

01

О силе электростатического взаимодействия двух сфероидальных макрочастиц в модели Пуассона–Больцмана

© С.И. Гращенков

Псковский государственный университет,
180000 Псков, Россия
e-mail: grasi@mail.ru

Поступило в Редакцию 26 мая 2022 г.
В окончательной редакции 23 августа 2022 г.
Принято к публикации 24 августа 2022 г.

Исследовано электростатическое взаимодействие двух заряженных макрочастиц сфероидальной формы с общей осью симметрии в рамках линеаризованной модели Пуассона–Больцмана. Методом конечных элементов проведены расчеты сил взаимодействия между частицами при заданном потенциале на их поверхностях в режиме слабого и умеренного экранирования в отсутствие внешнего поля.

Ключевые слова: электростатическое взаимодействие частиц, модель Пуассона–Больцмана, метод конечных элементов.

DOI: 10.21883/JTF.2022.12.53742.145-22

Введение

При изучении различных процессов в пылевой плазме и электролитах важную роль играет учет сил электростатического взаимодействия заряженных макрочастиц [1,2]. Если потенциалы электрического поля в рассматриваемых точках плазмы или электролита достаточно малы, так, что потенциальная энергия свободных носителей заряда в электростатическом поле много меньше энергии их теплового движения [2,3], распределения φ потенциала в окрестности частиц можно искать, исходя из линеаризованного уравнения Пуассона–Больцмана:

$$\Delta\varphi - k_D^2\varphi = 0, \quad (1)$$

где k_D — постоянная экранирования (обратный дебаевский радиус) [4]. Расчетам сил электростатического взаимодействия макрочастиц на основе уравнения (1) посвящено большое количество работ, однако, если исключить асимптотические случаи очень малых и очень больших расстояний между поверхностями частиц [5], в них рассматривается взаимодействие частиц сферической формы. Обычно в этом случае анализ проводится на основе найденного в работе [6] решения уравнения (1). Это решение описывает аксиально-симметричное распределение потенциала в окрестности сферических частиц и представлено в виде бесконечных рядов по произведениям полиномов Лежандра и модифицированных функций Бесселя. Подробный обзор этих работ приведен в [7]. Поэтому представляет интерес расчет силы электростатического взаимодействия частиц, форма которых отлична от сферической. В настоящей работе с помощью метода конечных элементов рассматривается электростатическое взаимодействие двух заряженных макрочастиц сфероидальной формы с общей

осью симметрии. Отметим, что распределение потенциалов на поверхности частиц зависит от расстояния между ними, их размеров, скоростей и характерного времени релаксации поверхностного заряда [8], и поиск такого распределения является отдельной задачей. Поэтому при расчете сил взаимодействия достаточно часто ограничиваются двумя предельными случаями: постоянного поверхностного заряда частиц и постоянного потенциала на их поверхностях. Последний случай имеет место при термодинамическом равновесии в равновесной плазме и электролитах [8] и именно он будет рассматриваться в настоящей работе.

1. Методика расчета

Как было уже сказано, в настоящей работе для исследования электростатического взаимодействия макрочастиц применяется метод конечных элементов. В этом методе область, в которой ищется распределение той или иной величины, разбивается на множество подобластей. В результате получается расчетная сетка, на основе которой генерируется набор базисных функций, используемых для аппроксимации искомого распределения. Таким образом, распределение ищется в виде разложений в ряд по этим функциям с неизвестными коэффициентами. В настоящее время имеется ряд компьютерных программ, позволяющих методом конечных элементов находить численное решение дифференциального уравнения по его слабой форме. Слабая форма уравнения (1) имеет вид [9]:

$$\int_{\Omega} \tilde{\nabla} u \tilde{\nabla} \varphi d\tilde{V} + \int_{\Omega} k^2 u \varphi d\tilde{V} = 0, \quad (2)$$

