3) похоже на проверку по методу *manufactured solutions* Роуча [34]. При этом для двумерных и осесимметричных течений существуют хорошо известные аналитические решения, которые можно использовать для определения необходимой плотности

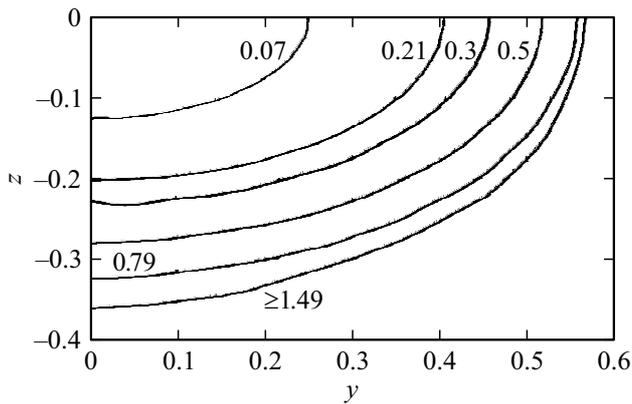


Рис. 7. Сечения трехмерной каверны за эллиптическим препятствием при $\sigma = 0.2$. Числа возле кривых — значения координаты x .

сетки. В дальнейшем такую плотность следует сохранять для более сложной геометрии тела. Во-вторых, меньшее значение b следует использовать в уравнении (20) с уменьшением σ . В-третьих, ограничение на разность между левой и правой частями уравнения (4) должно зависеть от точности вычисления U .

Помимо кавитационных течений существуют и другие задачи с постоянной правой частью уравнения (4). Одна из таких задач относится к фигурам равновесия плазмы [35]. Основную роль в таком течении играют массовые силы, тогда как сила инерции пренебрежимо мала, но расчетная методика остается очень похожей.

3. Задачи с динамическими условиями, зависимыми от координат

Как показал эксперимент [36], присоединенная кавитация является специфическим видом вязкого отрыва. Давление вдоль зон отрыва не постоянно, но существенно возрастает в их хвосте. Поэтому анализ кавитации можно точнее сформулировать как задачу со свободной границей с динамическим условием, зависящим от x , как и предложено в [37]. Расчет течений за диафрагмами в трубах является простейшим примером такой задачи. Схема этого течения показана на рис. 8.

Давление в такой отрывной зоне имеет практически изобарическую часть сразу за диафрагмой, но возрастает на некотором расстоянии выше по потоку от точки присоединения пограничного слоя к стенке трубы. Уравнение

$$\frac{1}{2\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{q d\bar{s}}{[s - \bar{s}]} = C_0 + C_1 f_1(x) - U(x) - \frac{2U(x)h}{R} \quad (26)$$

рассматривается в этой задаче вместо уравнения (16). Первый и второй члены в правой части уравнения (26)

отражают изменение давления вдоль свободной поверхности. Вдоль ее изобарической части $f_1 = 0$, а вниз по потоку от нее давление возрастает. Четвертое слагаемое представляет собой приближенную поправку к U , учитывающую влияние изменения блокировки потока между стенками трубы и S_F , вызванного коррекцией S_F .

Для этого внутреннего течения задача (1)–(3) не имеет единственного решения, и ее необходимо заменить задачей Дирихле для функции тока. В результате U будет найдено путем решения уравнения

$$U + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial N} \iint U \frac{\cos \theta}{r} ds = -N_R \left(\frac{Q}{\pi R^2} \right), \quad (27)$$

где R — координата цилиндрической системы координат. Функция тока здесь определяется с использованием вихрей в осесимметричном потоке.

При заданном виде $f_1(x/L)$ в этой задаче есть три неопределенных параметра: коэффициенты C_0 , C_1 и L . Для их определения необходимы три условия. Первое из них является обобщением уравнения (21) для правой части уравнения (26). Упрощенная форма закона сохранения импульса

$$\frac{R(L)}{R(\infty)} = \left[\frac{1}{1 + C_D} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (28)$$

с эмпирическим значением коэффициента сопротивления отверстия (из справочника [38]) является вторым. Третье — критерий присоединения пограничного слоя $U = \xi R dU/dx$ при $x = L$, где ξ — эмпирический коэффициент. Иллюстрация сходимости итераций для этой задачи приведена на рис. 9. В данном конкретном примере из-за существенной блокировки потока было использовано $b = 0.015$ (площадь поперечного сечения отверстия составляет 0.75 поперечного сечения трубы).

Как видно из рис. 10, *a*, для других видов отрывных течений функция F_2 может быть более сложной и включать большее количество неопределенных коэффициентов (как для отрыва за обратным уступом; сравнение расчетов [26] с измерениями [39,40] для него представлено на рис. 10, *b*). Дополнительные коэффициенты требуют дополнительных условий, зависящих от используемого варианта процедуры вязко-невязкого взаимодействия. Ее основы более подробно описаны в [41,42], а, поскольку описание этих условий не имеет

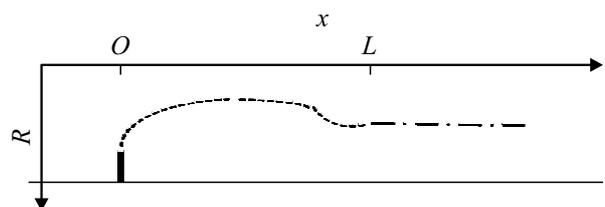


Рис. 8. Схема отрывного потока за диафрагмой. Свободная поверхность показана штриховой линией, фиктивное тело за отрывной зоной — штрихпунктирной линией.

