

03

Объемные интегродифференциальные уравнения в задачах дифракции и в задачах о собственных значениях (обзор)

© М.В. Давидович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия

e-mail: Davidovichmv@info.sgu.ru

Поступила в редакцию 05.02.2022 г.

В окончательной редакции 26.06.2022 г.

Принята к публикации 04.07.2022 г.

Рассмотрены объемные интегральные и интегродифференциальные уравнения, описывающие задачи дифракции на трехмерных телах с заданными макроскопическими диэлектрической и магнитной проницаемостями, а также задачи о свободных колебаниях таких тел. Получены аналогичные уравнения для волноведущих структур: полых экранированных волноводов с диэлектрическим заполнением, диэлектрических волноводов (оптических лучеводов), фотонно-кристаллических волноводов. В основном рассмотрены стационарные линейные электромагнитные задачи. Нестационарные и нелинейные задачи упомянуты вскользь. Приведены численные результаты для колебаний H_{018} и H_{011} цилиндрического диэлектрического резонатора, для волн прямоугольного диэлектрического волновода и плазмонного волновода, дисперсии в фотонном кристалле, дифракции на прямоугольном диэлектрическом цилиндре.

Ключевые слова: дифракция, резонаторы, волноводы, объемные интегральные уравнения.

DOI: 10.21883/OS.2022.10.53622.3231-22

1. Введение

Объемные интегральные уравнения (ОИУ) основаны на представлении полей внутри объемов тел. Они использовались в основном для структур с диэлектрическими включениями в задачах электродинамики и оптики [1–27]. Впервые, по-видимому, они были введены еще в работе [1]. Принцип их получения весьма прост: любое тело, имеющее электрический и/или магнитный отклик на воздействие поля, описывается его токами поляризации так, как будто они расположены в вакууме в объеме, занятом телом [28]. Это позволяет применять для формулировок ОИУ аппарат вакуумных тензорных функций Грина (ФГ), которые явно известны для свободного пространства [28] и для некоторых простых экранированных областей с электрическими и магнитными стенками: полых прямоугольных и круглых цилиндрических волноводов и резонаторов, сферического резонатора и ряда других. Диэлектрические тела в вакууме и в указанных структурах описываются ОИУ. Использование импедансных экранов усложняет задачи, приводя к комбинированным объемно-поверхностным интегральным уравнениям (ИУ), которые мы здесь детально не рассматриваем. Поскольку металлы хорошо описываются диэлектрической проницаемостью (ДП) модели Друде-Лоренца $\epsilon_m(\omega, \mathbf{r}) = \epsilon_L(\omega, \mathbf{r}) - \omega_p^2/(\omega^2 - i\omega\omega_c)$, в которой член Лоренца ϵ_L почти постоянный и действительный вплоть до плазменной частоты ω_p , то ОИУ описывают малые металлические частицы и плазмоны в них, включая локализованные плазмоны. Для описания поля в металле

один или все размеры должны быть сравнимы с глубиной проникновения, иначе металлическое тело следует рассматривать как импедансную поверхность с заданным поверхностным импедансом. В последнее время возникают электродинамические и оптические задачи для тел из метаматериалов с эффективными (полученными гомогенизацией) материальными параметрами [16–18,29]. Такие метаматериалы могут быть киральными, биизотропными и бианизотропными с электрическим и магнитным откликами. В той области частот, где гомогенизация выполнена корректно, а пространственной дисперсией можно пренебречь, телам из метаматериалов также можно сопоставить ОИУ в частотной области. Заметим, что тела их фотонных кристаллов (ФК) в оптике принципиально могут быть описаны только тензорной ДП с учетом пространственной дисперсии. Тогда применение ОИУ возможно только в той частотной области, где пространственной дисперсией можно пренебречь. Наконец, ОИУ можно сформулировать в пространственно-временной области [14,23]. Такие нестационарные ОИУ в последнее время получают все более широкое применение. Указанная широкая область возможных применений ОИУ недостаточно отражена в публикациях, в которых в основном рассмотрены задачи дифракции на диэлектрических телах. Одной из целей обзора является раскрытие возможностей метода ОИУ.

Хотя к настоящему времени появился значительный ряд коммерческих пакетов программ, основанных на конечно-разностных (сеточных) методах в пространственно-частотной (FDFD) и пространственно-

временной областях (FDTD), проекционных методах типа метода моментов (MoM), вариационных методах типа метода конечных элементов (FEM) и на ряде других подходов к решению уравнений Максвелла, позволяющих анализировать рассматриваемые в обзоре структуры, ОИУ находят все больше применений в электродинамике, оптике и в других областях. Преимущества ОИУ особенно проявляются для открытых краевых задач и аналогичных им задач с бесконечно удаленными границами, для неоднородных, нелинейных, анизотропных и бианизотропных структур, где с коммерческими пакетами работать не очень удобно или даже невозможно. Особенно преимущества ОИУ проявляются для тел малых электрических размеров (электрический размер тела определяется числом длин волн внутри него). Это, например, характерно для локализованных плазмонов в металлических наночастицах, для плазмонных и магнитоплазмонных волноводов. Примером преимущества моделирования методом ОИУ может служить разреженный ФК из диэлектрических включений, когда область включений мала по сравнению со всей областью — ячейкой периодичности. Если ФК состоит из диэлектрической основы, в которую периодически внедрены объекты (метаатомы), то для моделирования дисперсии следует использовать ФГ безграничного пространства с ДП основы. Для открытых задач область внутри тел обычно конечная, а область решения бесконечная, что создает трудности для ряда методов, например метода сеток или метода конечных разностей (МКР), МКЭ. Для таких задач метод ОИУ дает решения с выполнением условия излучения, т. е. корректно представляет поля в дальней зоне. Решение ОИУ на основе дискретизации с использованием объемных конечных элементов (КЭ) позволяет на порядки снизить математическую размерность задач (число узлов, число КЭ или базисных функций) по сравнению с сеточными методами и методами типа КЭ, построенных на основе дифференциальных уравнений Максвелла. Далее под размерностью задачи будем понимать размерность матрицы при дискретизации. Правда, МКР и МКЭ проводят к разреженным матрицам, тогда как МКЭ дает всюду плотные матрицы. Но это небольшая плата за его преимущества, тем более что решаются такие задачи обычно итерационно. В принципе подход на основе метода ОИУ с использованием объемных КЭ позволяет реализовывать достаточно универсальные программные комплексы, но это, по видимому, область будущих реализаций коммерческих пакетов программ электродинамического моделирования. Подобные работы ведутся. Удобством метода ОИУ является и то, что на его основе легко формулируются билинейные и квадратичные функционалы, нахождение стационарных значений которых позволяет определять поля или интегральные параметры задач, например частоты диэлектрических резонаторов (ДР), коэффициенты отражения, сечения рассеяния, диаграммы направленности. На основе решения ОИУ удобно производить гомогенизацию для ФК и метаматериалов [16–18], что

делать с использованием коммерческих пакетов затруднительно.

В настоящем обзоре мы рассматриваем в основном трехмерные открытые и экранированные краевые задачи с проникновением поля в объем, которые формулируются как задачи дифракции или как задачи о собственных значениях. Как частный случай рассмотрена двумерная задача о свободных волнах волновода. Трехмерные задачи о дифракции волн на импедансных и идеальных поверхностях (поверхностные интегральные уравнения), а также задачи дифракции на объемных и иных неоднородностях в волноводах не рассматриваются и упомянуты вскользь. Для этих задач разработано множество методов, включая теорию возбуждения волноводов [28,30,31], особенно в случаях, когда спектр собственных волн известен. Термином ОИУ мы в общем случае обозначаем и объемные интегродифференциальные уравнения (ИДУ). По поводу определения того, какие уравнения следует относить к ИДУ, есть разногласия. Часто к ИДУ относят гиперсингулярные ИУ, когда на интеграл (т. е. на ядро) действует оператор $\nabla \otimes \nabla = \text{grad}(\text{div})$. Мы же ИДУ будем называть уравнения, в которых на искомую функцию действует как интегральный, так и дифференциальный операторы, причем последний может действовать как на функцию под интегралом, так и на внеинтегральный член с ней. Последний случай сводится к первому формальным введением дельта-особенности в ядро.

