12.4

Точное двумерное решение для токового сжатия тонкой осесимметричной оболочки и формирование перетяжки в X-пинче

© *Н.М. Зубарев* [1,2], *С.А. Чайковский* [1]

[1] Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
[2] Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия
E-mail: nick@iep.uran.ru

Поступило в Редакцию 26 августа 2022 г.
В окончательной редакции 13 сентября 2022 г.
Принято к публикации 13 сентября 2022 г.

Построены точные двумерные решения, описывающие динамику токового сжатия полой оболочки, представляющей собой однополостный гиперболоид вращения. Решения применимы для интерпретации результатов экспериментов по формированию перетяжек в X-пинчах. В частности, они позволяют связать основные параметры задачи: аксиальный масштаб перетяжки, время ее формирования, геометрические характеристики системы.

Ключевые слова: X-пинч, перетяжка, модель тонкой оболочки.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.21.53706.19349

„Горячая точка" X-пинча является мощным источником рентгеновского излучения [1]. В исходном состоянии X-пинч представляет собой две или более скрещенные тонкие проволочки (рис. 1). При пропускании импульса тока амплитудой от десятков килоампер до мегаампер в области перекрестия формируется плотная высокотемпературная плазма, являющаяся источником рентгеновского излучения. Малые размеры „горячей точки" (единицы микрометров) и малая длительность импульса излучения (единицы наносекунд) привлекательны для реализации импульсного зондирования в мягком рентгеновском диапазоне спектра [2]. По сравнению с другими методами создания микроисточников мягкого рентгеновского излучения (например, с помощью фемтосекундных лазеров [3]) X-пинч обладает преимуществами, заключающимися в сравнительной простоте драйвера и эффективности генерации излучения. В динамике X-пинча можно выделить четыре стадии: электрический взрыв проволочек, разлет плазмы и формирование перетяжки, имплозия перетяжки и формирование „горячей точки". Первая и четвертая стадии по времени занимают до единиц наносекунд при полной длительности процесса в сотни наносекунд. В работе [4] развита модель формирования и имплозии перетяжки, опирающаяся на предположение о независимости длины перетяжки от других параметров, которое удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. Вместе с тем причины постоянства длины перетяжки остаются не совсем ясными.

Спецификой динамики X-пинча является ее принципиальная неодномерность: плазма может истекать из области перетяжки в аксиальном направлении. Поскольку масштаб перетяжки значительно (более чем на порядок) превышает диаметр проволочек, можно рассматривать ее формирование в рамках двумерной модели тонкой полой оболочки типа модели Отта [5,6] (см. также родственную модель [7]). Цель настоящей работы — построение точных двумерных решений, описывающих токовое сжатие тонкой осесимметричной оболочки, и их использование для интерпретации результатов экспериментов с X-пинчами.

Зададим геометрию оболочки (она схематически показана на рис. 1) парой функций, определяющих ее радиус и продольную координату: $r = R(\xi, t)$ и $z = Z(\xi, t)$. Здесь ξ — лагранжева координата, которую удобно выбрать так, чтобы она определяла распределение массы по оболочке: $\xi = \int_0^z \rho_l(z, t)dz$ (ρ_l — линейная плотность, или погонная масса). Движение кольцеобразного элемента оболочки массой $\Delta\xi$ с радиальным и аксиальным размерами ΔR и ΔZ под действием внешнего давления P описывается ньютоновскими уравнениями

$$\Delta\xi \frac{d^2R}{dt^2} = -\Delta s P \cos\alpha, \quad \Delta\xi \frac{d^2Z}{dt^2} = \Delta s P \sin\alpha,$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}(\Delta R/\Delta Z)$ — угол наклона элемента поверхности к оси z, $\Delta s = 2\pi R \Delta Z \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$ — площадь его поверхности. Магнитное давление при протекании по оболочке электрического тока I есть $P = \mu_0 I^2/(8\pi^2 R^2)$, где μ_0 — магнитная постоянная. В условиях X-пинча [4] формирование перетяжки, как правило, происходит на фронте импульса тока, когда можно считать $I \propto t$. Получим после перехода к частным производным

$$\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = -\frac{Ct^2}{R}\frac{\partial Z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{Ct^2}{R}\frac{\partial R}{\partial \xi}, \tag{1}$$

где $C = \mu_0 (dI/dt)^2/4\pi$ — константа. Модель (1) является обобщением модели Отта [5,6].

Нетривиальное семейство частных решений модели (1) может быть найдено разделением переменных.