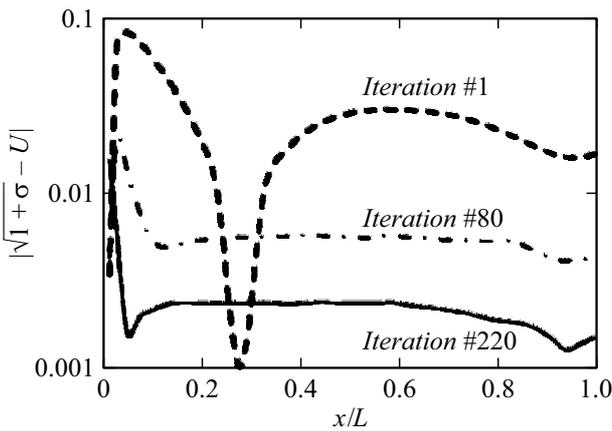


Рис. 9. Пример сходимости итераций в задаче об отрыве за диафрагмой.

значения для объяснения используемого метода, оно может быть здесь опущено.

Ситуация с правой частью, зависящей от ординаты, математически аналогична предыдущей. Интересно, что, как показано в [43], фиктивное тело на свободной поверхности может исчезнуть и из-за действия зависящих от ординаты массовых сил.

Наиболее важным техническим применением такого эффекта является снижение сопротивления судов вентилируемой кавитацией, и описываемый метод используется [44,45] при дизайне их элементов. В этом случае формы каверны сильнее зависят от параметра, входящего в F_2 , чем от σ . Это показано на рис. 11, взятом из [44], где z_0 является ординатой края предназначенной для стабилизации каверны ниши под дном судна, $F_2 = \sqrt{1 + \sigma} - 2(z - z_0)Fr^{-2}$, число Фруда $Fr = U_\infty / \sqrt{gL}$, g — ускорение свободного падения.

Другой проблемой с таким F_2 является определение нелинейных гравитационных волн. Пример ее решения с использованием обобщения метода Иванова приведен в [46,47] для поверхностных волн Стокса, представляющих собой нелинейные волны с критической точкой в углах на гребнях. Волны Стокса рассматриваются как стационарные волны максимальных амплитуд [48]. Самое старое решение [49] для волн Стокса было найдено для потока бесконечной глубины. В дальнейшем ряд решений для поверхностных волн Стокса был найден многими авторами, как правило, перечисленными в обзоре [50].

Внутренние волны также часто подвержены существенным нелинейным эффектам, как это отмечено, в частности, в [51,52], но, прежде всего, однако, необходимо доказать, что внутренние волны Стокса могут существовать математически. Рассмотрим два бесконечных слоя идеальных несжимаемых жидкостей разной плотности, разделенных поверхностью S . Уравнение Бернулли для верхнего слоя над S имеет вид

$$P + \rho_1 U_1^2 / 2 + \rho_1 g y = C_1, \quad (29)$$

а для нижнего слоя

$$P + \rho_2 U_2^2 / 2 + \rho_2 g y = C_2. \quad (30)$$

Здесь ρ_1 и ρ_2 — плотности первой и второй жидкости, U_1 и U_2 скорости в первой и второй жидкости, y — ордината S . На общей линии тока слоев давление непрерывно и поэтому там $U_2^2 + 2gy - \varepsilon(U_1^2 + 2gy) = \frac{2(C_2 - C_1)}{\rho_2}$, где $\varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2}$. Скорость идеальной жидкости на острие угла может быть либо бесконечностью, либо нулем. Используем конформные отображения, чтобы определить угол с нулевой скоростью. Рассматривая вспомогательную полуплоскость $\{\xi\}$ для нижнего потока и используя там комплексный потенциал W , имеем $Z_2^\pi \sim \xi^\alpha$ и $U_2 \sim (dW/d\xi) \cdot \left(\frac{d\xi}{dZ_2}\right) \sim 1 \cdot Z_2^{\frac{\pi}{2}-1}$, где $Z = x + iy$. Окрестность же угла в верхнем течении может быть отображена в окрестность критической точки на окружности. Поэтому там $U_1 \sim \xi d\xi/dZ_1 \sim Z_1^{2\pi/(2\pi-\alpha)-1}$ и $Z_1^\pi \sim \xi^{2\pi-\alpha}$, но такое отображение возможно только при некоторой циркуляции скорости, связанной с вихрями в верхнем течении. Поскольку сумма углов при гребне равна 2π , угол гребня $\alpha = 2\pi/3$, как и для поверхностных волн Стокса.

