

06

Локализация электромагнитных волн в зигзагообразной решетке волноводов с конкурирующими нелинейными откликами третьего и пятого порядков

© Е.В. Казанцева, А.И. Маймистов

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,
115409 Москва, Россия

e-mail: elena.kazantseva@gmail.com, aimaimistov@gmail.com

Поступила в редакцию 31.08.2022 г.

В окончательной редакции 03.09.2022 г.

Принята к публикации 06.09.2022 г.

Рассмотрена зигзагообразная решетка волноводов, где каждый второй волновод изготовлен из оптически линейного материала, а их ближайшие соседи характеризуются положительной кубической нелинейностью и отрицательной нелинейностью пятого порядка. В континуальном (длинноволновом) приближении найдены решения системы уравнений для связанных волн в волноводах, которые описывают локализованные в решетке и гармонические распространяющиеся вдоль волноводов волны.

Ключевые слова: нелинейные волны, дискретная фотоника, волноводы, солитоны.

DOI: 10.21883/OS.2022.11.53776.4074-22

1. Введение

Локализация электромагнитного излучения является фундаментальной задачей, которая привлекает внимание уже много лет. В линейной оптике эта цель достигается с помощью резонаторов (микро- и нанорезонаторов — фотонных точек), волноводов и возбуждения поверхностных волн. Нелинейная оптика дает другой способ локализации излучения, который известен как формирование солитонов, или в общем случае, устойчивых уединенных волн. В 1967 г. в науку вошел термин „фотоника“ [1] и позже, примерно с 70-х годов прошлого столетия, стал формироваться раздел оптики, где изучались явления, в которых основную роль играют фотоны, подобную той, которую электроны играют в электронике. Важную роль в фотонике стали играть дискретные среды, образованные периодическим распределением в пространстве диэлектрической проницаемости. Из-за особенностей спектра электромагнитного излучения, содержащего запрещенные и разрешенные зоны, такого рода среды получили название фотонных кристаллов [2]. Другим примером дискретных сред служат метаматериалы [3–5], которые образованы периодически расположенными в диэлектрической матрице металлическими или диэлектрическими элементами сложной формы, имеющими размеры, сопоставимые с длиной волны излучения. В широком смысле к метаматериалам можно отнести массивы квантовых точек, микрорезонаторов, джозефсоновских контактов (сквидов), слоев из тонких пленок металла или графена, волноводов. Если эти „метаатомы“ расположены периодически в пространстве, то говорят о фотонных решетках из метаатомов. Результаты, касающиеся нелинейной локализации света в дискретных структурах, представлены в большом

числе обзоров и книгах, среди которых достаточно отметить [4,6].

В последние годы появились публикации результатов исследования оптических свойств фотонных решеток, образованных из одномерных и двумерных массивов волноводов, причем элементарная ячейка решетки содержит более двух волноводов. Предполагается, что излучение может проникать в соседние волноводы только за счет нарушенного полного внутреннего отражения. Эта ситуация аналогична электронному кристаллу в условиях сильной связи. Частота излучения в фотонной решетке зависит от постоянной распространения вдоль волновода и от дискретного набора поперечных волновых чисел. Таким образом, дисперсионные кривые образуют поверхности над зоной Бриллюэна, аналогичные разрешенным зонам электронов в кристалле. Кривизна зон характеризует дифракцию света на фотонной решетке, о которой говорят как о дискретной дифракции [6,7].

Кроме фотонных решеток с двумя и более атомами в элементарной ячейке, исследовались зигзагообразные решетки [11], бинарные решетки [8–10] и зигзагообразные бинарные решетки [12,13]. В линейном случае локализация излучения в таких фотонных решетках не происходит. Эффект нелинейности керровского типа может привести к формированию дискретного солитона [6,14,15]. В настоящее время интерес к бинарным фотонным решеткам снова возник в связи с исследованиями в области неэрмитовой фотоники [16,17]. В элементарной ячейке решетки один волновод является поглотителем, а второй волновод является усилителем.