2. Интегральные и интегродифференциальные уравнения

Произвольное тело объема V , ограниченное поверхностью S в свободном пространстве, описываемое частотной макроскопической ДП $\varepsilon(\omega, \mathbf{r})$, эквивалентно действию плотности электрического тока поляризации $\mathbf{J}_\varepsilon^p(\omega, \mathbf{r}) = \partial_i \mathbf{P}_\varepsilon = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) - 1)\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$, где $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$ — поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла. Именно $\nabla \times \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}(\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) + \mathbf{J}_\varepsilon^p(\omega, \mathbf{r}) + \mathbf{J}_0(\omega, \mathbf{r})$, где $\mathbf{J}_0(\omega, \mathbf{r})$ — сторонние источники (плотность стороннего тока), создающие поле. Второе уравнение Максвелла имеет стандартный вид. В него следует вводить источники, если тело имеет отклик в виде магнитной поляризации. Далее слово „плотность“ опускаем и пишем просто „ток“. При отсутствии тела $\mathbf{J}_\varepsilon^p \equiv 0$, и \mathbf{L}_0 определяют стороннее поле $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, которое удобно добавлять к возбужденному телом полю. В частности, когда источники находятся на бесконечности, это поле плоской волны. Тело может быть односвязным и многосвязным. Если тело имеет магнитные свойства, то в другое уравнение Максвелла также добавляется магнитный ток поляризации $\mathbf{L}_\mu^p(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\mu_0(\mu(\omega, \mathbf{r}) - 1)\mathbf{H}(\omega, \mathbf{r})$. Удобство рассмотрения состоит в том, что эти источники локализованы в теле, которое может быть неоднородным и анизотропным. Если тело анизотропное, то следует взять тензорные величины для ДП и магнитной

проницаемости (МП):

$$\mathbf{J}_\varepsilon^p(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0(\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}) - \hat{I})\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{J}_\mu^p(\omega, \mathbf{r}) = i\omega\mu_0(\hat{\mu}(\omega, \mathbf{r}) - \hat{I})\mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}).$$

Далее везде \hat{I} — единичный тензор. Более того, можно рассматривать бианизотропное тело. Для него имеют место электрическая поляризация

$$\mathbf{P}_\varepsilon = \varepsilon_0\hat{\chi}_\varepsilon(\omega, \mathbf{r})\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) + c^{-1}\hat{\xi}(\omega, \mathbf{r})\mathbf{H}(\omega, \mathbf{r})$$

и магнитная поляризация

$$\mathbf{P}_\mu = \mu_0\mathbf{M} = \mu_0\hat{\chi}_\mu(\omega, \mathbf{r})\mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) + c^{-1}\hat{\xi}(\omega, \mathbf{r})\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}).$$

Здесь \mathbf{M} — вектор намагниченности. Соответственно введенные токи поляризации выражаются через восприимчивости

$$\hat{\chi}_\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) = \hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r}) - \hat{I}, \quad \hat{\chi}_\mu(\omega, \mathbf{r}) = \hat{\mu}(\omega, \mathbf{r}) - \hat{I}$$

и дополнительно через тензоры кросс-поляризации $\hat{\xi}$ и $\hat{\zeta}$, если имеет место бианизотропия. Бианизотропия требует рассмотрения двух ИДУ, как и простой учет электрических и магнитных свойств. Кросс-поляризация приводит к дополнительным членам, не влияющим на идею алгоритмизации. Ее рассматривать не будем. Поле поляризации (решение однородных уравнений) запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^p(\mathbf{r}) = ik_0 \int_V [\hat{D}G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')\hat{\chi}'^\varepsilon(\mathbf{r}')\mathbf{E}^p(\mathbf{r}') \\ - \eta_0\nabla \times G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')\hat{\chi}'^\mu(\mathbf{r}')\mathbf{H}^p(\mathbf{r}')]d^3r', \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^p(\mathbf{r}) = ik_0 \int_V [\hat{D}G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')\hat{\chi}'^\mu(\mathbf{r}')\mathbf{H}^p(\mathbf{r}') \\ + \eta_0^{-1}\nabla \times G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')\hat{\chi}'^\varepsilon(\mathbf{r}')\mathbf{E}^p(\mathbf{r}')]d^3r'. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введены дифференциальные операторы $\hat{D} = -i(\nabla \otimes \nabla + k^2\hat{I})/k$, $\nabla \otimes \nabla = \nabla\nabla$, матрица $\nabla \otimes \nabla$ имеет компоненты $\partial_\alpha\partial_\beta$, $\alpha, \beta = x, y, z$, $k = k_0\sqrt{\hat{\varepsilon}}$, обозначена скалярная ФГ $G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = (4\pi R)^{-1} \exp(-ikR)$, $\hat{\chi}'^\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\mathbf{r}')/\hat{\varepsilon} - \hat{I}$, $k_0 = \omega/c$, $R = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ — расстояние между точкой истока и наблюдения. Для неоднородных структур с границами ФГ зависят от этих точек по отдельности. В общем случае рассматриваем тела в однородной безграничной среде без дисперсии (основе) с ДП $\hat{\varepsilon}$. Поэтому вместо $\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r})$ следует брать $\hat{\varepsilon}(\omega, \mathbf{r})/\hat{\varepsilon}$. Для тел в вакууме $G \equiv G_0(k_0, \mathbf{r}) = |4\pi\mathbf{r}|^{-1} \exp(-ik_0|\mathbf{r}|)$. Уравнения (1), (2) описывают однородные задачи, например задачи о свободных (собственных) колебаниях ДР. Для неоднородных задач (задач дифракции) к этим полям следует добавить поля источников:

$$\mathbf{E}^0(\mathbf{r}) = \int_{V_0} \hat{D}G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{J}^0(\mathbf{r}')d^3r', \quad (3)$$

$$\mathbf{H}^0(\mathbf{r}) = \int_{V_0} \nabla \times G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{J}^0(\mathbf{r}')d^3r'. \quad (4)$$

Здесь V_0 — объем, занятый источниками поля. В качестве простейших источников можно брать точечные диполи. Источники на бесконечности создают плоские волны, и возникает задача дифракции плоских волн на теле. Теперь полные поля есть суперпозиции

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) + \hat{K}_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad (5)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{H}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + \hat{K}_\mu(\mathbf{r}, \mathbf{E}, \mathbf{H}), \quad (6)$$

где верхними шляпками обозначены интегральные операторы. Именно эти полные поля следует использовать для вычисления токов поляризации, т.е. подставлять под интегралы.

Уравнения (5), (6) принадлежат к сингулярным уравнениям типа Липпмана-Швингера [32]. В исходной формулировке (1), (2) их ядра имеют неинтегрируемые особенности типа $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3}$, что делает невозможным применение кусочно-постоянных функций (или простых квадратурных формул) для их непосредственного численного решения. Часто такие ИУ называют гиперсингулярными. Интегралы типа (1), (2) в обычном смысле расходятся, поэтому следует использовать специальные пространства базисных и весовых функций, а результат понимать в обобщенном смысле как распределение (обобщенную функцию) [33–37]. Расходящиеся в обычном смысле интегралы в таких сингулярных ИУ следует понимать в смысле главного значения по Коши [38,39], а их расходимость в обычном смысле связана с тем, что соответствующий интегральный оператор хотя и ограничен, но не вполне непрерывен [8,35–39]. Физически сингулярность связана с ФГ точечного источника, имеющей особенность $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$. Ее двойное дифференцирование при определении полей и приводит к максимальной особенности $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-3}$. Чтобы избежать такого дифференцирования, удобно переформулировать уравнения, в частности формулировать ОИУ для электродинамических потенциалов [40]. Их можно вводить по-разному. Приведем пример такой формулировки для диэлектрического тела с использованием электрического вектора-потенциала. Он определяется уравнением

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\mathbf{J}_p(\mathbf{r}')d^3r'.$$

Используя ток поляризации тела $\mathbf{J}_p(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon(\omega, \mathbf{r}) - 1)\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$ и выражение электрического поля через электрический вектор-потенциал [28] $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\omega, \mathbf{r})) + k_0^2\mathbf{A}(\omega, \mathbf{r})]/(i\omega\varepsilon_0)$, подставляем результат под интеграл и получаем объемное ИДУ для вектора-потенциала \mathbf{A} с ядром G , у которого особенность $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$. Под интеграл входит как \mathbf{A} , так и вторые производные компонент потенциала. Решение этого ИДУ требует использования дважды непрерывно дифференцируемых базисных

функций, поскольку вторые производные входят под интеграл, а касательные компоненты поля должны быть непрерывны на границе тела. Пример преобразования объемного сингулярного интеграла дан в классической монографии [41] (см. также [8]). Исключается бесконечно малая шаровая окрестность сингулярной точки, интеграл по ней заменяется с использованием формулы Остроградского на поверхностный по бесконечно малой сфере, а трехмерный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши как предел при удаленной шаровой окрестности при стремлении ее радиуса к нулю. В результате возникает внеинтегральный член. К вычислению оставшегося интеграла можно применять квадратурные формулы или кусочно-постоянные КЭ, заданные при дискретизации на кубиках, а также и более гладкие объемные КЭ. При этом диагональные матричные элементы в получающейся системе линейных алгебраических элементов обнуляются.