Осуществим подстановку $R = f(t)F(\xi)$ и $Z = g(t)G(\xi)$, где f, g, F, G — неизвестные функции. Получим четыре связанных через вспомогательные константы s и q уравнения. Первая пара — относительно переменной t, а вторая пара — относительно ξ:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -Cst^2\frac{g}{f}, \quad \frac{d^2 g}{dt^2} = Cqt^2, \tag{2}$$

$$\frac{dF}{d\xi} = qFG, \quad \frac{dG}{d\xi} = sF^2. \tag{3}$$

Решение дифференциальных уравнений (3) дает в интервале $|\xi\sqrt{hq}| < \pi/2$

$$F = \sqrt{h/s}\cos^{-1}(\xi\sqrt{hq}), \quad G = \sqrt{h/q}\,\mathrm{tg}(\xi\sqrt{hq}), \tag{4}$$

где h — постоянная интегрирования (считаем, что $s > 0$, $q > 0$, $h > 0$). Исключая из (4) лагранжеву координату ξ, находим, что оболочка представляет собой однополостный гиперболоид вращения (рис. 1) с меняющимися со временем параметрами:

$$\left(\frac{r}{R_{\min}(t)}\right)^2 - \left(\frac{z\,\mathrm{tg}\,\alpha_0\rho_{\max}(t)}{R_0\rho_0}\right)^2 = 1. \tag{5}$$

Близость гиперболоидальной оболочки к геометрии X-пинча позволит нам в дальнейшем использовать получаемые решения для описания формирования перетяжек. Решению соответствует следующее распределение линейной плотности вдоль z:

$$\rho_l \equiv \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)^{-1} = \frac{R_0^2\rho_0^2\rho_{\max}(t)}{R_0^2\rho_0^2 + \mathrm{tg}^2\,\alpha_0\rho_{\max}^2(t)z^2}. \tag{6}$$

В выражениях (5), (6) введены обозначения: $R_{\min}(t) = f(t)\sqrt{h/s}$ — радиус оболочки в плоскости сечения $z = 0$, где он минимален, а $R_0 = R_{\min}(0)$ — его начальное значение; $\rho_{\max}(t) = 1/(hg(t))$ — линейная плотность в плоскости сечения, где она максимальна, а $\rho_0 = \rho_{\max}(0)$; $\alpha_0 = \mathrm{arctg}(\sqrt{qh}R_0\rho_0)$ — начальный угол наклона оболочки к оси z при $|z| \to \infty$ (геометрические параметры R_0 и α_0 проиллюстрированы на рис. 1). Распределение линейной плотности (6) имеет колоколообразную форму. Ширину распределения (аксиальный размер области, в которой $\rho_l > k\rho_{\max}$; k — коэффициент, который мы примем равным 0.8) характеризует комбинация

$$L(t) = 2\sqrt{k^{-1} - 1}R_0\rho_0/(\mathrm{tg}\,\alpha_0\rho_{\max}(t)). \tag{7}$$

Рассмотрим теперь уравнения (2). Их удобно переписать через функции $R_{\min}$ и $\rho_{\max}$:

$$\frac{d^2R_{\min}}{dt^2} = -\frac{Ct^2}{R_{\min}\rho_{\max}},$$

$$\frac{d^2\rho_{\max}^{-1}}{dt^2} = \frac{Ct^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha_0}{R_0^2\rho_0^2}. \tag{8}$$

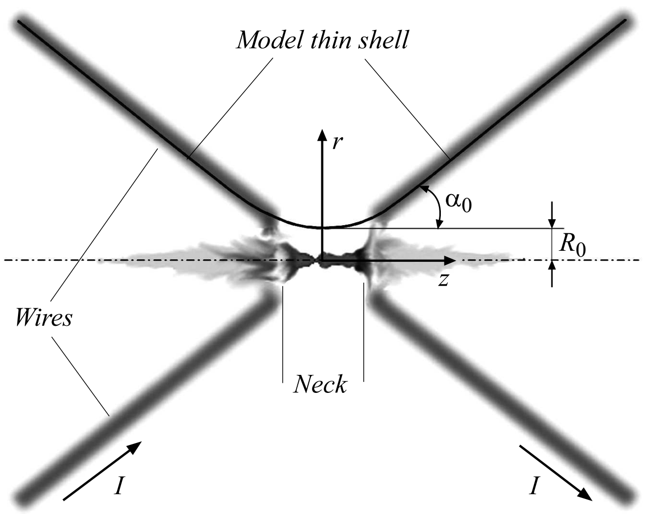

Рис. 1. Схематическое изображение плазмы X-пинча в момент генерации импульса излучения и модельная форма тонкой оболочки. Обозначения пояснены в тексте.