В большинстве случаев рассматривались решетки диэлектрических волноводов, нелинейные свойства которых описываются керровской нелинейностью. Но более слабая квадратичная нелинейность может приводить к

образованию дискретных солитонов [6,18–20]. Влияние насыщения нелинейности на образование дискретных солитонов исследовано для простых решеток (т.е. с одним „атомом“ в элементарной ячейке) [21–23]. Здесь будет рассмотрена модель дискретной фотоники, которая является обобщением бинарной зигзагообразной решетки (рисунок) на случай конкурирующих нелинейностей третьего и пятого порядков. Система уравнений связанных волн может быть решена в континуальном (или длинноволновом) приближении, что приводит к локализованным распределениям интенсивностей электромагнитных волн по волноводам решетки.

2. Основные уравнения модели

Распространение электромагнитного излучения в линейке волноводов обычно описывается на основе теории связанных волн [24]. Электромагнитная волна представляется линейной суперпозицией квазигармонических волн, локализованных в n -м волноводе. Используя приближение медленно меняющихся амплитуд, из волнового уравнения выводится дифференциально-разностное уравнение для амплитуд связанных волн в n -м волноводе [25–29].

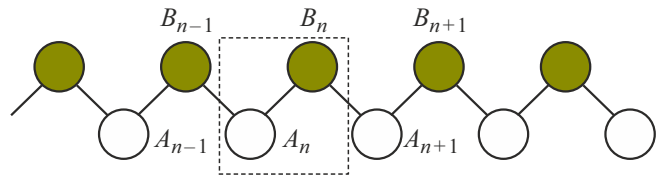
Для зигзагообразной решетки, показанной схематично на рисунке, медленно меняющиеся амплитуды электрических полей A_n и B_n определяются системой уравнений следующего вида

$$i \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right) A_n + e^{i\delta_a \xi} (B_n + B_{n-1}) + c_2(A_{n+1} + A_{n-1}) + G_1[A_n]A_n = 0, \quad (1)$$

$$i \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \right) B_n + e^{-i\delta_a \xi} (A_{n+1} + A_n) + c_2(B_{n+1} + B_{n-1}) + G_2[B_n]B_n = 0, \quad (2)$$

где ξ — пространственная координата, измеренная в единицах длины связи L_c , τ — время, измеренное в единицах $t_c = L_c/v_g$, v_g — групповая скорость электромагнитной волны в волноводе. В рассматриваемой модели предполагается, что скорости одинаковы для всех волноводов. Параметр $\delta_a = (\beta_b - \beta_a)L_c$ есть разность постоянных распространения β_b и β_a волн, локализованных в соседних волноводах типа В и А соответственно. Слагаемые $G_1[A_n]$ и $G_2[B_n]$ описывают локальные нелинейные свойства волноводов. Параметр c_2 — отношение констант связи между волноводами, следующими за ближайшими соседями, и ближайшими соседями. Символ $\sigma = \pm 1$ учитывает тот факт, что волноводы типа В могут быть изготовлены из материала с положительным ($\sigma = 1$) или отрицательным ($\sigma = -1$) преломлением.

Здесь будет рассмотрена модель, в которой нелинейными являются только волноводы типа А, и их нелинейные свойства описываются слагаемыми в уравнениях (1)



Конфигурация волноводов, отвечающая одномерной зигзагообразной решетке. Штриховой линией выделена элементарная ячейка. Целые числа n нумеруют элементарные ячейки.

и (2) следующего вида:

$$G_1[A_n] = \mu(|A_n|^2 - \varrho|A_n|^4), \quad G_2[B_n] = 0.$$

В работе [13] был рассмотрен случай керровской нелинейности: $G_1[A_n] = \mu|A_n|^2$. Считается, что условие фазового синхронизма выполнено: $\delta_a = 0$.