Далее будем преобразовывать сингулярные ИУ к слабо сингулярным, т.е. к имеющим ядра с пониженными сингулярностями, интегрируемыми в обычном смысле, что позволяет использовать кусочно-постоянные и иные аппроксимации. Интегральные операторы таких задач фредгольмовы, а задачи разрешимы [6–8]. Принципиально для уравнений электродинамики обоснованы проекционные методы [35–37]. Однако проекционные методы не всегда удобны, а ОИУ в ряде случаев обладают перед ними преимуществами. Для сингулярных ОИУ с пониманием интегралов в описанном выше смысле также доказана фредгольмовость и разрешимость [8,21–27]. Для упрощения дальнейших выкладок будем рассматривать преобразования для немагнитного тела на примере ОИУ относительно электрического поля (1):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^0(\mathbf{r}) + ik_0 \int_V \hat{D}G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{\chi}'^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (7)$$

Уравнение (2) при этом принимает вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + ik_0 \eta_0^{-1} \int_V \nabla \times G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \tilde{\chi}'^e(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (8)$$

Оно позволяет вычислить магнитное поле, используя решение ОИУ (7). Используя уравнение Максвелла в виде $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\eta_0 \hat{\varepsilon}^{-1}(\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}^0(\mathbf{r}))/k_0$ и подставляя в правую часть (8), получаем уравнение относительно магнитного поля. Здесь $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. Для изотропного тела в вакууме оно имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{H}}^0(\mathbf{r}) \\ &+ \int_V \nabla \times \left[G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') (1 - \varepsilon^{-1}(\mathbf{r}')) \nabla' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right] d^3r', \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^0(\mathbf{r}) + \int_V \nabla \times \left[G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}') (\varepsilon'(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{J}^0(\mathbf{r}') \right] d^3r'. \quad (10)$$

Это ИДУ для магнитного поля. Оно удобно при сложных границах, поскольку магнитное поле не терпит на них скачков, поэтому можно использовать непрерывные базисные функции. Штрих у оператора $\nabla' \times$ означает, что он действует на штрихованные координаты. Для любой векторной функции \mathbf{F} имеем

$$\begin{aligned} \nabla \times G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}') &= \\ &- \nabla' \times \left[G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}') \right] + G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Применяя теорему о роторе ([42], стр. 175), перепишем ИДУ (9) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \mathbf{H}^0(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{H}}^0(\mathbf{r}) - \oint_S G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &\times \left[(1 - \varepsilon^{-1}(\mathbf{r}')) \nabla' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right] \times \mathbf{v}(\mathbf{r}') d^2r' \\ &+ \int_V G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' \times \left[(1 - \varepsilon^{-1}(\mathbf{r}')) \nabla' \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right] d^3r'. \end{aligned} \quad (11)$$

Если ИДУ (9) требует для решения непрерывно дифференцируемых базисных функций, то для ИДУ (11) нужны дважды непрерывно дифференцируемые функции. Очевидно, преобразования можно произвести и с тензорной ДП.

Для электромагнитных (фотонных) кристаллов уравнения модифицируются просто заменой ФГ. Скалярная ФГ периодических источников, фазы которых сдвинуты согласно условиям Флоке-Блоха на величину $\exp(-i(\mathbf{k} + \mathbf{g})(\mathbf{r}'))$, имеет вид

$$\tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\Omega_0} \sum_{\mathbf{n}} \frac{\exp(-i(\mathbf{k} + \mathbf{g}_{\mathbf{n}})(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{(\mathbf{k} + \mathbf{g}_{\mathbf{n}})^2 - k_0^2 \tilde{\varepsilon}}. \quad (12)$$

Здесь $\Omega_0 = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$ — объем элементарной ячейки периодичности, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ — векторы трансляций, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ — тройка векторов обратной решетки: $\mathbf{a}_{kl} \mathbf{b}_l = 2\pi \delta_{kl}$, $\mathbf{b}_k = 2\pi (-1)^{P(klm)} \mathbf{a}_l \times \mathbf{a}_m / \Omega_0$, $P(klm) = \mp 1$ в зависимости от четности/нечетности перестановок, $\mathbf{g}_{\mathbf{n}} = n_1 \mathbf{b}_1 + n_2 \mathbf{b}_2 + n_3 \mathbf{b}_3$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Для ячейки в форме параллелепипеда $\mathbf{a}_1 = (a_1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (0, a_2, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 0, a_3)$, $\Omega_0 = a_1 a_2 a_3$, $\mathbf{g}_{\mathbf{n}} = (2\pi n_1/a_1, 2\pi n_2/a_2, 2\pi n_3/a_3)$, и суммирование идет по всем трем индексам $-\infty < n_k < \infty$. ФГ (12) удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца с дельта-сингулярностью $(\nabla^2 + k_0^2 \tilde{\varepsilon}) \tilde{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}')$. Обозначенная ранее ФГ имеет спектральное представление типа (12) в виде

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))}{\mathbf{k}^2 - k_0^2 \tilde{\varepsilon}} d^3k. \quad (13)$$

Тройной интеграл в бесконечных пределах обозначен одним символом. Это представление удобно при интегрировании по координатам, но требует вычисления спектральных интегралов. Использование ФГ (12) требует суммирования рядов. В ряде работ получены результаты по быстрому суммированию подобных рядов. Иногда может быть полезен следующий вид ФГ, полученный интегрированием, например, по переменной k_z методом вычетов:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_x(x-x') - ik_y(y-y') - i\tilde{k}_z(k_x, k_y)|z-z'|)}{i\tilde{k}_z(k_x, k_y)} dk_x dk_y. \quad (14)$$

Здесь уже $\tilde{k}_z = \sqrt{k_0^2 \tilde{\epsilon} - k_x^2 - k_y^2}$. Для затухающих (англоязычный термин — эванесцентных) в направлении z волн $\tilde{k}_z = -i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2 \tilde{\epsilon}}$. Также часто используют ФГ в экранированных областях. Весьма просто получают ФГ для идеальных экранов [28], волноводов и резонаторов с идеальными стенками, в частности прямогоугольного волновода и резонатора [28,31,43], где она строится методом многократных изображений или с использованием известных собственных функций. Если формально обозначить набор таких функций $\varphi_n(\mathbf{r})$ и собственных значений ω_n , то ФГ строится как резольвента в виде разложения по $\varphi_n(\mathbf{r})\varphi_n^*(\mathbf{r}')/(\omega - \omega_n)$ [44]. Существенно более сложными являются задачи с диэлектрическими полупространствами [28]. Примером служит задача Зоммерфельда о вертикальном диполе. Сюда же относится и задача о горизонтальном диполе. Наличие границ требует получения трех решений для трех ориентаций электрического диполя и трех решений для трех ориентаций магнитного диполя. ФГ слоистых структур приведены в большом ряде работ, например в [45–50]. Если магнитных свойств у тела нет ($\mu = 1$), то вектор-потенциал имеет компоненты

$$A_{\alpha}^p(\mathbf{r}) = \int_{V_0} G_{\alpha\alpha}(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}') J_{\alpha}^p(\mathbf{r}') d^3 r',$$

$\alpha = x, y, z$, т.е. определяется не скалярной, а диагональной тензорной ФГ. При магнитных свойствах надо вводит еще и магнитный вектор-потенциал.

Поскольку преобразование уравнений к менее сингулярным ядрам не затрагивает свободные члены, будем их проводить на примере ОИУ (1) для открытого ДР. Свободным колебаниям ДР соответствует комплексное волновое число $k_0 = k'_0$. Вместо ОИУ (1) будем использовать эквивалентное ИДУ [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \int_V \left\{ k_0^2 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\hat{\epsilon}(\mathbf{r}') - \hat{I}] \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right. \\ & + \nabla G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' [(\hat{\epsilon}(\mathbf{r}') - \hat{I}) \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \left. \right\} d^3 r' \\ & + \oint_S [\hat{\epsilon}(\mathbf{r}') - \hat{I}] (\mathbf{v}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \nabla' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r'. \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_v(\mathbf{r})$ — нормальная компонента, взятая на внутренней стороне поверхности, как и величина $\hat{\epsilon}(\mathbf{r})$. ИДУ (15) является сингулярным с интегрируемой особенностью. Оно записано для вакуумной ФГ, но легко может быть переписано для ФГ диэлектрической основы $G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Такой вид удобен для анализа ФК или фотонно-кристаллических волноводов с дырочными включениями. В этом случае ОИУ следует решать только в областях дырок (полостей), где отрицательная восприимчивость $\chi'(\mathbf{r}) = 1/\tilde{\epsilon} - 1 < 0$ характеризует дырку в диэлектрическом пространстве. ОИУ (15) можно получить, используя, например, формулы Стреттона-Чу [3] или же непосредственно применяя векторные интегральные теоремы и перенося в (1) операции дифференцирования с ядра на подынтегральную функцию [9,51]. При этом следует использовать соотношение $\nabla G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и теорему о дивергенции (Гаусса) [9,40,51]. Поскольку точка устремляется к поверхности изнутри, а нормальная компонента электрического поля и ДП имеют скачок на поверхности S , в поверхностном интеграле в формуле (15) следует взять предельные на поверхности внутренние значения. Внешнее значение, соответствующее вакууму, будем обозначать символом „+“, а внутреннее соответственно как \mathbf{E}^- . Наличие скачка ДП приводит к появлению на S поверхностной плотности связанного заряда $\sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot [\hat{\epsilon}(\mathbf{r}) - \hat{I}] \mathbf{E}^-(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in S$ в силу граничного условия $\mathbf{v} \cdot (\hat{\epsilon} \mathbf{E}^- - \mathbf{E}^+) = 0$. В случае скалярной проницаемости ИДУ (15) может быть преобразовано в объемно-поверхностное ИУ [9,51]

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \int_V \left\{ k_0^2 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\epsilon(\mathbf{r}') - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}') \right. \\ & - \epsilon^{-1}(\mathbf{r}') [\mathbf{E}(\mathbf{r}') \nabla' \epsilon(\mathbf{r}')] \nabla' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left. \right\} d^3 r' \\ & + \oint_S [\epsilon(\mathbf{r}') - 1] (\mathbf{v}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \nabla' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r', \quad (16) \end{aligned}$$

поскольку тогда в силу соленоидальности вектора $\epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})$ имеем $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \nabla \epsilon(\mathbf{r}) + \epsilon(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ и $\nabla \cdot [\epsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}(\mathbf{r})] = \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \epsilon^{-1}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \nabla \epsilon(\mathbf{r})$.