Начальные условия: $R_{\min}|_{t=0} = R_0$, $\rho_{\max}^{-1}|_{t=0} = \rho_0^{-1}$, $(dR_{\min}/dt)|_{t=0} = (d\rho_{\max}^{-1}/dt)|_{t=0} = 0$. При $\alpha_0 = 0$ задача сводится к тривиальному случаю одномерного сжатия цилиндрической оболочки (геометрия Z-пинча). Второе уравнение системы (8) легко интегрируется. Находим

$$\rho_{\max}^{-1}(t) = \rho_0^{-1} + Ct^4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha_0/(12R_0^2\rho_0^2).$$

Отсюда видно, что линейная плотность в сечении $z = 0$ падает со временем вследствие вытеснения массы из области формирующейся перетяжки. В итоге система (8) сводится к единственному уравнению с начальными условиями $x|_{\tau=0} = 1$ и $(dx/d\tau)|_{\tau=0} = 0$:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{\tau^2}{x}\left(1 + \frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha_0}{12}\tau^4\right), \tag{9}$$

где мы вели безразмерные переменные $x = R_{\min}/R_0$ и $\tau = t/(R_0^2\rho_0C^{-1})^{1/4}$. Согласно (9), радиус перетяжки уменьшается до нуля за конечное время τ_c (см. вставку на рис. 2): происходит коллапс оболочки. Рассчитанная зависимость τ_c от угла α_0 показана на рис. 2. В одномерном случае ($\alpha_0 = 0$) время максимально и составляет $\tau_0 \approx 1.728$. С ростом α_0 оно монотонно падает, что объясняется более эффективным вытеснением массы из области перетяжки. Справедлива аппроксимация

$$\tau_c(\alpha_0) \approx \tau_0(1 + 0.08\alpha_0^2 + 0.009\alpha_0^4)\cos^{1/4}\alpha_0,$$

$$0 \leqslant \alpha_0 < \pi/2. \tag{10}$$

Согласно полученному решению, к моменту $T_c = (R_0^2\rho_0/C)^{1/4}\tau_c(\alpha_0)$ происходит радиальный коллапс оболочки на всем ее протяжении. Имеем $R|_{t=T_c} = 0$ при любом ξ при том, что исходно (при $t = 0$) радиус оболочки тем больше, чем больше расстояние $|z|$. Это связано с неоднородностью распределения линейной

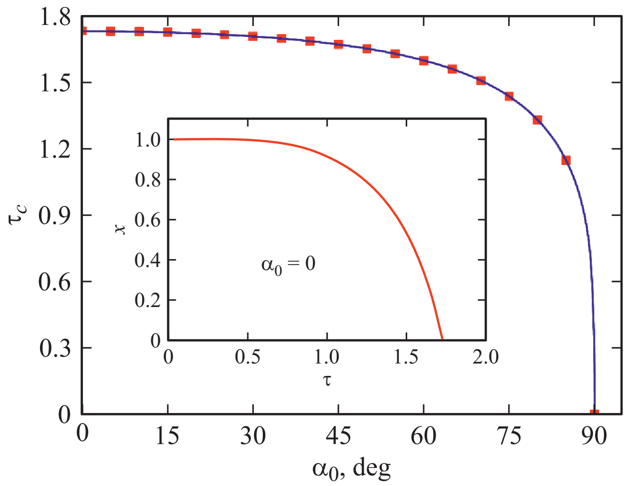

Рис. 2. Зависимость безразмерного времени коллапса τ_c от угла α_0. Точки — расчет, линия — аппроксимация (10). На вставке — динамика радиуса перетяжки при $\alpha_0 = 0$.

плотности (6). Она спадает на периферии как $1/z^2$, что позволяет легким „крыльям" оболочки сколлапсировать за то же время, что и тяжелая, но близкая к оси z область оболочки вблизи сечения $z = 0$.