Если ограничиться случаем непрерывного излучения и сделать замену переменных $A_n = (-1)^n \tilde{A}_n$ и $B_n = (-1)^n \tilde{B}_n$, то уравнения (1) и (2) принимают следующий вид:

$$i \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{A}_n + (\tilde{B}_n - \tilde{B}_{n-1}) - c_2(\tilde{A}_{n+1} + \tilde{A}_{n-1}) + \mu(|A_n|^2 - \varrho|A_n|^4)\tilde{A}_n = 0, \quad (3)$$

$$i\sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{B}_n + (\tilde{A}_n - \tilde{A}_{n+1}) - c_2(\tilde{B}_{n+1} + \tilde{B}_{n-1}) = 0. \quad (4)$$

3. Нелинейные волны в континуальном приближении

Пусть излучение распространяется вдоль волноводов как гармоническая волна с волновым числом $k_\xi = \beta$. Тогда можно сделать замену $\tilde{A}_n(\xi) = e^{i\beta\xi} a_n$ и $\tilde{B}_n(\xi) = e^{i\beta\xi} b_n$, которая редуцирует систему дифференциально-разностных уравнений к системе разностных уравнений:

$$-\beta a_n + (b_n - b_{n-1}) - c_2(a_{n+1} + a_{n-1}) + \mu(|a_n|^2 - \varrho|a_n|^4)a_n = 0, \quad (5)$$

$$-\sigma\beta b_n + (a_n - a_{n+1}) - c_2(b_{n+1} + b_{n-1}) = 0. \quad (6)$$

Все входящие в эти уравнения амплитуды можно считать вещественными величинами, поскольку комплексных чисел в (5) и (6) нет.

В континуальном приближении эта система уравнений сводится к следующей системе:

$$\frac{\partial b}{\partial \xi} - (2c_2 + \beta)a + \mu(a^3 - \varrho a^5) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \xi} + (2c_2 + \sigma\beta)b = 0. \quad (8)$$

Систему уравнений (7) и (8) можно привести к одному уравнению относительно поля $a(\xi)$:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} + (2c_2 + \sigma\beta)(2c_2 + \beta)a - \mu(2c_2 + \sigma\beta)(a^3 - \varrho a^5) = 0.$$

Пусть $\sigma = -1$. В этом случае полученное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = p^2 a - \kappa(a^3 - \varrho a^5), \tag{9}$$

где $p^2 = \beta^2 - 4c_2^2$ и $\kappa = \mu(\beta - 2c_2)$. В том случае, когда $\beta^2 < 4c_2^2$, уравнение (9) не имеет ограниченных решений с нулевыми асимптотиками на бесконечности. Но если $\beta^2 > 4c_2^2$, то ограниченные решения существуют. Таким образом, взаимодействие со следующими после ближайших соседей приводит к появлению щели (запрещенной зоны) для постоянных распространения β .

Уравнение (9) можно понимать как уравнение движения материальной точки в заданном потенциале. Это уравнение имеет первый интеграл (который получается стандартным путем):

$$\left(\frac{\partial a}{\partial \xi}\right)^2 - p^2 a^2 + \frac{\kappa}{2} \left(a^4 - \frac{2\varrho}{3} a^5\right) = I_1.$$

Для граничных условий, отвечающих локализованным волнам, интеграл I_1 равен нулю¹.

Если сделать замену $a = a_0 u^{-1/2}$, то для новой зависимой переменной $u(\xi)$ можно получить уравнение

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 = p^2 u^2 - \frac{\kappa a_0^2}{2} u + \frac{\kappa \varrho a_0^4}{3}.$$

Определив новую независимую переменную $\tau = 2p\xi$ и нормировочный параметр $a_0^2 = 4p^2 / |\kappa|$, можно полученное выше уравнение записать в простой форме:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 = \nu u^2 - 2u + \theta = (u - 1)^2 - (1 - \theta),$$

где $\theta = (16/3)\varrho p^2 / \kappa$, $\nu = \kappa / |\kappa|$. Далее будет предполагаться, что $\kappa > 0$ — фокусирующая нелинейность третьего порядка.

Очевидная замена $u - 1 = \Delta w$, где параметр Δ произвольный, приводит к уравнению

$$\Delta^2 \left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 = \Delta^2 w^2 - (1 - \theta). \tag{10}$$

В области значений θ $0 < \theta < 1$ можно определить $\Delta^2 = 1 - \theta$. В этом случае решение уравнения (10) записывается как $w(\tau) = \cosh(\tau - \tau_0)$, где τ_0 — постоянная

¹ Достаточно, чтобы амплитуда a и ее производная обращались бы в нуль на одной из границ решетки.