В этом случае на поверхности возникает плотность заряда $\sigma(\mathbf{r}) = [\epsilon(\mathbf{r}) - 1] E_v^-(\mathbf{r}) = E_v^+(\mathbf{r}) - E_v^-(\mathbf{r})$, т.е. поверхностная плотность заряда является скалярной величиной и выражается через скачок поля. Если же ДП постоянная внутри объема, то характеризующий объемную плотность член с $\nabla' \epsilon(\mathbf{r}')$ исчезает, и ИУ упрощается:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & k_0^2 (\epsilon - 1) \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 r' \\ & + (\epsilon - 1) \oint_S E_v(\mathbf{r}') \nabla' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r'. \quad (17) \end{aligned}$$

В ИУ (17) $\nabla' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\nabla G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, поэтому оно имеет вид представления электрического поля через потенциальный член с поверхностными источниками и потенциальный и соленоидальный члены с объемными источниками. Действительно, согласно теореме Гельмгольца [42,52], $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) - \nabla\Phi(\mathbf{r})$. Это представление поля через его потенциальную и соленоидальную части. Задача состоит в формулировке связанных уравнений относительно потенциалов $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и $\Phi(\mathbf{r})$. Рассмотрим интеграл

$$\int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' \Phi(\mathbf{r}') d^3 r' = \int_V \{ \nabla' [G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}')] - \Phi(\mathbf{r}') \nabla G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \} d^3 r'.$$

Он имеет вид

$$-\nabla \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') d^3 r' + \oint_S \mathbf{v}(\mathbf{r}') [G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}')] d^2 r'.$$

Здесь мы использовали теорему о градиенте [42]. В первом члене явно выделен градиент, поэтому он потенциальный. Поверхностный интеграл представляет собой некую векторную функцию с поверхностной плотностью $\mathbf{v}(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}')$. Представим его в виде $\nabla \times \mathbf{L}(\mathbf{r}) - \nabla\Phi(\mathbf{r})$, $\mathbf{F} = k_0^2(\epsilon - 1)\mathbf{L}$. Взяв дивергенцию, получим уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) = - \oint_S \mathbf{v}(\mathbf{r}') [\nabla G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}')] d^2 r'. \quad (18)$$

Взяв ротор, также получим уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k_0^2(\epsilon - 1) \oint_S \mathbf{v}(\mathbf{r}') \times \nabla G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') d^2 r'. \quad (19)$$

На вектор \mathbf{F} мы наложили условие соленоидальности. Для нахождения \mathbf{F} и Ψ надо решать уравнения Пуассона, которые формально можно явно записать с помощью статической ФГ $G_0(\mathbf{0}, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = (4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)^{-1}$. Тогда интеграл представляется в виде

$$\oint_S \mathbf{v}(\mathbf{r}') [G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}')] d^2 r' = \nabla \times \mathbf{L}(\mathbf{r}) - \nabla\Phi(\mathbf{r}),$$

а уравнение для потенциала Φ приобретает вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = k_0^2(\epsilon - 1)\Psi(\mathbf{r}) - k_0^2(\epsilon - 1) \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}') d^3 r' + (\epsilon - 1) \oint_S E_v(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r'. \quad (20)$$

Этот потенциал определен с точностью до константы. Второй объемный интеграл в (17) имеет представление

$$\int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3 r' = \int_V \{ \nabla' \times [G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}')] - \nabla G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') \} d^3 r'$$

или

$$-\nabla \times \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3 r' + \oint_S \mathbf{v}(\mathbf{r}') \times [G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}')] d^2 r'.$$

Здесь использована теорема о роторе. Теоремы о градиенте, роторе и дивергенции (Гаусса) выражают объемные интегралы от действия этих операторов на некие функции через поверхностные интегралы от этих функций и позволяют преобразовывать ОИУ. Такие преобразования (как и формулы Грина) есть трехмерный аналог интегрирования по частям. Разбивая (17) на потенциальную и соленоидальную части, получаем

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = k_0^2(\epsilon - 1) \left[2 \oint_S \mathbf{v}(\mathbf{r}') \times [G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}')] d^2 r' - \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}') d^3 r' \right]. \quad (21)$$

В это уравнение подставлено возбуждающее поле, например, плоской волны, которое всегда соленоидальное. Учитывая уравнение для потенциала Φ , уравнение (21) можно трактовать как объемно-поверхностное ИДУ для функции $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Соотношения (20) и (19) являются связанными парными уравнениями. Они определяют электрическое поле через введенные потенциалы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ и $\nabla\Phi(\mathbf{r})$. Эти уравнения надо решать совместно. Связь уравнений осуществляется через поверхностный интеграл в (20), поскольку E_v зависит от обоих потенциалов. Уравнения (20) и (21) для потенциалов имеют слабо сингулярные ядра $G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Поверхностные интегралы в (15) появляются, если тело имеет резкую границу, т.е. функция $\hat{\epsilon}(\mathbf{r})$ на S разрывная и скачком уменьшается до единицы. Если же $\hat{\epsilon}(\mathbf{r})$ гладкая и плавно уменьшается до единицы в некотором внутреннем приповерхностном слое, то $E_v^+(\mathbf{r}) = E_v^-(\mathbf{r})$, и поверхностный интеграл не возникает, однако в указанном слое имеется объемная плотность заряда. Нетрудно показать, что в пределе при уменьшении толщины такого слоя до нуля объемный интеграл по нему эквивалентен поверхностному интегралу от получающегося скачка нормальной компоненты поля. В задачах дифракции уравнения следует дополнять сторонними полями.

Еще один подход к преобразованию уравнений основан на сингулярном ИУ [8,52–54], получаемом из (1), (2) путем выделения особенности в ФГ $G(k, \mathbf{r}) = G(0, \mathbf{r}) + \Delta G(k, (\mathbf{r}))$ и выделения соответствующих ей внеинтегральных членов. Они выделяются путем интегрирования по бесконечно малому шару, окружающему точку наблюдения, с использованием теоремы Остроградского [54]. Такое ИУ не содержит поверхностных интегралов [8]. Преобразование опять проведем на примере ОИУ (7) с вакуумной ФГ. Отметим, что $G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = G_0(0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') + \Delta G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$, где $\Delta G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') = (4\pi R)^{-1}(\exp(-ik_0R) - 1)$, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, или $\Delta G_0 = (4\pi R)^{-1}[-ik_0R - (k_0R)^2/2 + \dots]$. Использование приближенного ядра возможно при низких частотах, когда отбрасываемые члены малы. Метод сведения к сингулярному ОИУ основан на интегрировании вторых производных типа $\partial_{\alpha\alpha}^2 G_0(0, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$ по шару в окрестности точки истока. В результате применения теоремы Остроградского выделяется член $-\hat{\chi}^{\prime\epsilon}(\mathbf{r}')\mathbf{E}(\mathbf{r}')/3$, и уравнение приобретает вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})(\hat{I} + \hat{\chi}^{\prime\epsilon}(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r})/3) = p.v. \int_V (\nabla \otimes \nabla + k_0^2 \hat{I}) \times G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\chi}^{\prime\epsilon}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (22)$$

Интеграл понимается как предел при удалении бесконечно малой окрестности точки истока. Заметим, что эту операцию целесообразно проводить только для диагональных членов оператора $\nabla \otimes \nabla$.

Отметим еще одну возможность преобразования уравнений с целью снижения сингулярности их ядер. Для уравнений относительно обеих полей можно строить квадратичные функционалы, скалярно умножая их на бивектор (\mathbf{E}, \mathbf{H}) , или же билинейные функционалы, скалярно умножая на бивектор $(\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}})$. Если бивектор (\mathbf{E}, \mathbf{H}) следует найти, то векторные функции $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ можно брать произвольными. Степень гладкости и граничные условия для этих весовых функций $\nabla \otimes \nabla$ можно задавать. В случае дважды дифференцируемых таких функций в скалярном произведении производные оператора можно переносить как на искомые поля под интегралом, так и на весовые поля. При этом можно перенести дифференциальный оператор частично один раз или же полностью два раза на весовые функции с тильдами. В последнем случае возникает ядро G_0 . Это же относится к уравнениям относительно только электрического или только магнитного полей. При этом возникают поверхностные интегралы. Если весовые функции еще удовлетворяют нулевым граничным условиям на поверхностях, это обнуляет поверхностные интегралы, упрощая уравнения. Такие тригонометрические функции можно ввести, например, для моделирования прямоугольных ДР.