Формы волн и интенсивности связанных вихрей определяются с помощью двух контуров Иванова, показанных на рис. 12. Введение такого контура, форма которого известна из предыдущей итерации, позволяет заменить задачу с бесконечной свободной поверхностью двумя связанными задачами с очень большим замкнутым контуром в неограниченном потоке. Эта замена существенно упрощает расчеты. Первоначально неизвестная свободная поверхность является относительно небольшой общей частью обоих контуров. Однако эта часть намного больше длины волны. Задача (1)–(3) для контуров может быть решена с использованием интегральных уравнений для интенсивности распределенных по ним вихрей. Эта интенсивность равна касательной скорости U в нижнем течении и $-U$ в верхнем течении, так как внутри контуров течения нет. Разные интегральные уравнения описывают нижнее и верхнее течения. Для их вывода необходимо оценить скорость, индуцируемую на S вихрями, распределенными по совокупности других частей контура. Должны быть проанализированы бесконечности различных порядков. Пусть $|AH| = |AB| \ll |AE|$, $|CD| = |DG| \ll |FD|$, $|EF| \ll |AE|$, $|EF| \ll |FD|$. Для верхнего контура

$$\oint_{S^*} U \frac{\cos(N, R)}{R} dS = \int_E^F + \left(\int_F^D + \int_D^G + \int_G^H + \int_H^A + \int_A^E \right),$$

и

$$\oint_{S^{**}} U \frac{\cos(N, R)}{R} dS = \int_E^F + \left(\int_F^D + \int_D^C + \int_C^B + \int_B^A + \int_A^E \right)$$

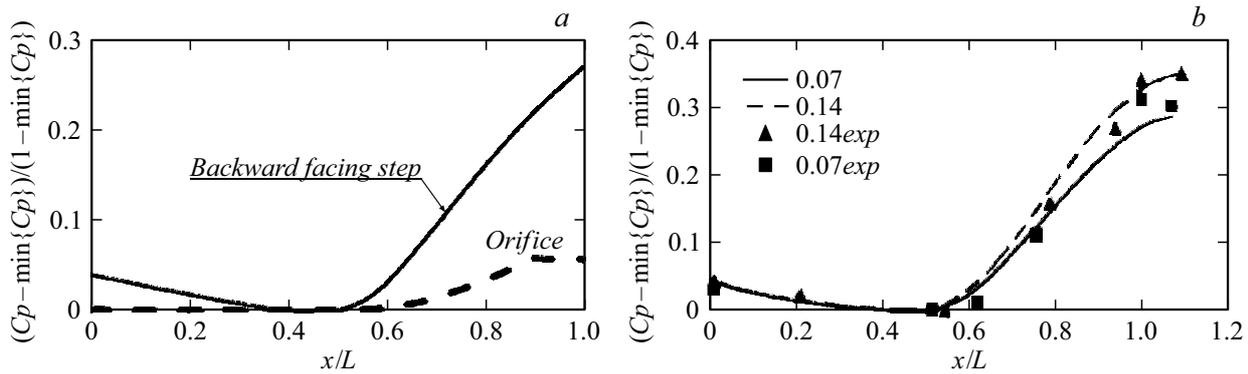


Рис. 10. *a* — расчетные нормированные распределения давления вдоль отрывных зон за разными препятствиями; *b* — сравнение вычисленного и измеренного давления за уступом в канале. Числа — отношение высоты уступа к ширине канала.

— для нижнего. Можно оценить интегралы по удаленным частям контуров, учитывая, что скорости вдоль них практически невозмущены. Поэтому для нижнего потока

$$U_2 - \frac{1}{\pi} \int_E^F U_2 \frac{\cos(N, R)}{R} ds = N_Y V_1 + N_X V_2. \quad (31)$$

Здесь

$$V_1 = \frac{1}{\pi} \left[a \tan \left(\frac{x - x_F}{y - y_A} \right) - a \tan \left(\frac{x - x_E}{y - y_A} \right) \right] - 1,$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \ln \frac{(x - x_E)^2 + (y - y_A)^2}{(x - x_F)^2 + (y - y_A)^2}.$$

Для верхнего потока необходимо учитывать индукцию вихрей, связанных с гребнями, и там

$$U_1 + \frac{1}{\pi} \int_E^F U_1 \frac{\cos(N, R)}{R} ds + \tilde{U} = (N_Y V_1 + N_X V_2) \beta, \quad (32)$$

β — отношение скоростей притока в двух потоках, $\tilde{U} = \frac{\Gamma}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{dX_k N_X + dY_k N_Y}{dX_k^2 + dY_k^2}$. Интенсивность вихря Γ неизвестна, но асимптотика $h(s) = \sqrt{s}(A_1 + A_2 s)$ рассматривается как дополнительное уравнение и может быть использована для определения этой интенсивности. Расположение вихревой системы в верхней части потока неоднозначно и, как следствие, Γ зависит от этого положения, подобно тому, как это имеет место для вихрей в схеме Тулина для суперкавитации [32]. Вихри в представленных расчетах располагаются над гребнями. В природе два слоя жидкости разной плотности, движущиеся с разными скоростями, имеют между собой слой сдвига, и в нем постоянно создается завихренность, что похоже на возникновение завихренности на жесткой границе потока.

Квазилинеаризованная обратная задача рассматривается для одной волны в центре S . Перед началом следующей итерации с этой волны будут скопированы другие волны. Полагая, что гребни волн расположены на

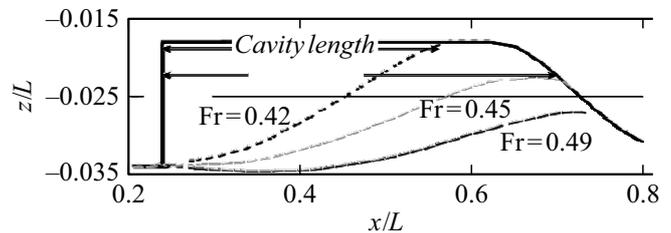


Рис. 11. Влияние числа Фруда на двумерные каверны внутри ниши. Для этой ниши высота фиктивного тела 0 при $Fr = 0.42$ и 0.45, но $0.001 \cdot L$ при $Fr = 0.49$.