где

$$u = \frac{\varphi}{\varphi_0}, \quad k = k_D R_1.$$

Здесь ϕ_0 — потенциал поверхности частиц, Ω — конечная область, в которой ищется распределение потенциала, V — объем этой области, ϕ — тестовая функция. Последовательная подстановка тестовых функций в уравнение (2) позволяет получить систему уравнений для расчета указанных выше неизвестных коэффициентов. Здесь и далее использование тильды над операторами и выражаемыми через координаты величинами указывает, что координаты нормированы на характерный размер R_1 первой частицы, который в случае сферической формы частицы равен ее радиусу, а в случае сфероидальной — максимальному расстоянию от оси симметрии частиц до ее поверхности. Будем полагать, что соответствующее расстояние R_2 для второй частицы не превышает R_1 . Отметим, что слабая форма (2) имеет однозначное решение при условии, что на границе рассматриваемой области задано распределение u , или при условии, что это распределение задано хотя бы на части этой границы, а на остальной части нормальная составляющая ∇u равна нулю. Если искомые распределения осесимметричны, как это имеет место в данном случае, требования к вычислительным ресурсам можно многократно сократить, перейдя к цилиндрическим координатам, и в результате трехмерную задачу свести к двумерной, в которой все распределения зависят только от полярного радиуса ρ и аппликаты z цилиндрической системы координат. Сведения, необходимые для перехода к цилиндрической системе координат, приведены в [10]. При однородном распределении потенциала на поверхности частицы распределение напряженности \mathbf{E} электрического поля на ней будет совпадать с распределением на поверхности металлической частицы. Поэтому действующую на частицу силу \mathbf{F} можно вычислять как силу, действующую на проводник в жидком или газообразном диэлектрике [11]:

$$\mathbf{F} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2} \oint_S \mathbf{E}^2 \mathbf{n} dS. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор нормали к элементу поверхности, направленный внутрь тела, S — площадь поверхности тела, ε_0 — электрическая постоянная, ε — диэлектрическая проницаемость среды. С формальной точки зрения для решения рассматриваемой задачи достаточно провести вычисления по формулам (2), (3) с помощью какого-либо математического пакета с поддержкой метода конечных элементов. Однако без специальных мер, направленных на повышение точности вычислений и оценок указанной точности, проводимые расчеты на основе имеющихся пакетов будут некорректны. Поясним сказанное. Метод конечных элементов по своей сути является приближенным. Поэтому вследствие ошибок вычисления получаемое распределение потенциала флуктуирует около некоторого истинного распределения. При вычислении поверхностных интегралов от функций, содержащих эти распределения,

влияние этих флуктуаций накапливается, и значения таких интегралов могут вычисляться со значительной погрешностью. В нашем случае это приводит к заметному снижению точности расчета сил по формуле (3) в ситуации, когда изменение напряженности поля вдоль поверхности тела мало по сравнению с ее средним значением. В результате чем больше k и расстояние между макрочастицами, тем меньше точность вычислений. Поэтому необходимо использовать дополнительные методы, направленные на повышение точности вычислений, и провести тестовые расчеты, позволяющие оценить эту точность. Поскольку изменение напряженности поля вдоль поверхности тела уменьшается с увеличением расстояния между поверхностями частиц, то фактически, соответствующие тестовые расчеты необходимы, чтобы определить предельные расстояния между частицами при тех или иных значениях k , на которых вычисления можно провести с требуемой точностью.

Рассмотрим вначале методы, которые были применены для увеличения точности вычислений. Одним из таких методов является использование конечных элементов высоких степеней. В нем используют иерархические базисные функции [12]. Функции, связанные с вершинами расчетной сетки, представляют собой линейные функции барицентрических координат [13], значение каждой из которых равно единице в одном из узлов и нулю во всех остальных. Функции, ассоциированные с ребрами, представляют собой базисные функции, каждая из которых равна нулю во всех вершинах и на двух ребрах и описывается с помощью полиномов некоторого порядка. Функции, ассоциированные с ячейками, равны нулю на границе ячейки и описываются с помощью полиномов некоторого порядка. Более полное описание указанных функций можно найти в работах [12,13]. Увеличение порядка базисных функций позволяет провести аппроксимацию потенциала при меньшем количестве ячеек сетки большего размера. В настоящей работе мы исходим из предположения, что такой подход позволит уменьшить флуктуации градиента потенциала и тем самым увеличить точность вычисления сил, действующих на тела. Одним из пакетов, поддерживающих работу с конечными элементами высоких степеней, является свободно распространяемый пакет NGSolve [13,14], который и используется в настоящей работе. К сожалению, четкие критерии выбора оптимальных порядков базисных функций для решения рассматриваемой задачи неизвестны, поэтому в настоящей работе использовался простой подбор этих порядков. В результате расчет производился с использованием связанных с ячейками расчетной сетки полиномов четвертой степени и функций, ассоциированных с ребрами, десятой степени. Пакет NGSolve представляет набор созданных с использованием языка C++ библиотек, предназначенных для построения соответствующих базисных функций, к которым можно обращаться из скриптов, написанных на языке Python. Для этого используется модуль с названи-