3. Моделирование диэлектрических резонаторов

Комплексные резонансные частоты произвольного ДР в свободном пространстве могут быть рассчитаны на основе любого из уравнений (15), (16), (22). Рассмотрим, например, уравнение (15) для изотропного и неоднородного ДР:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}') \left\{ k_0^2 G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\epsilon(\mathbf{r}') - 1) + \epsilon^{-1}(\mathbf{r}') \nabla' \epsilon(\mathbf{r}') \right\} d^3 r' + \int_S E_v(\mathbf{r}') (\epsilon(\mathbf{r}') - 1) \nabla' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r'. \quad (23)$$

Умножая скалярно на $\mathbf{E}^*(\mathbf{r})$ и интегрируя, получаем

$$k_0^2 = \frac{\int_V |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3 r - \int_V \int_V \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}') \epsilon^{-1}(\mathbf{r}') \nabla' \epsilon(\mathbf{r}') d^3 r' d^3 r + \int_V \int_S E_0(\mathbf{r}') (\epsilon(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \nabla' G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^2 r' d^2 r}{\int_V \int_V \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\epsilon(\mathbf{r}') - 1) d^3 r' d^3 r}.$$

Это квадратичный функционал, стационарное значение которого дает квадрат комплексного волнового числа, а его нахождение определяет поле. Находить его можно итерационно совместно с решением ОИУ (23). Ряд подобных функционалов, а также и итерационные алгоритмы для них приведены в монографии [9]. Приведенный функционал и ОИУ содержат поверхностные интегралы, что неудобно. Рассмотрим исходное гиперсингулярное ОИУ для такого ДР:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\nabla \otimes \nabla + k_0^2) \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\epsilon(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (24)$$

Выберем функцию $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ такую, что ее нормальная компонента обращается в нуль на поверхности ДР. Тогда скалярное умножение дает функционал

$$k_0^2 = \frac{\int_V \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3 r + \int_V \int_V \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \nabla G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\epsilon(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 r' d^3 r}{\int_V \int_V \tilde{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}') G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\epsilon(\mathbf{r}') - 1) d^3 r' d^3 r}. \quad (25)$$

Его экстремум можно искать с использованием базисных функций и весовых функций $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$. При этом следует решать систему линейных уравнений совместно с проведением итераций в (25). Перед каждой итерацией электрическое поле следует нормировать [9].

Рассмотрим цилиндрические ДР, для чего используем представление ФГ в цилиндрической системе координат [28]. Один из способов такого представления заключается в замене переменных $x = \rho \cos(\varphi)$, $y = \rho \sin(\varphi)$ в соответствующих декартовых представлениях, например,

$$G(\rho, \varphi, z|\rho', \varphi', z') = (4\pi R)^{-1} \exp(-jkR),$$

$$R = (\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2). \quad (26)$$

Можно выполнить указанную замену и в других представлениях ФГ, даваемых приведенными в [28] соотношениями, например формулами 2.8 и 2.14, или же использовать представление 2.15 (далее все аналогичные ссылки будут соответствовать указанной работе). Однако часто более удобно применять непосредственные представления ФГ в цилиндрической системе (формулы 2.17, 2.18, 2.20, 2.21 и 2.22). Наличие нескольких видов представлений ФГ создает удобства при вычислении интегралов в матричных элементах, поскольку есть возможность выбрать наиболее подходящую формулу, для которой они вычисляются наиболее просто, а также позволяет решить задачу несколькими алгоритмами. При переходе в цилиндрическую систему координат вектор-потенциал \mathbf{A} и вектор \mathbf{E} преобразуются по формулам 2.63, при этом ОИУ приобретает вид

$$E_\rho(\rho, \varphi, z) = k^2 \int_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\varepsilon(\mathbf{r}') - 1] \times \{E_\rho(\mathbf{r}') \cos(\varphi - \varphi') + E_\varphi(\mathbf{r}') \sin(\varphi - \varphi')\} d^3r' - \int_V \left\{ \varepsilon^{-1}(\mathbf{r}') [\mathbf{E}(\mathbf{r}') \nabla' \varepsilon(\mathbf{r}')] \frac{\partial G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial \rho'} \right\} d^3r' + \oint [\varepsilon(\mathbf{r}') - 1] (\mathbf{v}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \frac{\partial G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial \rho'} d^2r', \quad (27)$$

$$E_\rho(\rho, \varphi, z) = k^2 \int_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\varepsilon(\mathbf{r}') - 1] \times \{E_\varphi(\mathbf{r}') \cos(\varphi - \varphi') - E_\rho(\mathbf{r}') \sin(\varphi - \varphi')\} d^3r' - \int_V \left\{ \varepsilon^{-1}(\mathbf{r}') [\mathbf{E}(\mathbf{r}') \nabla' \varepsilon(\mathbf{r}')] \frac{\partial G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\rho \partial \varphi'} \right\} d^3r' + \oint [\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - 1] (\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \frac{\partial G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\rho \partial \varphi'} d^2r', \quad (28)$$

$$E_z(\rho, \varphi, z) = k^2 \int_V G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') [\varepsilon(\mathbf{r}') - 1] E_z(\mathbf{r}') d^3r' - \int_V \left\{ \varepsilon^{-1}(\mathbf{r}') [\mathbf{E}(\mathbf{r}') \nabla' \varepsilon(\mathbf{r}')] \frac{\partial G(\mathbf{r}')}{\partial z'} \right\} d^3r' + \oint [\varepsilon(\mathbf{r}') - 1] (\mathbf{v}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \frac{\partial G(\mathbf{r}')}{\partial z'} d^2r'. \quad (29)$$

В связанных ИУ (27)–(29) для компактности записи использованы координаты \mathbf{r} и \mathbf{r}' , которые следует рассматривать в цилиндрической системе. Элемент объема имеет вид $d^3r' = \rho' d\rho' d\varphi' dz'$, а вид элемента поверхности d^2r' зависит от координаты точки на цилиндре.

В случае, когда поле не зависит от координаты φ , указанные ФГ можно упростить, выполнив интегрирование по углу. Пусть, например, рассматриваются азимутально-симметричные Н-колебания изотропного цилиндрического ДР радиуса r_0 и высоты h . Тогда отлична от нуля лишь E_φ -компонента, и ИУ (5)–(7) приобретает вид [4]

$$E_\varphi(\rho, z) = k^2 \int_{S_M} (\varepsilon(\rho', z') - 1) \bar{G}(\rho, z|\rho', z') \rho' d\rho' dz', \quad (30)$$

где S_M — меридианное сечение $0 \leq \rho \leq r_0$, $|z| \leq h/2$, а ядро имеет представление

$$\bar{G}(\rho, z|\rho' z') = \int_0^{2\pi} \cos(\varphi - \varphi') G(\rho, \varphi, z|\rho', \varphi', z') d\varphi'. \quad (31)$$

ФГ (31) не зависит от φ и представляется также удвоенным интегралом типа (31) по области $(0, \pi)$. Действительно, сделаем в (31) замену переменных $\vartheta = \varphi' - \varphi$. Поскольку R и G периодичны по ϑ с периодом 2π , значение интеграла (31) по области $(-\varphi, 2\pi - \varphi)$ не зависит от значения φ . В [4] предложено вычислять ФГ (9), разлагая экспоненту в (4) в ряд и выражая рекуррентно получающиеся интегралы через эллиптические интегралы первого и второго рода. Но для ФГ (31) есть и другие представления, например, из формулы 2.18 следует

$$\bar{G}(\rho, z|\rho', z') = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{J_1(\chi\rho) J_1(\chi\rho') \exp(-\sqrt{\chi^2 - k^2} |z - z'|)}{\sqrt{\chi^2 - k^2}} \chi d\chi, \quad (32)$$

а из 2.22 соответственно получим

$$\bar{G}(\rho, z|\rho', z') = \frac{-j}{4} \int_0^\infty \left\{ H_1^{(2)}(\sqrt{k^2 - \gamma^2} \rho') J_1(\sqrt{k^2 - \gamma^2} \rho) \right\} \left\{ J_1(\sqrt{k^2 - \gamma^2} \rho') H_1^{(2)}(\sqrt{k^2 - \gamma^2} \rho) \right\} \times \exp(-j\gamma(z - z')) d\gamma. \quad (33)$$

В (33) верхнее значение в фигурной скобке надо брать при $\rho < \rho'$, а нижнее — при $\rho > \rho'$. Представления ФГ (31)–(33) удобны для анализа азимутально-симметричных $H_{0n\delta}$ и $E_{0n\delta}$ типов колебаний. Для гибридных HE_{mns} и EH_{mns} типов ФГ имеют вид 2.18 и 2.22, в суммах которых необходимо оставить только один азимутальный член $\exp(-jm(\varphi - \varphi'))$.