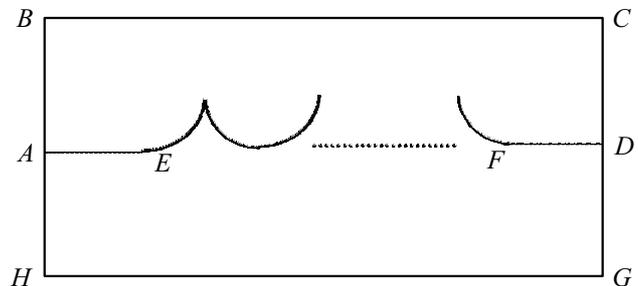


Рис. 12. Схема с контурами Иванова ANGD FEA (в верхнем течении) и ABCDFEA (в нижнем течении).

уровне $y = 0$, имеем $c_1 = c_2$. Полагая, что S испытывает только малые возмущения, можно упростить условие постоянства давления

$$2\epsilon U_1 u_1 - 2U_2 u_2 - h N_Y \mu = F \quad (33)$$

и ввести два вспомогательных потенциала источников/стоков, распределенных вдоль выбранной волны на S ; здесь u_1 и u_2 — возмущения U_1 и U_2 , $F = U_2^2 - \epsilon U_1^2 + \mu y$, $\mu = 1 - \epsilon$. Аналогами уравнения (20) в этой задаче являются

$$b q_1 = -2d(hU_1)/d\xi, \quad b q_2 = \frac{2d(hU_2)}{d\xi}. \quad (34)$$

Здесь q_1 и q_2 — предположительно малые интенсивности потенциалов возмущения, определенных в двух

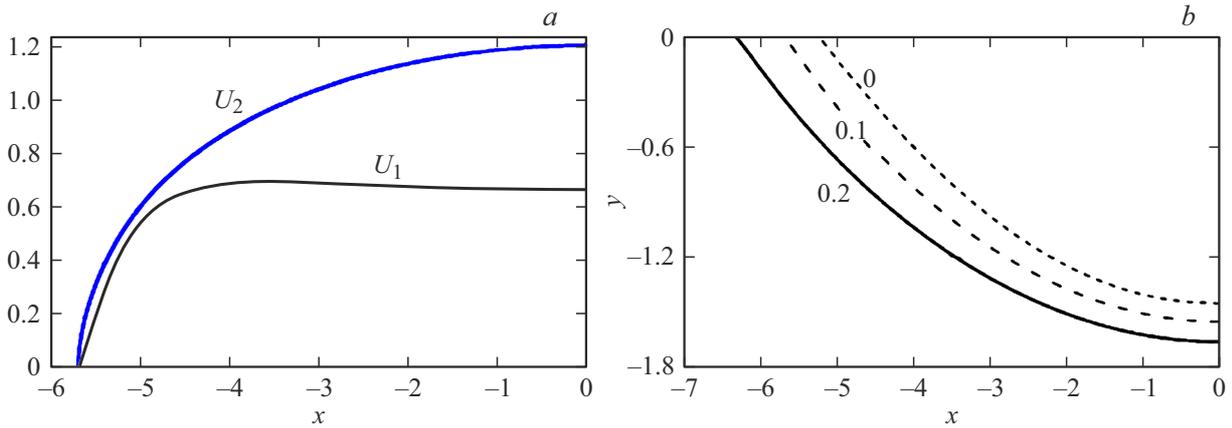


Рис. 13. *a* — распределения скоростей в верхней и нижней жидкости вдоль S для $\epsilon = 0.1, \beta = 1$; *b* — формы волн для значений ϵ , нанесенных рядом с кривыми, $\beta = 1$.

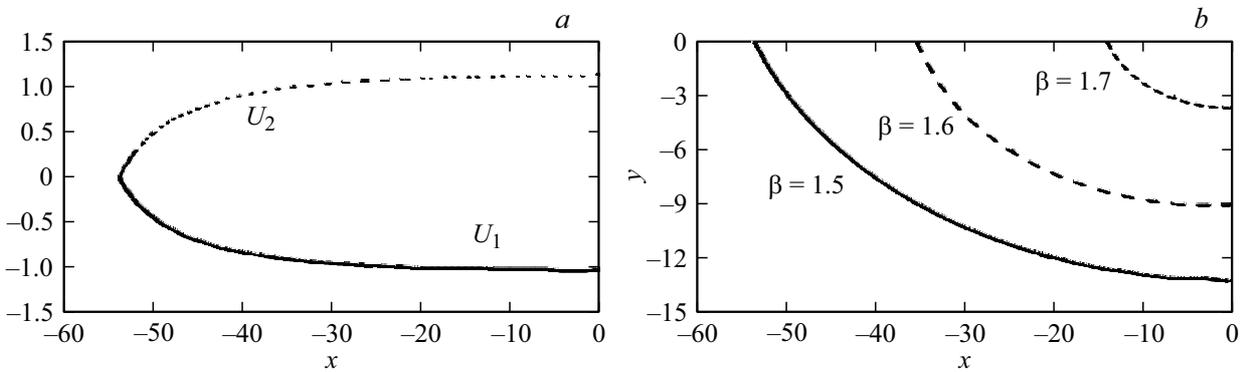


Рис. 14. *a* — распределения скоростей в верхней и нижней жидкости вдоль S для $\beta = -1.5, \epsilon = 0.98$; *b* — формы внутренних волн Стокса при различных β и $\epsilon = 0.98$.