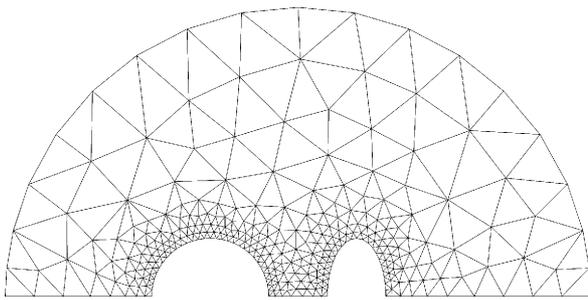


Рис. 1. Структура исходной расчетной области.

ем `ngsolve`. Для построения сеток используется модуль `netgen`. В результате на языке Python можно полностью описать требуемую расчетную процедуру. Соответствующая документация, включая способы установки указанных модулей в различных операционных системах, имеется на сайте `ngsolve.org`, а исходные коды содержатся в репозитории `https://github.com/NGSolve/ngsolve`. Еще одним из методов увеличения точности расчетов является h -адаптация. Под h -адаптацией понимают итерационный процесс изменения расчетной сетки, ведущий к уточнению искомого результата. В простейшем случае, который и рассматривается в настоящей работе, исходя из значения некоторого параметра η , вычисляемого для каждой ячейки на основе полученного решения, принимается решение о разбиении этой ячейки на две. Отметим, что h -адаптации не обязательно будет вести к монотонному увеличению точности расчета сил с увеличением числа ячеек, так как вполне типичной является ситуация, когда, начиная с некоторого момента, при уменьшении размеров ячеек максимальные отклонения потенциала от истинного значения будут уменьшаться, а отклонения градиента расти. В результате начинает падать точность вычисления выражений, в которых используются интегралы от градиента потенциала. Поэтому h -адаптацию необходимо проводить с использованием того или иного способа оценки точности вычислений. Прежде чем перейти к описанию используемого метода h -адаптации, опишем используемые расчетные сетки. Пакет `NGSolve` позволяет двумерную расчетную область разбить на треугольные ячейки при помощи алгоритма Делоне–Вороного [15], исходя из размеров ребер этих ячеек на границе указанной области. Пример исходной расчетной сетки показан на рис. 1. Нижняя граница области соответствует оси симметрии задачи. Для удобства отображения отдельных элементов соотношения их размеров отличаются от реально используемых. Радиус внешней границы полагался равным $100R_1$ при расстоянии h_c между центрами макрочастиц, меньшем $10R_1$, и $10h_c$ в противном случае. На границе, совпадающей с осью симметрии, никаких условий в явном виде не задавалось, так как переход к цилиндрической системе координат автоматически вводит условие равенства нулю радиальной составляющей градиента вычисляемой

величины при $\rho = 0$ [10]. В нашем случае это означает неявное введение условия равенства нулю радиальной нормальной составляющей градиента потенциала на оси симметрии задачи. На внешней границе потенциал вначале полагался равным нулю и уточнялся в процессе h -адаптации способом, который будет описан ниже. Параметр η для каждой ячейки вычислялся при помощи следующего выражения [16]:

$$\eta_k = \int_{\Omega_k} E^2 dV \int_{\Omega_k} (E - E_e)^2 dV.$$

Здесь η_k — параметр, по значению которого судят о необходимости разбиения k -ой ячейки, Ω_k — область, получаемая вращением k -ой двумерной ячейки сетки вокруг оси симметрии тела, V — ее объем. Искомое распределение \mathbf{E} напряженности электрического поля получалось из найденного распределения потенциалов. Распределение \mathbf{E}_e получалось экстраполяцией полученного распределения \mathbf{E} при помощи векторных базисных функций. Для экстраполяции распределения \mathbf{E} использовался описанный в работах [13,14] набор базисных функций, составляющих пространство Соболева H^1 , а для экстраполяции распределения \mathbf{E}_e — описанный в работе [13] набор базисных функций, составляющих пространство $H(\text{div})$. Используемые здесь обозначения функциональных пространств совпадают с общепринятыми в литературе по конечным элементам и с обозначениями работ [13,14], в которых можно найти их подробное описание. Порядки соответствующих видов базисных функций, относящихся к разным пространствам, полагались одинаковыми. На каждом шаге итерации разбиение проводилось для тех ячеек, для которых выполнялось условие $\eta_k > 0.5\eta_{\max}$, где η_{\max} — максимальное значение η_k . На расстояниях от внешней границы меньших 0.2 ее радиуса h -адаптация не проводилась, и значения параметра η_k для соответствующих ячеек не учитывались при нахождении η_{\max} . Характер изменения сетки в процессе h -адаптации иллюстрируется рис. 2. Процесс адаптации повторяется, пока число степеней свободы, понимаемое в данном случае как общее количество неизвестных в разложении искомого решения по базисным функциям, не превысит 10^6 .

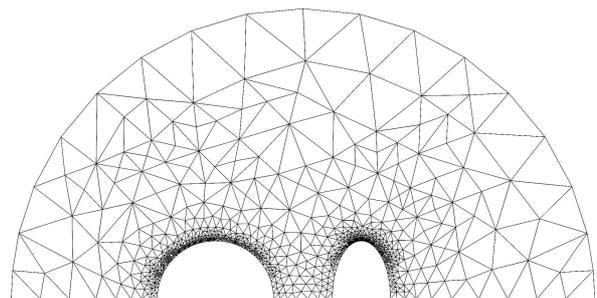


Рис. 2. Расчетная область после нескольких шагов h -адаптации.

Нулевой потенциал на внешней границе с формальной точки зрения означает, что с физической точки зрения граница представляется проводником, на котором наводятся индуцированные заряды, действующие на частицы. Это влияние уменьшается при увеличении размера рассматриваемой области и значения величины k . Уменьшить размер области без снижения точности вычисления можно, если задать потенциал на внешней границе хотя бы на основе некоторого приближенного решения. В настоящей работе в процессе адаптации решетки на каждом шаге вычисляются заряды частиц при помощи теоремы Гаусса. Далее распределение потенциала на внешней границе приближенно представляется как распределение, получаемое суперпозицией распределений, создаваемых одиночными сферическими макрочастицами [1], положение которых совпадает с центрами рассматриваемых макрочастиц, а заряды совпадают с найденными на предыдущем шаге. Отметим, что такое уточнение потенциала на внешней границе позволяет получить заметное повышение точности расчетов или уменьшение размеров расчетной области при заданной точности только для значений величины k , отличающихся от нуля не более чем на несколько сотых. Для больших k вследствие более быстрого уменьшения потенциала при удалении от частиц такое уточнение становится неактуальным. С использованием описанного алгоритма время расчета силы взаимодействия между макрочастицами с использованием процессора Intel(R) Core(TM) i9-10980XE составляло в зависимости от рассматриваемой ситуации от 5 до 9 мин.

Перейдем теперь к описанию проведенных тестовых расчетов. С увеличением расстояния h между поверхностями сферических макрочастиц сила F их электростатического взаимодействия стремится к силе отталкивания F_{DLVO} , описываемой асимптотическим выражением [8]

$$F_{DLVO} = F_0 4\pi \frac{R_2}{R_1} \frac{1 + \tilde{h}_c k}{\tilde{h}_c^2} \exp(-k\tilde{h}),$$