Методам анализа ДР посвящено большое число работ (см., например, монографии [55,56] и приведенный там список литературы), при этом использовались различные методы: приближенные эвристические (например, метод магнитной стенки), теория возмущений (разложение по малому параметру), метод частичных областей (МЧО), или шивания, с получением поверхностных интегральных уравнений, метод ОИУ [4]. Из них строгими являются два последних метода, причем последний является наиболее универсальным, поскольку позволяет анализировать неоднородные ДР произвольной формы. Однако в литературе он достаточно полно не рассмотрен. В публикации [4] он сформулирован для моды $H_{01\delta}$ однородного цилиндрического ДР, причем в конечном итоге используется теория возмущений. Из-за сложности определения коэффициентов разложения МЧО для цилиндрического ДР так и не был строго реализован, а был заменен приближенным подходом [55], не позволяющим определять радиационные добротности колебаний. Следует отметить работы [56–63] по моделированию ДР. Метод ОИУ для анализа ДР использован в ряде работ [4,5,9,59,63–66]. В [65] приведены результаты для прямоугольного ДР, где в качестве базисных функций использованы синусы и косинусы от аргументов $k_x x$, $k_y y$ и $k_z z$, удовлетворяющие внутри диэлектрика уравнению Гельмгольца, т.е. при $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2 \epsilon$. Кроме этого, использовано условие соленоидальности электрического поля внутри прямоугольника, что позволило существенно снизить число использованных базисных функций, т.е. алгебраическую размерность задачи. В [66] также использован метод ОИУ для прямоугольного ДР, а также моделируются моды $H_{01\delta}$ и H_{011} однородного и неоднородного цилиндрического ДР. На рис. 1, 2 даны распределения полей в резонансе для моды $H_{01\delta}$ однородного цилиндрического ДР. Использованы метод прямой итерации в форме метода последовательных приближений (МПП) и метод минимальных невязок с замораживанием значений ФГ от спектрального параметра на предыдущем шаге, примененные к ИУ и строгому характеристическому уравнению. Были использованы одномерные кусочно-постоянные и дифференцируемые (в виде полиномов второго порядка) КЭ, заданные по трем узлам. Оба метода сходятся к одним и тем же результатам за несколько итераций по комплексному параметру k_0 . Резонансные частоты и добротности приведены в табл. 1 и 2.

Исследование сходимости алгоритма представлено на рис. 3. В рассмотренном примере МПП сходится быстро, однако для сложных конфигураций сходимость итераций может быть не при всех начальных значениях. Метод простой итерации поиска корня уравнения $f(x) = 0$ можно записать в виде $x_n = x_{n-1} - \tau_n f(x_{n-1})$, при этом для него параметр итераций $\tau_n = \tau$ все время одинаков. В работе [67] развит метод итераций с коррекцией на каждом шаге комплексного параметра итераций τ_n , обеспечивающий безусловную сходимость. Альтернативой алгоритма могут служить проекционные

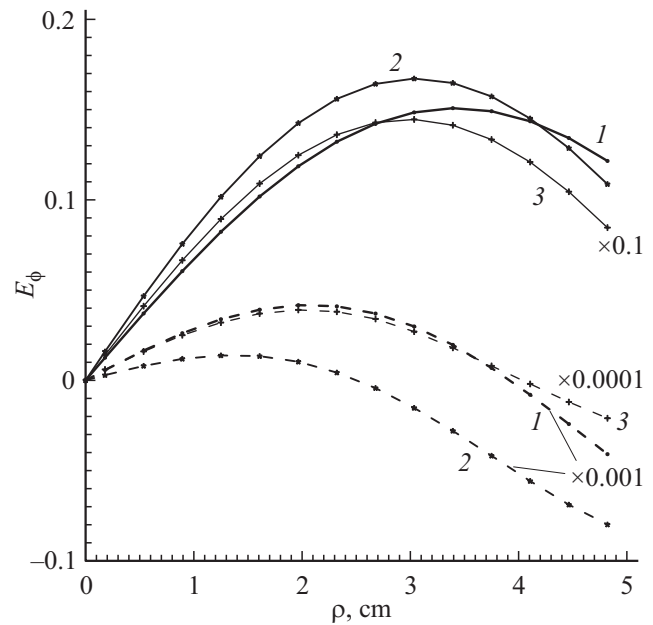


Рис. 1. Зависимость $\text{Re}(E_\phi)$ (сплошные кривые) и $\text{Im}(E_\phi)$ (штриховые кривые) от координаты ρ для цилиндрического ДР $\epsilon = 100$, $r_0 = h = 5$ mm: 1 — мода $H_{01\delta}$ при $z = 0.09$; 2 — мода H_{011} при $z = 2.41$; 3 — мода H_{011} при $z = 0.09$.

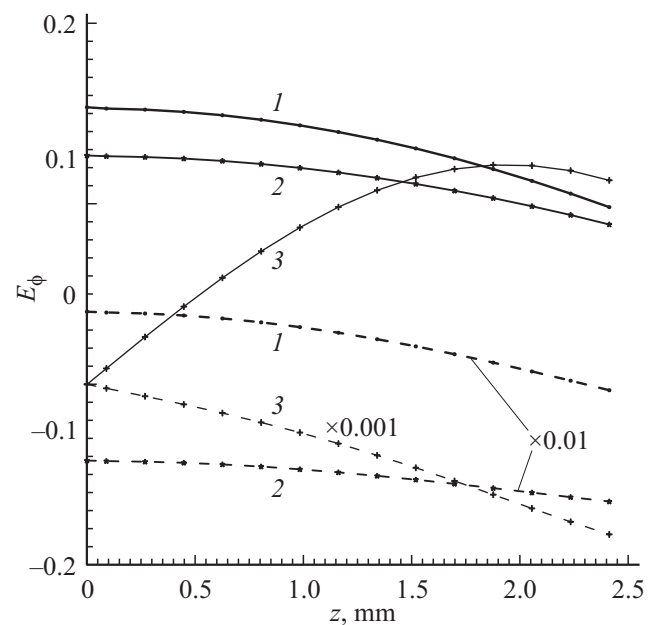


Рис. 2. $\text{Re}(E_\phi)$ (сплошные кривые) и $\text{Im}(E_\phi)$ (штриховые кривые) от координаты z для цилиндрического ДР с $\epsilon = 100$, $r_0 = h = 5$ mm: 1, 2 — мода $H_{01\delta}$ при $\rho = 3.4$ и $\rho = 1.66$ mm; 3 — мода H_{011} при $\rho = 4.46$ mm.

методы для ОИУ, приводящие к необходимости поиска комплексных корней определителей больших порядков. Подход на основе ОИУ для азимутально-симметричных мод цилиндрических ДР также использован в [59]. Задачи о ДР с идеальными плоскими экранами решаются

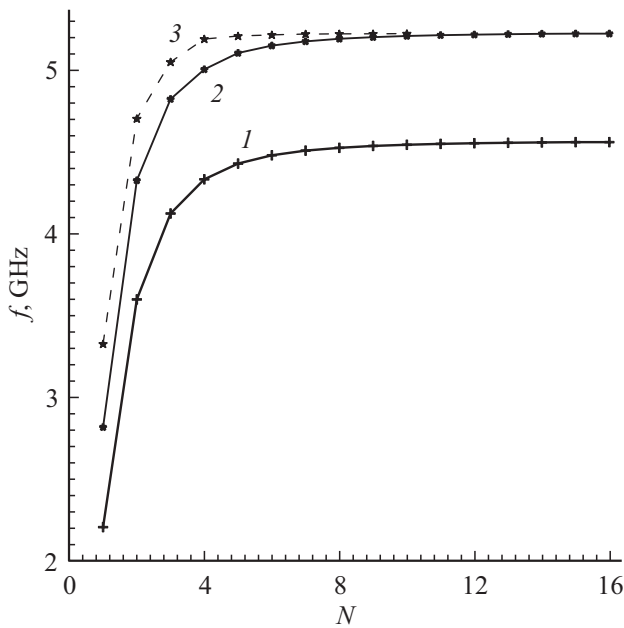


Рис. 3. Сходимость результатов для собственных частот f цилиндрического ДР от числа базисных функций N при кусочно-постоянной (1, 2) и полиномиальной квадратичной (3) аппроксимациях для $\epsilon = 38$, $r_0 = 5$ mm: $h = 7$ mm (1); $h = 4$ mm (2, 3).

Таблица 1. Зависимость резонансной частоты мод от формы однородного цилиндрического ДР с $\epsilon = 50$, $h = 5$ mm

Мода	Отношение радиуса к высоте r_0/h					
	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
	Частоты в GHz					
$H_{01\delta}$	9.01	6.22	5.23	4.41	3.96	3.57
H_{011}	11.65	9.15	7.97	7.53	7.10	6.72

Таблица 2. Зависимость радиационной добротности мод $H_{01\delta}$ и H_{011} однородного цилиндрического ДР от диэлектрической проницаемости при $r_0 = 5$ mm, $h = 7$ mm

Мода	Диэлектрическая проницаемость ϵ					
	10.0	20.0	40.0	80.0	160.0	320.0
	Добротность Q					
$H_{01\delta}$	4.2	12.4	66.1	125.3	251.0	505.7
H_{011}	45.1	382.1	1250.3	2802.5	5621.2	12250.7

на основе ОИУ построением ФГ методом изображений. Для анализа сферических ДР следует использовать разложение по сферическим гармоникам ([28,68–71]). Распределение полей в цилиндрическом ДР показывает, что оно не соответствует распределению с магнитными стенками по обеим из координат ρ и z , т. е. в классификации мод H_{0mn} . Такая классификация соответствует экра-

нированному ДР с числом полуволн m по радиальной координате и n по координате z . В открытом резонаторе с радиусом a и высотой b из уравнения Гельмгольца следует $k_{\rho m}^2 + k_{zn}^2 = \omega_{mn}^2 \epsilon / c^2$, поэтому индексы в соотношениях $k_{\rho m} = m\pi/a$, $k_{zn} = n\pi/b$ не могут быть целыми: условия магнитной стенки не выполняются, и поле выходит за границы ДР. Более того, поскольку индексы связаны с комплексной резонансной частотой, они должны быть комплексными. Эти параметры входят в комплексные функции Бесселя, описывающие моды. Обычно в литературе используется весьма условная классификация $H_{0m\delta}$, в которой считается $0 < \delta < 1$. Эта классификация хорошо соответствует случаю большой ДП, когда поле почти не выходит за пределы ДР, а частоты почти действительные. Комплексные частоты $\omega_n = \omega'_n + j\omega''_n$ определяют затухающие во времени свободные колебания \mathbf{E}_n с номером n , при этом $\omega''_n > 0$. Тогда для собственной (резонансной) моды в дальней зоне имеем