жидкостях. Подставляя уравнение (34) в уравнение (32) и используя обращение интеграла Коши, преобразуем уравнение (34) в

$$\frac{\pi q_2}{Z_0^0(s)} - \int_{\lambda} \left[\frac{\epsilon U_1}{\pi U_2} \int_{\lambda} \frac{d \left(\frac{U_1}{U_2} \int_0^{\xi} q_2 d\zeta \right)}{d\xi} d\xi \right] \frac{dz}{\Pi} - \int_{\lambda} \left[\frac{\mu N_Y}{U_2^2} \int_0^z q_2 d\zeta \right] \frac{dz}{\Pi} = \int_{\lambda} \frac{F}{U_2} \frac{dz}{\Pi}. \quad (35)$$

Здесь $\Pi = (s - z)Z_0^0(z)$. После решения уравнения (35) необходимо проинтегрировать второе уравнение (34) относительно h с начальным условием $h(0) = 0$ до точки минимума $y + hN_Y$. Эта точка — впадина на скорректированной S . Затем правая полуволна будет скорректирована симметрично относительно этой точки, и вся поверхность S покроется волнами такой же формы. Определение формы периодических поверхностных волн Стокса в неограниченном потоке с помощью описанного выше численного метода рассматривалось в качестве

его проверки. Далее расчеты внутренних волн Стокса целесообразно было начинать с вариантов, близких к проверочному примеру. Вычисленные формы волн для $\beta = 1$ и $\epsilon \ll 1$ можно увидеть на рис. 13 для различных ϵ . Скорости в обеих жидкостях вдоль их общей границы сравниваются на рис. 13, *a* для $\epsilon = 0.1$.

Однако трудно связать примеры с $\epsilon = 0.1$ и 0.2 с хорошо наблюдаемыми течениями. Наблюдаемые течения с внутренними волнами в природе относятся к $\epsilon \rightarrow 1$. Следующие примеры численных решений относятся к $\epsilon = 0.98$, тогда как значение β варьируется. В частности, распределения скоростей на рис. 14, *a* относятся к $\beta = -1.5$; таким образом, направления потоков в верхней и нижней жидкостях в этом примере противоположны, как это имело место в ситуациях смешения, описанных в [53].

Отношение высоты к длине волны для этой волны равно 0.1234, а это весьма близко к отношению 0.141 для поверхностных волн Стокса в неограниченном потоке, но длина внутренней волны, отнесенная к $\Lambda = 0.5U_{1\infty}^2 g^{-1}$, намного больше. Длины волн, представленные на рис. 14, резко зависят от β , но, как видно из рис. 15, это не ведет к существенным вариациям

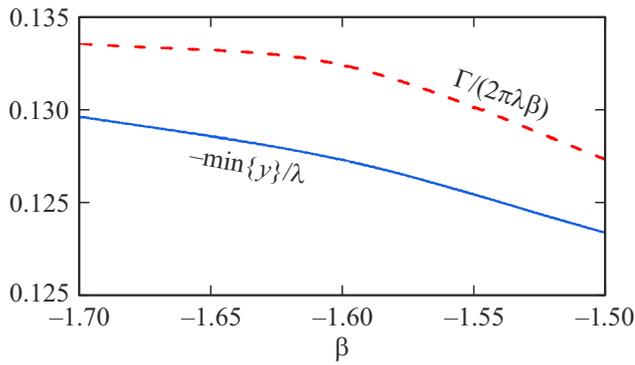


Рис. 15. Зависимости крутизны волны Стокса (сплошная линия) и нормированной интенсивности связанных вихрей (штриховая линия) от β при $\varepsilon = 0.98$.

крутизны волны или нормированных интенсивностей вихрей.

Уравнения (29), (30) будут удовлетворяться при изменении знака скорости. Поэтому приведенные выше результаты верны для $1.5 \leq \beta \leq 1.7$ и того же ε с тем же $\Gamma/(\beta\lambda)$. При $0.4 < \varepsilon < 0.8$ используемый численный метод не позволял добиться сходимости итераций. Возможно, при таком ε внутренних волн Стокса просто не существует.