где

$$F_0 = \varepsilon \varepsilon_0 \varphi_0^2.$$

Для одинаковых частиц при $k = 1$, $\tilde{h} = 5$ отличие между действующими на первую и вторую макрочастицы модулями сил, возникающее вследствие неточности вычислений, составило 0.13%, а отличие среднего значения этих модулей от F_{DLVO} составило 0.1%. При тех же k и \tilde{h} в случае, когда радиус второй частицы был в два раза меньше первой, эти разности составили соответственно 0.048 и 0.044%. В работе [17] с использованием того же подхода, что и в работах [6,8], была построена зависимость силы электростатического отталкивания сферических частиц при заданном потенциале на их поверхностях от расстояния между этими поверхностями при $k = 1$. С точностью, о которой можно судить по графически представленным данным, результаты расчетов, проведенных при \tilde{h} от 0.01 до 4 на основе излагаемого метода, совпали с результатами работы [17]. В работе [8]

была построена зависимость силы электростатического отталкивания сферических частиц при заданном потенциале на их поверхностях от расстояния между этими поверхностями при $k = 0.12$ и значениях \tilde{h} от 1.5 до 15. На основе метода, разработанного в настоящей работе, была построена та же зависимость. Полученная кривая совпала с кривой, приведенной в работе [8]. Отметим, что при неизменных выделенных вычислительных ресурсах достижимая точность вычислений на основе всех решений, полученных с использованием подхода работы [6], падает с уменьшением k и \tilde{h} , а точность вычислений на основе метода, предложенного в настоящей работе, растет. В работе [18] с использованием бисферической системы координат на основе уравнения Лапласа получены выражения, позволяющие вычислять силы взаимодействия заряженных неэкранированных металлических шаров при заданных зарядах этих частиц. Эти выражения использовались для проведения тестовых расчетов при $k = 0$. При расчетах на основе выражений, полученных в [18], использовались значения зарядов, получаемые в процессе адаптации решетки. Расчеты, проведенные для частиц одинаковых радиусов, показали, что при $\tilde{h} = 20$ отличие между действующими на первую и вторую макрочастицы модулями сил, возникающее вследствие неточности вычислений, составило 0.17%, а между средней этих сил и силой, полученной на основе выражений работы [18], — 0.11%. А в случае, когда радиус второй частицы был в два раза меньше первой, эти разности составляли соответственно 0.016 и 0.008%. Для иллюстрации возрастания точности с уменьшением расстояния между поверхностями макрочастиц укажем, что для двух частиц равного радиуса при $\tilde{h} = 0.01$ отличие между значениями сил, полученными на основе предлагаемого метода и выражений работы [18] составило 0.0002%.

Таким образом, мы видим, что разработанный метод расчета вполне применим для нахождения сил электростатического отталкивания макрочастиц при не слишком больших расстояниях между их поверхностями и $k \leq 1$, а разность модулей сил, действующих на первую и вторую макрочастицы, может служить верхней границей возможной погрешности вычислений.

2. Исследование формы макрочастиц на силу их электростатического взаимодействия

Разработанный алгоритм расчета был применен для исследования взаимодействия частиц сфероидальной формы при разных значениях постоянной экранирования. На рис. 3 показаны зависимости сил, действующих на частицы сфероидальной формы, от минимального расстояния между их поверхностями при $k = 1$ и $R_1 = R_2$. Величины a_1 и a_2 в подписях к рисунку представляют собой соответственно для первой и второй макрочастицы расстояния от центра частицы

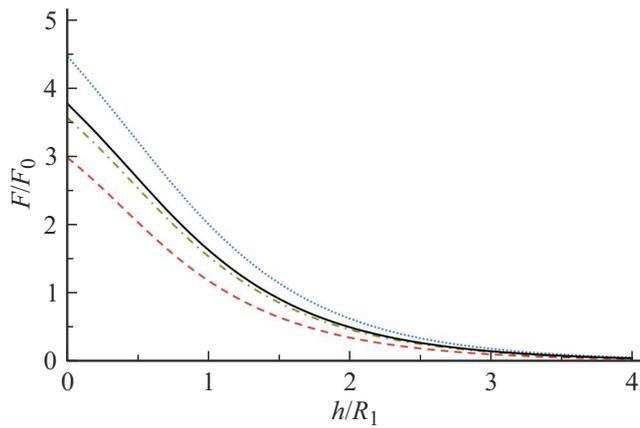


Рис. 3. Зависимости нормированной силы от нормированного расстояния между поверхностями частиц при $k = 1$ и $R_1 = R_2$: пунктирная линия — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 0.5$; сплошная — шары равного радиуса; штрихпунктирная линия — $a_1/R_1 = 2$, $a_2/R_2 = 0.5$; штриховая — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 2$.