интегрирования. Следовательно, $u = 1 + \Delta \cosh(\tau - \tau_0)$, и в исходных переменных это решение имеет вид

$$a^2(\tau) = \frac{a_0^2}{1 + \Delta \cosh(\tau - \tau_0)}. \tag{11}$$

В области $\theta > 1$ параметр Δ^2 выбирается в виде $\Delta^2 = \theta - 1 > 0$, и уравнение для w принимает следующий вид:

$$\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 = w^2 + 1.$$

Его решение есть $w(\tau) = \sinh(\tau - \tau_0)$. Следовательно,

$$a^2(\tau) = \frac{a_0^2}{1 + \Delta \sinh(\tau - \tau_0)}. \tag{12}$$

Правая часть этого выражения обращается в нуль в некоторой точке на оси τ и меняет знак, следовательно, данное решение не имеет физического смысла.

В точке $\theta = 1$ параметр Δ обращается в нуль. Функция удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{dw}{d\tau}\right)^2 = w^2 \tag{13}$$

или $dw/d\tau = \pm w$. Отсюда следуют два решения: $w^{(\pm)} = \exp[\pm(\tau - \tau_0)]$. Следовательно,

$$a^{(\pm)2}(\tau) = \frac{a_0^2}{1 + \exp[\pm(\tau - \tau_0)]}. \tag{14}$$

Используя этот результат, можно записать его в другом виде

$$a^{(\pm)2}(\tau) = \frac{a_0^2 \exp[\mp(\tau - \tau_0)/2]}{2 \cosh[(\tau - \tau_0)/2]}. \tag{15}$$

Эти решения описывают доменные стенки, подобные найденным в случае ромбической решетки [30]. Но такая волна не является локализованной в волноводах типа А.

Когда конкурирующей нелинейности нет, среда обладает только нелинейностью третьего порядка, и $\theta = 0$. В этом предельном случае из (10) следует, что

$$a^2(\tau) = \frac{a_0^2}{1 + \cosh(\tau - \tau_0)} = \frac{2a_0^2}{\cosh^2[(\tau - \tau_0)/2]}.$$

Отсюда получается решение для случая керровской нелинейности:

$$a(\tau) = \frac{\sqrt{2}a_0}{\cosh[(\tau - \tau_0)/2]}.$$

Чтобы получить распределение полей в волноводах типа В, надо обратиться к уравнению (8), из которого следует, что

$$(2c_2 - \beta)b(\xi) = -\frac{da}{d\xi} = -2p \frac{da}{d\tau}.$$

Поскольку

$$a(\tau) = \frac{a_0}{(1 + \Delta \cosh \tau)^{1/2}},$$

производная по τ от амплитуды поля a есть

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{(-1/2)a_0}{(1 + \Delta \cosh \tau)^{3/2}} \Delta \sinh \tau.$$

Вспомнив, что $p = \sqrt{\beta^2 - 4c_2^2}$, можно получить окончательное выражение для амплитуды b :

$$b(\xi) = -\sqrt{\frac{\beta + 2c_2}{\beta - 2c_2}} \frac{a_0 \Delta \sinh \tau}{(1 + \Delta \cosh \tau)^{3/2}}, \quad \tau = 2p\xi. \quad (16)$$

Сравнивая полученные выражения для $a(\xi)$ и $b(\xi)$, можно заметить, что распределение полей $a(\xi)$ симметричное, а полей $b(\xi)$ — антисимметричное. Это отражено в уравнении (8) и является его следствием. Учет производных более высокого порядка может изменить этот результат.