4. Задачи с граничными условиями, зависящими от кривизны

Отыскание капиллярных волн является задачей с условием на свободной границе, зависящим от ее кривизны. Интерес к такой проблеме возрос в последние десятилетия в связи с ажиотажем вокруг снижения сопротивления при использовании гидрофобных покрытий, и было выполнено много их экспериментальных исследований в различных диапазонах чисел Рейнольдса (например, описанных в [54–57]). Снижение сопротивления происходит из-за воздушных пленок, прилегающих к таким покрытиям. Модификация уравнения (4) для капиллярных волн на пленке принимает вид $U^2 + 2\vartheta/We = 1 + \sigma$, где We — число Вебера. Аналог уравнения (16) в этой задаче

$$\frac{\widehat{k}}{We} + Uu + hU^2\vartheta = \frac{1 + \sigma - U^2}{2} - \frac{\vartheta}{We}. \quad (36)$$

Здесь \widehat{k} — возмущение ϑ . Несмотря на сходство уравнения (36) с уравнением (17), использовать выведенное из последнего уравнение (20) в этой задаче невозможно. Дело в том, что у кривизны границы на одну непрерывную производную меньше, нежели имеет u . Поэтому неизвестную функцию $h(x)$ следует представить в виде суммы

$$h = \sum_k A_k f_k(x) + \sum_k B_k g_k(x), \quad (37)$$

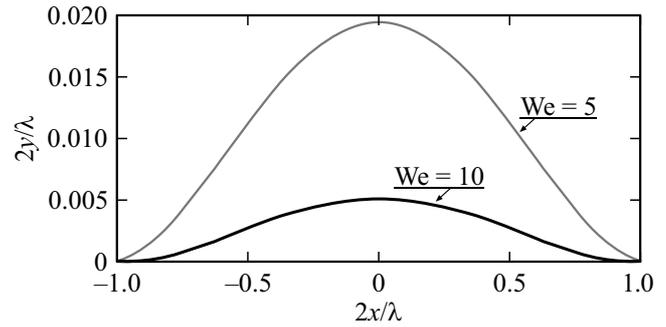


Рис. 16. Расчетные формы капиллярных волн.

где A_k и B_k — неопределенные коэффициенты, а функции f_k, g_k удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} f_k\left(\frac{\lambda}{2}\right) &= \frac{df_k}{dx}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{dg_k}{dx}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \\ &= \frac{df_k}{dx}(0) = \frac{dg_k}{dx}(0) = g_k(0) = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Отыскание этих коэффициентов идет путем минимизации правой части уравнения (36).

Примеры формы рассчитанных [16] капиллярных волн показаны на рис. 16. Аппроксимации h , подобные формуле (37), использовались и в обратных задачах [58–60], которые также можно рассматривать как задачи со свободными границами.

5. Задачи для нестационарных течений

Задачи для невязких течений с нестационарными свободными границами более сложны даже без учета сил гравитации и капиллярности. Для них динамическое условие (4) на поверхности каверны можно представить в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \sqrt{1 + \sigma - 2\gamma\left(a\gamma\Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial t^*}\right)}. \quad (39)$$

Его правая часть зависит от мгновенных значений трех параметров: σ , $a = \frac{D}{U_\infty^2(0)} \frac{dU_\infty(t)}{dt}$ и $\gamma = \frac{U_\infty(0)}{U_\infty(t)}$; здесь $t^* = \frac{U_\infty(0)}{c}$. Нестационарный аналог уравнения (15)

$$\frac{qb}{2} - \frac{\partial(Uh)}{\partial l} - \frac{\gamma h}{t^{**}} = 0 \quad (40)$$

содержит t^{**} — разность двух последовательных безразмерных моментов времени t_+^* и t_-^* ; здесь l — касательная к линии тока (которая, как правило, не совпадает со свободной поверхностью для нестационарных течений). Необходимо отметить, что в отличие от ситуации, разрешаемой уравнениями (17), (20), (21), здесь вариации L напрямую связаны с изменением t , а не σ . Поэтому аналог уравнения (21) для нестационарных течений служит для определения t . Квазилинеаризация уравнения (4) с правой частью, описываемой уравнением (39),

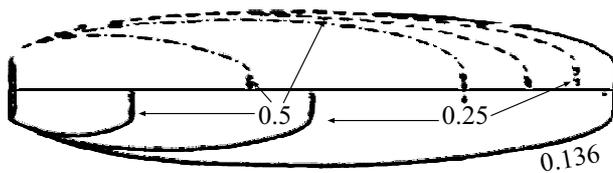


Рис. 17. Меридиональные сечения осесимметричных каверн за диском в нестационарных течениях (штриховые кривые — при $\theta = 0.1$, штрихпунктирные кривые — при $\theta = 0.02$) в сравнении со стационарными кавернами (показаны сплошными кривыми) при тех же значениях σ (показаны цифрами). Для всех каверн $\sigma(0) = 0.136$. Для нестационарных каверн $\sigma(t) = \sigma(0)\gamma^2$, $a = -\theta$, $\gamma = (1 - \theta t^*)^{-1}$.

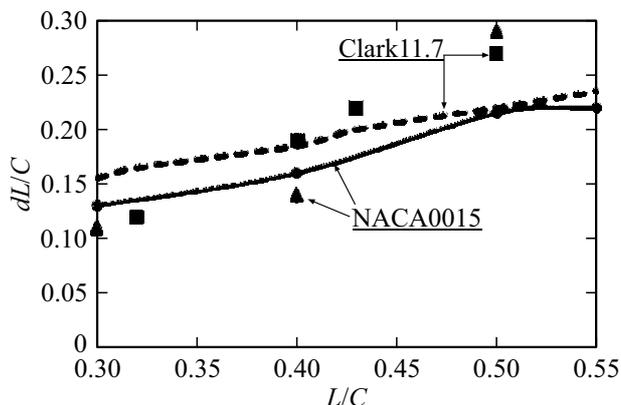


Рис. 18. Сравнение расчета [16] с экспериментальными данными [53] для Clark11.7 и [54] для NACA0015; численные результаты отображаются линиями.