Рассмотрим, каким образом можно использовать полученные результаты применительно к задаче о формировании перетяжки в X-пинче. Понятно, что для пинча характерно исходно равномерное распределение линейной плотности: в момент $t = 0$ можно взять $\rho_l = N\rho_w/\cos\alpha_0 = \text{const}$, где ρ_w — погонная масса одной проволочки, N — их число, α_0 — угол наклона (мы отождествляем его с углом гиперболоидальной оболочки). В такой ситуации коллапс будет происходить не одновременно по всей оси системы, а лишь в „узком" месте, где скрещиваются проволочки. Зададимся вопросом, что произойдет с полученными выше решениями, если при прочих равных взять исходно однородное распределение линейной плотности: $\rho_l(z, 0) = \rho_0$. Ответ очевиден: утяжеленные „крылья" не смогут сколлапсировать за время T_c. Сколлапсирует лишь оболочка в окрестности сечения $z = 0$, в которой линейная плотность (6) была близка к ρ_0. Соответствующий масштаб определяется шириной (7) распределения линейной плотности, т. е. экспериментальное значение длины перетяжки L_{exp} можно отождествить с величиной $L_c = L(T_c)$:

$$L_c = l_c R_0, \quad l_c = \frac{2\sqrt{k^{-1} - 1}}{\operatorname{tg}\alpha_0}\left(1 + \frac{\tau_c^4(\alpha_0)\operatorname{tg}^2\alpha_0}{12}\right). \quad (11)$$

На рис. 3 показана зависимость безразмерной длины перетяжки $l_c \equiv L_c/R_0$ от угла α_0. Она немонотонная. Предел $\alpha_0 \to 0$ соответствует одномерному случаю — коллапсу цилиндрической оболочки; как следствие, в нем $L_c \to \infty$. При $\alpha_0 \approx 62^\circ$ достигается минимум: $L_{\min} \approx 1.51R_0$. Далее с ростом α_0 длина перетяжки начинает увеличиваться, достигая значения в $1.83R_0$ при $\alpha_0 = 90^\circ$. Расширение области перетяжки при больших α_0 можно связать с аксиальным вытеснением массы. Отметим, что для характерного для экспериментов [4] угла $\alpha_0 = 32^\circ$ будет $L_c \approx 2.04R_0$.

Время формирования перетяжки применительно к X-пинчу находится подстановкой $\rho_0 = N\rho_w/\cos\alpha_0$. Получим $T_c = (R_0^2 N\rho_w/C\cos\alpha_0)^{1/4}\tau_c(\alpha_0)$. Исключая при помощи (11) величину R_0, находим связь между основными параметрами задачи:

$$\frac{\mu_0 T_c^4}{4\pi N\rho_w L_c^2}\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 \approx \frac{\mu_0 T_{exp}^2 I_{exp}^2}{64\pi N\rho_w L_{exp}^2} \approx \frac{\tau_c^4(\alpha_0)}{l_c^2(\alpha_0)\cos\alpha_0}. \quad (12)$$

Здесь мы учли, что в экспериментах регистрируются длина L_{exp}, момент генерации импульса рентгеновского излучения T_{exp} и соответствующий ему ток $I_{exp} \approx (dI/dt)T_{exp}$. По оценкам [4] можно считать $T_{exp} \approx 2T_c$ (длительности процессов формирования перетяжки и ее последующего сжатия с образованием „горячей точки" сопоставимы). Отметим, что для $\alpha_0 = 32^\circ$ значение правой части (12) составляет ~ 2.38.

Анализ экспериментальных данных [4] показывает, что связь (12) с приемлемой точностью выполняется для широкого диапазона параметров ($I_{exp} \approx 70-200$ kA, $T_{exp} \approx 60-220$ ns, $\rho_0 \approx 30-550\,\mu$g/cm). Как и в [4], зависимость длины перетяжки от линейной плотности достаточно слабая: при увеличении массы в 20 раз длина перетяжки растет лишь в 2 раза. В отличие от модели [4], где длина перетяжки являлась внешним параметром, в нашей модели она вычислялась и, как оказалось, связана с радиусом R_0 соотношением $L_c = (1.5-2.1)R_0$ при экспериментально реализуемых углах α_0. В экспериментах радиус R_0 является радиусом, на котором прекращается радиальный разлет плазмы и начинается ее сжатие [8]. Слабость зависимости R_0 от параметров пинча изначально неочевидна и будет являться предметом дальнейших исследований, в том числе с помощью магнитогидродинамического моделирования.