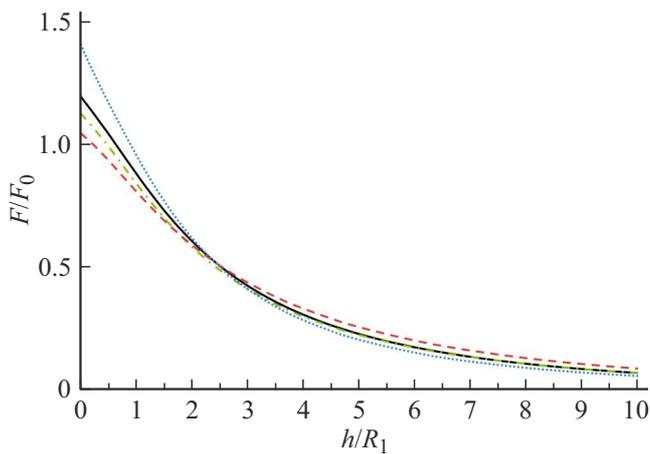


Рис. 4. Зависимости нормированной силы от нормированного расстояния между поверхностями частиц при $k = 0.1$ и $R_1 = R_2$: пунктирная линия — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 0.5$; сплошная — шары равного радиуса; штрихпунктирная линия — $a_1/R_1 = 2$, $a_2/R_2 = 0.5$; штриховая — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 2$.

до ее поверхности вдоль оси, соединяющей центры частиц. Из этого рисунка видно, что для частиц с одинаковым размером поперечного сечения и достаточной степени их экранирования уменьшение продольных размеров частиц приводит к увеличению их сил электростатического отталкивания, а увеличение этих размеров — к уменьшению этих сил. Однако, как видно из рис. 4, на котором приведены эти же зависимости, но при $k = 0.1$, если степень экранирования недостаточно велика, то такая зависимость силы от продольного размера частиц наблюдается лишь до некоторого расстояния между поверхностями макрочастиц. Сказанное дополнительно иллюстрируется рис. 5 и 6, из которых видно, что при достаточно боль-

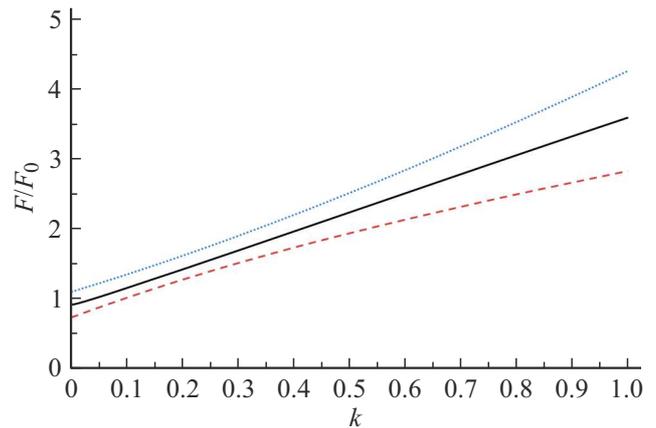


Рис. 5. Зависимости нормированной силы от нормированной постоянной экранирования при $h/R_1 = 0.1$ и $R_1 = R_2$: пунктирная линия — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 0.5$; сплошная — шары равного радиуса; штриховая — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 2$.

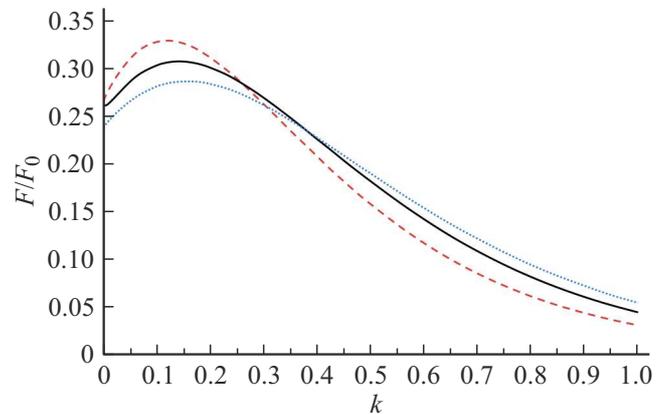


Рис. 6. Зависимости нормированной силы от нормированной постоянной экранирования при $h/R_1 = 4$ и $R_1 = R_2$: пунктирная линия — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 0.5$; сплошная — шары равного радиуса; штриховая — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 2$.