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \frac{\omega_n^2 \exp(-j\omega_n r/c)}{4\pi r c^2} \mathbf{F}(\theta, \varphi). \quad (34)$$

Векторная диаграмма направленности \mathbf{F} зависит от распределения электрического поля в объеме V и определяет распределение излучения ДР в дальней зоне для указанной моды [72]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\theta, \varphi) &= \\ &= \int_V e^{j\omega_n r' \cos(\psi)/c} [\hat{\epsilon}(\mathbf{r}') - \hat{I}] \mathbf{E}_n(\mathbf{r}') r'^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\varphi'. \end{aligned}$$

Здесь

$$\cos(\psi) = \cos(\theta) \cos(\theta') + \sin(\theta) \sin(\theta') \cos(\varphi - \varphi').$$

Как видно, поля собственных мод (34) возрастают на бесконечности [73], что связано с экспоненциальным их убыванием во времени. Как показано в [73], закон сохранения энергии выполнен следующим образом: более дальним расстояниям соответствуют более ранние моменты времени излучения (определяемые запаздыванием r/c). В эти ранние моменты энергия колебаний в объеме V была экспоненциально больше [73] в силу экспоненциального затухания. Модуль функции (34) имеет минимум в точке $r_n = c/\omega''_n$. Если эта точка соответствует дальней зоне, то в заданном направлении внутри V поле может иметь колебательный характер, затем по мере удаления от ДР его модуль убывает до указанного радиуса, а затем начинает возрастать. Для высокодобротных колебаний $r_n \gg a$, что оправдывает приближенный метод вычисления действительных собственных частот [56] путем замены полей (34) на убывающие. Сферические ДР рассмотрены в работах [4,57,58]. Приближенное решение получено как разложение по малому параметру $1/\epsilon$. Оно хорошо работает при большой ДП. В [58] получено строгое дисперсионное

уравнение. Для данной частоты оно имеет два решения в виде сходящейся и расходящейся волн. В [58] качестве одного из двух его решений ошибочно взято убывающее на бесконечности решение. Фактически оно представляет собой сходящуюся сферическую волну. Задача о свободных колебаниях сферического ДР связана с решением неоднородных уравнений Максвелла задачи Ми дифракции на диэлектрическом шаре. В работе [4] использован метод ОИУ для численного определения резонансных частот и добротностей моды $H_{01\delta}$. ДР часто используются как излучатели в антеннах. Стационарное возбуждение таких излучателей на заданной частоте приводит к убывающим полям в дальней зоне. Нестационарное излучение за конечное время также приводит к убывающим на бесконечности полям.

Приведем еще ОИУ относительно магнитного поля. Исходим из уравнения (24). Берем ротор этого уравнения, вносим этот оператор под интеграл и используем теорему о роторе:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= k_0^2 \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla' \times [(\varepsilon(\mathbf{r}') - 1)\mathbf{E}(\mathbf{r}')] d^3 r' \\ &- k_0^2 \oint_S G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{v}(\mathbf{r}') \times [(\varepsilon(\mathbf{r}') - 1)\mathbf{E}(\mathbf{r}')] d^2 r'. \end{aligned}$$

Имеем

$$\nabla \times [(\varepsilon(\mathbf{r}) - 1)\mathbf{E}(\mathbf{r})] = \nabla \varepsilon(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\varepsilon(\mathbf{r}) - 1) \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Используя уравнения Максвелла, подставляем $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\omega\mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})/(\omega\varepsilon_0\varepsilon)$. В результате получаем ИДУ относительно магнитного поля

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \int_V G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &\times \left[\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}') \varepsilon^{-1} \nabla' \varepsilon(\mathbf{r}') + k_0^2 (\varepsilon(\mathbf{r}') - 1) \mathbf{H}(\mathbf{r}') \right] d^3 r' \\ &- \frac{k_0^2}{\omega\mu_0} \oint_S G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{v}(\mathbf{r}') \times [(\varepsilon(\mathbf{r}') - 1) \nabla' \mathbf{H}(\mathbf{r}')] d^2 r'. \end{aligned}$$

Если на основе этого уравнения анализировать ДР с однородным заполнением, то уравнение упрощается:

На рис. 4 дан пример расчета дисперсионной зонной структура ФК типа инвертированный опал в виде неплотно упакованных сферических полостей (метаатомов) в основе с ДП $\tilde{\varepsilon} = 4$. Следует отметить, что метод ОИУ обладает хорошей сходимость по сравнению с другими методами, например плоских волн, по отношению к числу базисных функций. Вычисление ФГ (12) можно существенно ускорить, применив методы быстрого суммирования. Периодическую ФГ можно вычислить по-другому на основе периодической трансляции на вектор

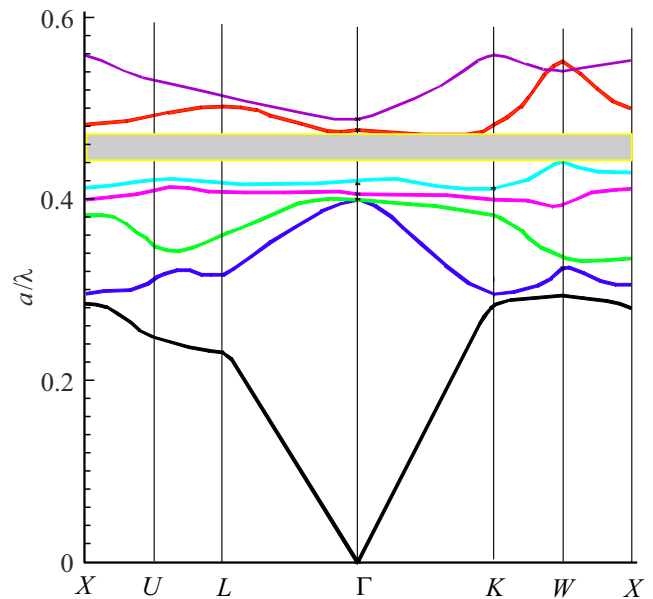


Рис. 4. Зонная структура ФК типа инвертированный опал с ДП основы $\tilde{\varepsilon} = 3.9$ и фактором заполнения $f = 0.35$. Полые сферы дискретизировались вписанными кубическими конечными элементами. Запрещенная зона показана серым.

$n_x a_x \mathbf{x}_0 + n_y a_y \mathbf{y}_0 + n_z a_z \mathbf{z}_0$ и суммирования ФГ свободного пространства $G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$ с соответствующими фазовыми множителями $\exp(-i(k_x a_x n_x + k_y a_y n_y + k_z a_z n_z))$. Применив формулу суммирования Пуассона, можно доказать эквивалентность обоих подходов вычисления ФГ.

4. Волны в диэлектрических и фотонно-кристаллических волноводах

Регулярные вдоль оси z волноведущие структуры (волноводы) инвариантны относительно трансляций, поэтому поддерживают моды с зависимостью $\exp(i\omega t - i\gamma(\omega)z)$. Дифференцирование по z в уравнениях Максвелла сводится к умножению на $-i\gamma$, т.е. краевая задача становится двумерной в поперечном сечении. Соответственно целью является определение дисперсии $\gamma(\omega)$ мод, которых бесконечно много. Задача для диэлектрического волновода (ДВ) сводится к двумерному ОИУ по поперечному сечению S . Для открытых ДВ обычно поперечное сечение S ограничено, а скалярная ФГ с точностью до множителя $-i/4$ пропорциональна функции Ганкеля второго рода от аргумента $\kappa|\mathbf{r}_\tau - \mathbf{r}'_\tau|$, т.е. имеет логарифмическую особенность. Индекс τ соответствует поперечным координатам x, y . При действительном поперечном волновом числе κ и при выбранной временной зависимости $\exp(i\omega t)$ эта функция Ганкеля в дальней зоне представляет собой расходящуюся цилиндрическую волну. Индекс τ соответствует поперечным координатам x, y . Для экранированных ДВ обычно рассматривают идеально проводящие экраны.