с последующим обращением интегралов Коши приводит к громоздкой формуле, которая здесь опущена.

Некоторые расчетные примеры из [14] для нестационарных течений даны на рис. 17. Можно видеть, что для движения диска с сильным торможением анализ стационарного течения существенно занижает длину каверны. В этом примере при $\sigma = 0.5$ результат стационарной теории составляет только 23% от результата нестационарной теории. Устойчивость свободной поверхности в примерах с рис. 17 сохранялась за счет очень высокого $|a|$, хотя, как установлено в [61], границы нестационарных каверн в идеальных жидкостях, вообще говоря, неустойчивы.

Наиболее часто наблюдаемым кавитационным течением является течение с очень малым $|a|$, но в реальности и оно является нестационарным. Для такого нестационарного течения трудно добиться сходимости итераций, подобной показанной на рис. 9. Из-за этого для них становится предпочтительным исходный квазилинейный вариант [7] метода Иванова. Тогда решения для стационарной кавитации для данного σ с использованием схемы Рябушинского можно рассматривать как исходные невозмущенные решения. Этот вариант использовался в [62] для расчета таких каверн на лопастях и в [17]

на крыльях ClarkY-11.7 и NACA-0015. Как показано на рис. 18, совпадение расчетных и измеренных [63,64] пульсаций длины каверн dL удовлетворительно, по крайней мере, до $L = 0.5C$.

В расчетах, приведенных на рис. 18, учитывались упругость подводного крыла и сжимаемость каверны. Эти факторы были учтены в правой части уравнения (2), но не повлияли на схему расчета. Однако необходимо отметить, что постановки задач со свободными границами продолжают уточняться [65] даже для меньшего числа физических параметров.

Заключение

Расчеты течений со свободными границами представляют собой особый класс нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений, поскольку границы областей их определения неизвестны и должны быть найдены. Описанный итерационный метод основан на квазилинеаризации граничных условий для потенциалов с последующим решением интегральных уравнений Фредгольма второго рода и сингулярных интегральных уравнений по очереди на всех итерациях. Варианты этого метода являются модификациями (обобщениями) метода, разработанного А.Н. Ивановым.

Приведены общая формулировка метода и его модификации для конкретных типов течений, а также многочисленные расчетные примеры для них. В основе своей сходные модификации позволяют решать физически разнообразные задачи.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Г. Биркгоф, Э. Сарнтонелло. *Следы, струи и каверны* (Наука, М., 1964)
- [2] D. Riabouchinsky. Proc. London Math. Soc., **19**, 206 (1919).
- [3] C. Brennen. J. Fluid Mechanics, **37**, 671 (1969).
- [4] М.И. Гуревич. *Теория струй идеальной жидкости* (Физматгиз, М., 1961)
- [5] J.A. Geurst. Int. Shipbuilding Progress, **6**, 369 (1959).
- [6] G. Birkhoff. Mathematical Analysis of Cavitation. UITAM Symp. High-Speed Flows, Leningrad (1971)
- [7] А.Н. Иванов. Механика и машиностроение. Известия АН СССР, **6**, 118 (1962).
- [8] А.Н. Иванов. Труды ЦНИИ Ака. АН Крылова, **219**, 70 (1965).
- [9] M. Tulin. J. Ship Res., **7**, 16 (1964).
- [10] К.В. Александров. МЖГ, Известия АН СССР, **4**, 140 (1976).
- [11] Э.Л. Амромин, А.Н. Иванов. МЖГ, Известия АН СССР, **4**, 50 (1976).
- [12] А.В. Васильев. Труды ЦНИИ А.Н. Крылова, **4** (288), 8 (1997).