Решение в виде доменной стенки находится аналогично. Положив (где $s = \pm 1$)

$$a^{(s)}(\tau) = \frac{a_0 \exp[-s\tau/4]}{\sqrt{2} \cosh^{1/2}(\tau/2)},$$

можно вычислить производную

$$\begin{aligned} \frac{da^{(s)}}{d\tau} &= \frac{a_0 \exp[-s\tau/4]}{\sqrt{2} \cosh^{1/2}(\tau/2)} \left(-\frac{s}{4}\right) \\ &+ \frac{a_0 \exp[-s\tau/4]}{\sqrt{2} \cosh^{3/2}(\tau/2)} \left(-\frac{1}{4} \sinh(\tau/2)\right) = \\ &= -\frac{a_0 \exp[-s\tau/4]}{4\sqrt{2} \cosh^{1/2}(\tau/2)} [s + \tanh(\tau/2)]. \end{aligned}$$

Окончательное выражение для поля $b(\xi)$ будет иметь следующий вид:

$$b^{(\pm)}(\xi) = -\sqrt{\frac{\beta + 2c_2}{\beta - 2c_2}} \frac{a_0 e^{\mp\tau/4}}{2\sqrt{2} \cosh^{1/2}(\tau/2)} [\tanh(\tau/2) \pm 1], \quad \tau = 2p\xi. \quad (17)$$

4. Заключение

В настоящей работе рассмотрена одна из моделей дискретной фотоники — модель, в которой две линейки волноводов, смещены одна относительно другой, что позволяет осуществить взаимодействие (помимо ближайших соседей) также с волноводами следующими после ближайших соседей. Такая зигзагообразная решетка рассматривалась прежде в [11,12]. Если в элементарной ячейке такой решетки присутствуют два типа волноводов (один волновод линейный, а другой характеризуется керровской нелинейностью) то в такой

решетке может произойти локализация излучения при выполнении некоторого порогового условия [13]. Но эта локализация имеет место в направлении оси волноводов. Локализация в поперечном направлении, когда излучение сосредоточено только в нескольких волноводах, не была исследована. Если предположить, что от узла к узлу решетки напряженность поля меняется мало, можно использовать континуальное приближение и перейти от разностных уравнений к дифференциальным. Решение полученных таким путем уравнений демонстрирует существование локализованных распределений амплитуд (или интенсивностей) электромагнитного поля по волноводам. Параметры локализованных распределений интенсивностей зависят от отношения констант взаимодействия между ближайшими волноводами и волноводами, следующими за ближайшими. Этот параметр может меняться при изменении геометрических характеристик зигзагообразной решетки.

Помимо локализованных распределений амплитуд по волноводам существуют распределения в форме доменных стенок. Надо заметить, что присутствие конкурирующих нелинейностей обеспечило существование решения типа доменной стенки. Для ромбической решетки имело место такое же решение при учете конкурирующих кубической нелинейности и нелинейности пятого порядка [30]. То же самое решение было получено при рассмотрении задачи о распространении предельно коротких импульсов в среде, описываемой моделью Дюффинга [31]. Можно сделать вывод, что образование распределения напряженностей полей (или интенсивностей) электромагнитных волн в форме доменных стенок присуще решеткам волноводов с керровской нелинейностью.

Рассмотренная здесь модель может быть обобщена с тем, чтобы исследовать возможность существования полностью локализованных распределений по волноводам как в поперечном, так и в продольном направлениях.

Финансирование работы

Настоящее исследование выполнено при поддержке программы НИЯУ МИФИ Приоритет 2030.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] А. Н. Теренин. *Фотоника молекул красителей и родственных органических соединений* (Наука, Л., 1967).
- [2] E. Yablonovitch. *J. Opt. Soc. Amer. B*, **10** (2), 283 (1993).
- [3] В.Г. Веселаго. *УФН* **173** (7), 790 (2003).
- [4] *Nonlinear, Tunable and Active Metamaterials*, ed. by I.V. Shadrivov, M. Lapine, Yu.S. Kivshar, Yuri S. (Springer, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2015).
- [5] F. Monticone, A. Alu. *Rep. Prog. Phys.*, **80**, 036401 (2017).