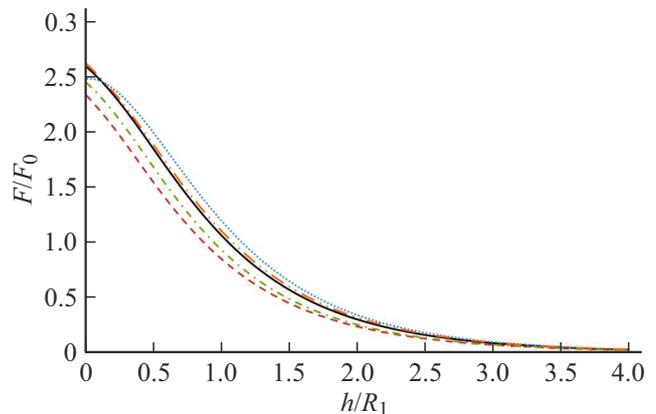


Рис. 7. Зависимости нормированной силы от нормированного расстояния между поверхностями частиц при $k = 1$ и $R_1 = 2R_2$: пунктирная линия — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 0.5$; длинный штрих — двойной пунктир — $a_1/R_1 = 0.5$, $a_2/R_2 = 2$; сплошная линия — шары; штрихпунктирная — $a_1/R_1 = 2$, $a_2/R_2 = 0.5$; штриховая — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 2$.

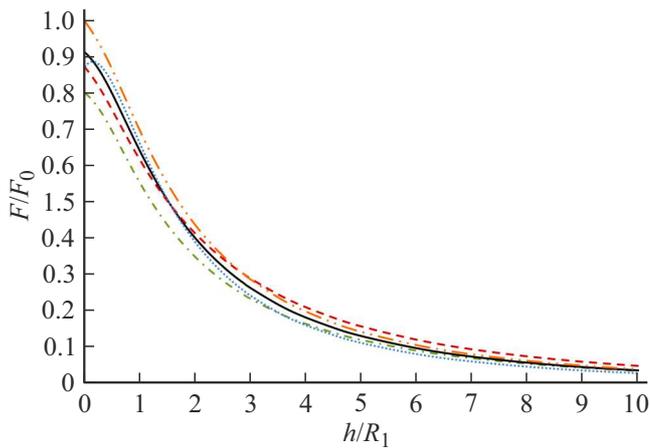


Рис. 8. Зависимости нормированной силы от нормированного расстояния между поверхностями частиц при $k = 0.1$ и $R_1 = 2R_2$: пунктирная линия — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 0.5$; длинный штрих — двойной пунктир — $a_1/R_1 = 0.5$, $a_2/R_2 = 2$; сплошная линия — шары; штрихпунктирная — $a_1/R_1 = 2$, $a_2/R_2 = 0.5$; штриховая — $a_1/R_1 = a_2/R_2 = 2$.

шом расстоянии между поверхностями макрочастиц в зависимости от степени экранирования сила взаимодействия макрочастиц может увеличиваться как при увеличении, так и уменьшении их продольных размеров. Более того, возможна ситуация, когда и увеличение и уменьшение продольных размеров частиц будет приводить к уменьшению силы взаимодействия между ними. Кроме того, как видно из рис. 7, 8, для частиц разных поперечных размеров эта же ситуация может возникать и при малых расстояниях между их поверхностями.