- [13] К.В. Александров, А.В. Васильев. Гидродинамика высоких скоростей, НТО А.Н.Крылова, **3**, 31 (1983).
- [14] Э.Л. Амромин, В.А. Бушковский. ПММ, **49**, 787 (1985).
- [15] E.L. Amromin. Ocean Eng., **54**, 46 (2012).
- [16] E.L. Amromin. ASME J. Fluids Eng., **141**, 114501 (2019).
- [17] E.L. Amromin. ASME J. Fluids Eng., **142**, 111203 (2020).
- [18] J.S. Uhlman. J. Ship Res., **31**, 107 (1987).
- [19] C. Pelone, A. Rowe. ASME J. Fluids Eng., **110**, 182 (1988).
- [20] A. Rowe, O. Blottiaux. J. Ship Res., **37**, 39 (1993).
- [21] К.Е. Афанасьев, С.В. Стукалов. ПМТФ, **40**, 27 (1999).
- [22] A.N. Varghese, J.S. Uhlman, I.N. Kirschner. ASME J. Fluids Eng., **127**, 41 (2005).
- [23] J.-K. Choi, G.L. Chahine. 28th Symp. *Naval Hydrodynamics* (Pasadena, California, USA 2010)
- [24] F. Salvatore, H. Streckwall, T. van Terwisga, 1st Int. Symp. *Marine Propulsors* (Trondheim, (Norway 2009)
- [25] F. Stern, J. Yang, Z. Wang, H. Sadat-Hosseini, M. Mousaviraad, S. Bhushan, T. Xing. 29th Symp. *Naval Hydrodynamics* (Gothenburg, 2012)
- [26] E.L. Amromin. ASME J. Fluids Eng., **140**, 011103 (2018).
- [27] W. Du, S.A. Kinnas. 29th ISOPE Conf. (Honolulu, 2019)
- [28] А.Н. Иванов. *Гидродинамика развитых кавитационных течений* (Судостроение, Л., 1980)
- [29] Yu. Gorbachev, A. Butuzov, A.N. Ivanov, V. Kalyuzhny, A. Pavlenko. 5th Intern. Congress *Marine Technology* (Athens, 1990)
- [30] Ю. Горбачев, А. Буянов, А. Сверчков. Морской флот, **1**, 26 (2015).
- [31] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. *Уравнения математической физики* (Гостехиздат, М., 1951)
- [32] A.G. Terentiev, I.N. Kirschner, J.S. Uhlman. *The Hydrodynamics of Cavitating Flows* (Backbone Publishing Company, Fair Lawn, 2011)
- [33] П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский, С.Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В.Я. Стеценко. *Интегральные уравнения* (Наука, М., 1968)
- [34] P.J. Roache. ASME J. Fluids Eng., **114**, 4 (2002).
- [35] Э.Л. Амромин. ЖТФ, **37**, 209 (1992).
- [36] V.H. Aakeri. J. Fluid Mech., **68**, 779 (1975).
- [37] Э.Л. Амромин, А.Н. Иванов. ДАН СССР, **262**, 823 (1982).
- [38] И.Е. Идельчик. *Справочник по гидравлическим сопротивлениям* (Машиностроение, М., 1992)
- [39] A.S. Ramamurthy, R. Balanchandar, H.S. Govinda Ram. ASME J. Fluids Eng., **113**, 278 (1991).
- [40] G. Yin, M.C. Ong. Ocean Eng., **223**, 108647 (2021).
- [41] O.K. Kwon, R. Pletcher. ASME J. Fluids Eng., **108**, 64 (1986).
- [42] Л.В. Гогиш, Г.Ю. Степанов. *Отрывные и кавитационные течения* (Наука, М., 1990)
- [43] А.А. Бутузов. МЖГ, Известия АН СССР, **2**, 83 (1966).
- [44] J. Kopriva, E.L. Amromin, R.E.A. Arndt. ASME J. Fluids Eng., **130**, 031301 (2008).
- [45] E.L. Amromin, G. Karafiath, B. Metcalf. J. Ship Res., **55**, 196 (2011).
- [46] Э.Л. Амромин, А.Н. Иванов, Д. Ю. Садовников. МЖГ, Известия РАН, **4**, 125 (1994).
- [47] D. Sadovnikov, G. Trincas. 22nd Symp. *Naval Hydrodynamics* (Washington, DC, 1998)
- [48] M. Uneyama. Phil. Trans. R. Soc. A, **376**, 20170103 (2017).
- [49] J.H. Michell. Phil. Magazine, **36**, 430 (1893).
- [50] X. Zhong, S. Liao. J. Fluid Mech., **843**, 653 (2018).
- [51] J.Y. Holyer. J. Fluid Mech., **93**, 433 (1979).
- [52] A.M. Abdilghanie, P.J. Diamessis. Theor. Comp. Fluid Dyn., **26**, 205 (2012).
- [53] G. Covles. *Internal Waves* (School for Marine Science & Techn., Umass- Dartmouth 2009)
- [54] D.C. Tretheway, C.D. Meinhart. Phys. Fluids, **14**, L9 (2002).
- [55] J. Ou, B. Perot, J.P. Rothstein. Phys. Fluids, **16**, 4635 (2004).
- [56] О.П. Орлов, А.В. Сверчков. Труды ЦНИИ А.Н. Крылова, **383**, 43 (2018).
- [57] J.W. Gose, K.V. Golovin, M. Boban, J.M. Barros, M.P. Schultz, M. Perlin, S.L. Ceccio. J. Ship Research, **64**, 1 (2020).
- [58] А.В. Васильев. *Разработка методов расчета плоских кавитационных течений и прогнозирование кромочной кавитации натурных гребных винтов* (ЦНИИ А.Н. Крылова, 1997)
- [59] Э.Л. Амромин, В.А. Бушковский. ЖТФ, **42**, 1121 (1997).
- [60] Г.А. Шнеерсон, И.А. Вечеров, Д.А. Дегтев, О.С. Колтунов, С. Кривошеев, С.Л. Шишигин. ЖТФ, **78** (10), 29 (2008). [G.A. Shneerson, I.A. Veчерov, D.A. Degtev, O.S. Koltunov, S.I. Krivosheev, S.L. Shishigin. Tech. Phys., **53** (10), 1278 (2008). <https://doi.org/10.1134/S1063784208100046>]
- [61] А.Н. Кузнецов, О.В. Троепольская. Труды семинара по краевым задачам, **22**, 139 (1985).
- [62] Э.Л. Амромин, А.В. Васильев, Е.Н. Сыркин. МЖГ, Известия РАН, **28**, 57 (1993).
- [63] G.Wang, Q. Wu, B. Huang. Acta Mech. Sin., **33**, 685 (2017).
- [64] E.J. Chae, D.T. Akcabay, A. Lelong, J.A. Astolfi, Y.L. Young. Phys. Fluids, **28**, 075102 (2016).
- [65] D.V. Maklakov, A.I. Lexina. J. Fluid Mech., **936**, A30 (2022).