- [6] Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. *Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам.* (ФИЗМАТЛИТ, М. 2005). [Yu.S. Kivshar, G.P. Agrawal. *Optical solitons. From Fibers to Photonic Crystals* (Academic Press, 2003)].
- [7] A. Szameit, St. Nolte. *J. Phys. B*, **43**, 163001 (2010).
- [8] N.K. Efremidis, P. Zhang, Zhi Chen, D.N. Christodoulides, E. Christian, Ch.E. Rüter, D. Kip. *Phys. Rev. A*, **81**, 053817 (2010).
- [9] А.А. Довгий, А.И. Маймистов. *Опт. и спектр.*, **116** (4), 673 (2014). [A.A. Dovgiya, A.I. Maimistova. *Opt. Spectrosc.*, **116** (4), 626 (2014)].
- [10] D.A. Zezyulin, V.V. Konotop, F.K. Abdullaev. *Opt. Lett.*, **37** (19), 3930 (2012).
- [11] N.K. Efremidis, D.N. Christodoulides. *Phys. Rev. B*, **65**, 056607 (2002)
- [12] G. Wang, J.P. Huang, K.W. Yu. *Optics Letters.*, **35**, 1908 (2010).
- [13] Е. В. Казанцева, А. И. Маймистов. *Квантовая электроника*, **43** (9), 807 (2013). [E. V. Kazantseva, A. I. Maimistov. *Quant. Electron.*, **43** (9), 807 (2013)].
- [14] F. Lederer, G.I. Stegeman, D.N. Christodoulides, G. Assanto, M. Segev, Ya. Silberberg. *Phys. Rept.*, **463** 1 (2008).
- [15] Ya.V. Kartashov, B.A. Malomed, L. Torner. *Rev. Mod. Phys.*, **83** (1), 247 (2011).
- [16] А.А. Зябловский, А.П. Виноградов, А.А. Пухов, А.В. Дорофеев, А.А. Лисянский. *УФН*, **57** (11), 1177 (2014).
- [17] V.V. Konotop, J. Yang, D.A. Zezyulin. *Rev. Mod. Phys.*, **88** (3), 035002 (2016).
- [18] R. Iwanow, R. Schiek, G.I. Stegeman, T. Pertsch, F. Lederer, Y. Min, W. Sohler. *Phys. Rev. Lett.*, **93** (11), 113902 (2004).
- [19] D. Leykam, A.S. Solntsev, A.A. Sukhorukov, A.S. Desyatnikov. *Phys. Rev. A*, **92**, 033815 (2015).
- [20] J. Cuevas, J.C. Eilbeck. *Phys. Lett. A*, **358** (1), 15 (2006).
- [21] F.Kh. Abdullaev, M. Salerno. *Phys. Rev. E*, **97**, 052208 (2018).
- [22] H. Susanto, B.A. Malomed. *Chaos, Solitons & Fractals*, **142**, 110534 (2020).
- [23] M. Bagci. *J. Opt. Soc. Am. B*, **38** (4), 1276 (2021).
- [24] *Интегральная оптика*, пер. с англ., под ред. Т. Тамир (Мир, М., 1978). [*Integrated Optics*, ed. by T. Tamir (Springer-Verlag, Berlin, 1975)].
- [25] S. Somekh, E. Garmire, A. Yariv, H.L. Garvin, R.G. Hunsperger. *Appl. Phys. Lett.*, **22**, 46 (1973).
- [26] T. Pertsch, T. Zentgraf, U. Peschel, A. Bräuer, F. Lederer. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 093901 (2002).
- [27] G. Staron, E. Weinert-Raczka, P. Urban. *Opto-Electronics Review*, **13** (1), 93 (2005).
- [28] U. Röpke, H. Bartelt, S. Unger. *Appl. Phys. B*, **104** (1), 48 (2011).
- [29] A.I. Maimistov, I.R. Gabitov. *Eur. Phys. J. Special Topics.*, **147** (1), 265 (2007).
- [30] А.И. Маймистов. *Квант. электрон.*, **50**(9), 844 (2020). [A.I. Maimistov. *Quantum Electronics*, **50** (9) 844 (2020)].
- [31] А.И. Маймистов. *Опт. и спектр.*, **94** (2), 281 (2003). [A.I. Maimistov. *Opt. Spectrosc.*, **94** (2), 251 (2003)].