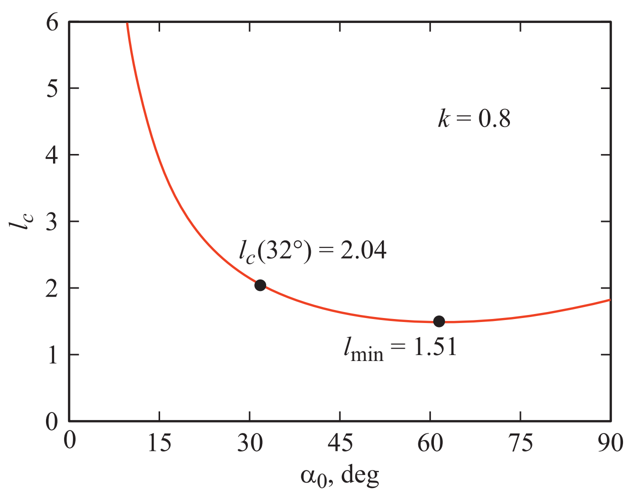

Рис. 3. Зависимость безразмерной длины перетяжки l_c от угла α_0 для $k = 0.8$.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] С.М. Захаров, Г.В. Иваненков, А.А. Коломенский, С.А. Пикуз, А.И. Самохин, И. Улшмид, Письма в ЖТФ, **8** (9), 1060 (1982). [S.M. Zakharov, G.V. Ivanenkov, A.A. Kolomenskii, S.A. Pikuz, A.I. Samokhin, I. Ulshmid, Sov. Tech. Phys. Lett., **8**, 456 (1982).].

[2] Г.А. Месяц, Т.А. Шелковенко, Г.В. Иваненков, А.В. Агафонов, С.Ю. Савинов, С.А. Пикуз, И.И. Тиликин, С.И. Ткаченко, С.А. Чайковский, И.А. Ратахин, В.Ф. Федущак, В.И. Орешкин, А.В. Федюнин, А.Г. Русских, И.А. Лабецкая, А.П. Артемов, Д.А. Хаммер, Д.Б. Синарс, ЖЭТФ, **138** (3), 411 (2010). http://www.jetp.ras.ru/cgi-bin/r/index/r/138/3/p411?a=list [G.A. Mesyats, T.A. Shelkovenko, G.V. Ivanenkov, A.V. Agafonov, S.Yu. Savinov, S.A. Pikuz, I.N. Tilikin, S.I. Tkachenko, S.A. Chaikovskii, N.A. Ratakhin, V.F. Fedushchak, V.I. Oreshkin, A.V. Fedyunin, A.G. Russkikh, N.A. Labetskaya, A.P. Artemov, D.A. Hammer, D.B. Sinars, JETP, **111** (3), 363 (2010). DOI: 10.1134/S1063776110090049].

[3] М.А. Алхимова, С.Н. Рязанцев, И.Ю. Скобелев, М.Д. Мищенко, А.С. Болдарев, J. Feng, X. Lu, L.-M. Chen, С.А. Пикуз, Письма в ЖТФ, **46** (6), 23 (2020). DOI: 10.21883/PJTF.2020.06.49160.18090 [M.A. Alkhimova, S.N. Ryazantsev, I.Yu. Skobelev, M.D. Mishchenko, A.S. Boldarev, J. Feng, X. Lu, L.-M. Chen, S.A. Pikuz, Tech. Phys. Lett., **46**, 275 (2020). DOI: 10.1134/S1063785020030177].

[4] V.I. Oreshkin, S.A. Chaikovsky, A.P. Artyomov, N.A. Labetskaya, A.V. Fedunin, A.G. Rousskikh, A.S. Zhigalin, Phys. Plasmas., **21** (10), 102711 (2014). DOI: 10.1063/1.4900644

[5] E. Ott, Phys. Rev. Lett., **29** (21), 1429 (1972). DOI: 10.1103/PhysRevLett.29.1429

[6] S.V. Bulanov, F. Pegoraro, J.-I. Sakai, Phys. Rev. E, **59** (2), 2292 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevE.59.2292

[7] Н.М. Зубарев, Е.А. Карабут, Письма в ЖЭТФ, **107** (7), 434 (2018). DOI: 10.7868/S0370274X18070056 [N.M. Zubarev, E.A. Karabut, JETP Lett., **107** (7), 412 (2018). DOI: 10.1134/S0021364018070135].

[8] A.P. Artyomov, S.A. Chaikovsky, A.V. Fedunin, N.A. Labetskaya, A.G. Rousskikh, A.S. Zhigalin, V.I. Oreshkin, J. Phys.: Conf. Ser., **552** (1), 012013 (2014). DOI: 10.1088/1742-6596/552/1/012011