Заключение

Рассмотрено электростатическое взаимодействие двух заряженных макрочастиц сфероидальной формы с общей осью симметрии и постоянным потенциалом на их поверхностях в условиях слабого и умеренного экранирования. Расчеты показывают, что при достаточно большой степени экранирования и одинаковых поперечных размерах частиц при неизменном расстоянии между их поверхностями уменьшение их продольных размеров приводит к увеличению сил электростатического взаимодействия между ними. Однако если степень экранирования недостаточно велика или поперечные размеры частиц различны, то такой однозначной зависимости силы от поперечных размеров частиц нет. В этом случае при разной степени экранирования и отношения поперечных размеров макрочастиц на разных расстояниях характер зависимости силы взаимодействия между частицами от их продольных размеров может быть различным. При этом возможна ситуация, когда сила взаимодействия между макрочастицами сферической формы будет боль-

ше сил взаимодействия как частиц в форме сплюснутого сфероида, так и частиц в форме вытянутого сфероида.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] В.Е. Фортов, А.Г. Храпак, С.А. Храпак, В.И. Молотков, О.Ф. Петров. УФН, **174** (5), 495 (2004). DOI: 10.3367/UFNr.0174.200405b.0495 [V.E. Fortov, A.G. Khrapak, S.A. Khrapak, V.I. Molotkov, O.F. Petrov. Phys. Usp., **47** (5), 447 (2004). DOI: 10.1070/PU2004v047n05ABEH001689]
- [2] H. Ohshima. *Theory of Colloid and Interfacial Electric Phenomena* (Academic Press, San Diego, 2006)
- [3] G. Ecker. *Theory of Fully Ionized Plasmas* (Academic Press, NY, 2013)
- [4] P. Debye, E. Huckel. Phys. Zeitschr., **24** (9), 185 (1923).
- [5] J.N. Israelachvili. In: *Intermolecular and Surface Forces* (Elsevier Science, Netherlands, 2011)
- [6] S. Marčelja, D.J. Mitchell, B.W. Ninham, M.J. Sculley. J. Chem. Society, Faraday Transactions 2: Molecular Chem. Phys., **73** (5), 630 (1977). DOI: 10.1039/F29777300630
- [7] S.V. Siryk, A. Bendandi, A. Diaspro, W. Rocchia. J. Chem. Phys., **155** (11), 114114 (2021). DOI: 10.1063/5.0056120
- [8] I.N. Derbenev, A.V. Filippov, A.J. Stace, E. Besley. Soft Matter, **14** (26), 5480 (2018). DOI: 10.1039/c8sm01068d
- [9] Z. Chen. *Finite Element Methods and Their Applications*. (Springer, Berlin, Heidelberg, 2010)
- [10] J.N. Reddy, D.K. Gartling. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics* (CRC Press, Boca Raton, 2010)
- [11] И.Е. Иродов *Основные законы электромагнетизма. Учеб. пособие для студентов вузов. 2-е, стереотип.* (Высшая школа, М., 1991)
- [12] P. Solin, K. Segeth, I. Dolezel. *Higher-Order Finite Element Methods* (Chapman and Hall/CRC, NY., 2003)
- [13] S. Zaglmayr. *Phd Thesis* (Johannes Kepler University, Linz, 2006)
- [14] J. Schöberl. „C++11 Implementation of Finite Elements in NGSolve“, *ASC Report 30/2014, Institute for Analysis and Scientific Computing* (Vienna University of Technology, Vienna, 2014)
- [15] B. Lucquin, O. Pironneau. *Introduction to Scientific Computing* (Wiley, Chichester, 1998) DOI: 10.1023/A:1004355614429
- [16] С.И. Гращенко. Электронная обработка материалов, **57** (1), 37 (2021). DOI: 10.5281/zenodo.4455885 [S.I. Grashchenkov. Surf. Engin. Appl. Electrochem., **58** (1), 75 (2022). DOI: 10.3103/S1068375522010033]
- [17] А.В. Филиппов, И.Н. Дербенев, А.А. Паутов, М.М. Родин. ЖЭТФ, **152** (3), 607 (2017). DOI: 10.7868/S0044451017090176 [A.V. Filippov, I.N. Derbenev, A.A. Pautov, M.M. Rodin. J. Experiment. Theor. Phys., **125** (3), 518 (2017). DOI: 10.1134/S1063776117080040]
- [18] С.И. Гращенко. ЖТФ, **81** (7), 13 (2011). [S.I. Grashchenkov. Tech. Phys., **56** (7), 914 (2011). DOI: 10.1134/S1063784211070115]