В этом случае ФГ строится методом изображений. Так, для прямоугольного экрана возникает двумерная бесконечная система изображений, даваемая двумерным рядом, пример которого имеется в работе [31]. В случае идеальных магнитных стенок также можно использовать метод изображений, как и в случае магнитного диполя относительно обоих типов стенок. Далее будем рассматривать только открытые ДВ. Удобно использовать двумерную ФГ [28]

$$G_{\tau}(\omega, \gamma, \mathbf{r}_{\tau}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_x x - ik_y y)}{k_x^2 + k_y^2 - (k_0^2 - \gamma^2(\omega))} dk_x dk_y. \quad (35)$$

Здесь источник находится в начале координат. Приводя ее к виду

$$G_{\tau}(\omega, \gamma, \mathbf{r}_{\tau}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ik_x x - \sqrt{\gamma^2(\omega) + k_x^2 - k_0^2} |y - y'|)}{\sqrt{\gamma^2(\omega) + k_x^2 - k_0^2}} dk_x dk_y, \quad (36)$$

получаем известное представление ФГ [28] для ДВ через функцию Ганкеля второго рода,

$$G_{\tau}(\omega, \gamma, \mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\tau}) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(\kappa R_{\tau}). \quad (37)$$

В ней $\kappa = \sqrt{k_0^2 - \gamma^2(\omega)}$ — спектральный параметр или поперечное волновое число, $R_{\tau} = |\mathbf{r}_{\tau} - \mathbf{r}'_{\tau}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$. Вид (37) удобен для быстрых вытекающих волн $k_0 > \text{Re}(\gamma(\omega))$. Даже при пренебрежении диссипацией в диэлектрике в этом случае получаем комплексные $\gamma(\omega)$. Для медленных поверхностных волн $k_0^2 < \gamma^2(\omega)$, и ФГ выражается через функцию Макдональда: $G_{\tau}(\omega, \gamma, \mathbf{r}_{\tau} - \mathbf{r}'_{\tau}) = (2\pi)^{-1} K_0(qR_{\tau})$. Спектральный параметр удобно взять в виде $q = \sqrt{\gamma^2(\omega) - k_0^2} > 0$. В окрестности особой точки имеем

$$G_{\tau}(\omega, \gamma, \mathbf{r}_{\tau} - \mathbf{r}'_{\tau}) \approx -i \left(1 - 2i(C + \ln(\kappa R_{\tau}/2)) / \pi \right) / 4 \approx -\ln(R_{\tau}) / (2\pi).$$

Здесь использовано представление функции Макдональда при малом аргументе. Вторая производная от логарифмического потенциала $\Phi = \ln(R_{\tau})$ — неинтегрируемая в обычном смысле функция. Вычислим вторую производную потенциала от некоторой непрерывно дифференцируемой плотности заряда $\rho(\mathbf{r}_{\tau})$ в двумерной области S в случае, когда точка наблюдения принадлежит этой области, т.е. величину

$$\partial_x^2 \int_S \ln\left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\right) \rho(x', y') dx' dy'.$$

Далее вывод формул аналогичен выводу, рассмотренному в параграфе 5 главы 4 работы [54]. Разбиваем интеграл на два. Первый берем по кругу радиуса δ , в центре которого содержится интересующая нас точка (ее обозначаем $\mathbf{r}_{0\tau} = (x_0, y_0)$), а второй — по оставшейся области \tilde{S} :

$$I = I_1 + I_2 = \int_{S_{\delta}} \ln(R_{\tau}) \rho(r'_{\tau}) dx' dy' + \int_{\tilde{S}} \ln(R_{\tau}) \rho(r'_{\tau}) dx' dy'.$$

Вторая производная второго интеграла вычисляется в обычном смысле. Поскольку $\partial_x R_{\tau} = -\partial_{x'} R_{\tau}$, преобразуем первую производную первого интеграла

$$\begin{aligned} \partial_x I_1 &= - \int_{S_{\delta}} \rho(r'_{\tau}) \partial_{x'} \ln(R_{\tau}) dx' dy' = \\ &= - \oint_{L_{\delta}} \rho(r'_{\tau}) \ln(R_{\tau}) \cos(\varphi) dl + \int_{S_{\delta}} \ln(R_{\tau}) \partial_{x'} \rho(r'_{\tau}) dx' dy'. \end{aligned}$$

Здесь $gl = \delta d\varphi$, $\cos(\varphi) = (x - x')/R_{\tau}$. Она функция дифференцируемая. Вычисляя вторую производную

$$\begin{aligned} \partial_x^2 I_1 &= - \oint_{L_{\delta}} \rho(r'_{\tau}) \partial_x \ln(R_{\tau}) \cos(\varphi) dl \\ &+ \int_{S_{\delta}} \partial_x \ln(R_{\tau}) \partial_{x'} \rho(r'_{\tau}) dx' dy' \end{aligned}$$

и оценивая интегралы, получаем в предел $\delta \rightarrow 0$ результат $\partial_x^2 I_1 = \pi \rho(r_{0\tau})$. Действительно, второй интеграл имеет оценку сверху $2\pi\delta \max(\partial_{x'} \rho)$, а первый вычисляется по теореме о среднем. Таким образом, в двумерном сингулярном ОИУ относительно электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}_{\tau})$ при действии оператора $\nabla_{\tau} \otimes \nabla_{\tau}$ с определением интеграла в указанном выше смысле главного значения возникает внеинтегральный член $-\mathbf{E}(\mathbf{r}_{0\tau})/2$ (напомним, что для трехмерного ОИУ он равен $-\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)/3$). Далее можно положить $\mathbf{r}_{0\tau} = \mathbf{r}_{\tau}$, т.е. рассматривать любую точку на S . Для диэлектрика с потерями как функция Ганкеля, так и функция Макдональда комплексные. Моды такого ДВ классифицируются как втекающие и вытекающие [9,30]. Вытекание характеризуется величиной $\text{Re}(\kappa) = \text{Re}\sqrt{k_0^2 - \gamma^2(\omega)}$. Определяя $\text{Re}(\gamma)$, получаем угол вытекания $\vartheta = \arctan(\text{Re}(\kappa)/\text{Re}(\gamma))$. Если он отрицательный, волна втекает, т.е. поток энергии идет под углом из вакуума в диэлектрик. Граница между быстрыми и медленными волнами определяется условием $\gamma = k_0$, которое для ДУ играет ту же роль, как критические частоты в полых волноводах. Волна при условии $\gamma = k_0$ идет со скоростью света, она поперечно не ограничена, и вся ее энергия переносится в вакууме. Граница между втеканием и вытеканием определяется условием $\vartheta = 0$. В частности, быстрыми втекающими волнами являются поверхностные волны типа волн Зоммерфельда-Ценнека в диссипативных волноведущих

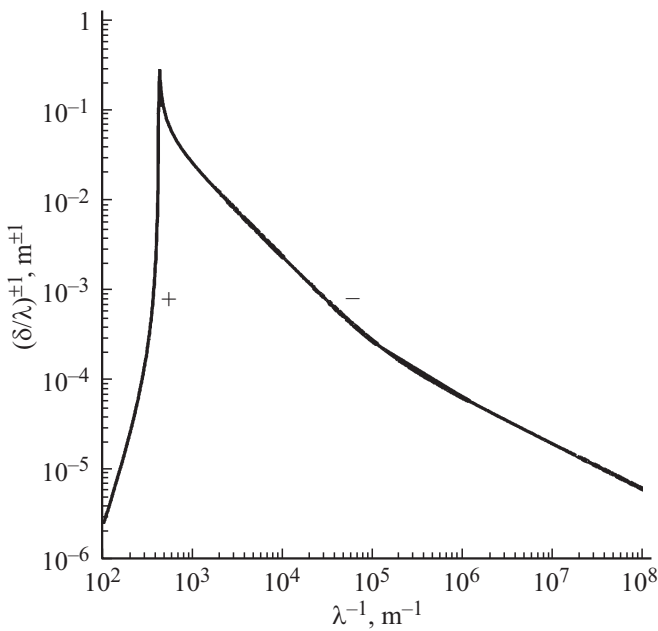


Рис. 5. Нормированная к длине волны глубина проникновения в серебро (+) и обратная ей величина (–) в зависимости от обратной длины волны λ^{-1} .

структурах [9,30]. Медленными втекающими волнами являются поверхностные плазмоны вдоль сильно диссипативных структур. Металлы описываются как диссипативные диэлектрики, причем глубина проникновения поля в металл сильно зависит от типа скин-эффекта и частоты. Расчет нормированной к длине волны глубины проникновения для серебра дан на рис. 5 [29]. Во всем диапазоне она не опускается ниже 200 nm, причем имеет широкий минимум в диапазоне длин волн от 5 μ m до 1 mm. Поэтому тонкие металлические пленки и наноструктуры, поперечные размеры которых меньше 200 nm, можно описывать ОИУ. При этом для очень тонких пленок поле в поперечном направлении почти не изменяется. Такие пленки даже можно описывать поверхностной проводимостью.

Переход от медленных плазмонов к быстрым имеет место в области $-1 < \epsilon' < 0$, что соответствует для металлов оптическому или ИК диапазону. Таким образом, метод ОИУ применим и к диэлектрическим структурам с тонкими металлическими пленками или наноразмерными включениями. В частности, на основе него можно моделировать локализованные плазмоны в малых металлических частицах или плазмонные электромагнитные кристаллы (ФК с малыми металлическими включениями). Здесь следует отметить, что уравнение (22) для изотропных однородных металлических частиц в вакууме принимает вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})(2 + \epsilon)/3 = (\epsilon - 1)p.v. \int_V (\nabla \otimes \nabla + k_0^2 \hat{I}) \times G_0(k_0, \mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

Его нельзя решить при $\epsilon = -2$ из-за возникновения полюса. Реально ДП металла комплексная, но если диссипация мала, точка $\epsilon' = \text{Re}(\epsilon) = -2$ является точкой сгущения спектра колебаний локализованных плазмонов [74]. В этой области при малых потерях следует использовать другие ОИУ.

Поскольку теперь ток поляризации имеет вид $\mathbf{J}^p(x, y) = i\omega\epsilon_0[\epsilon(x, y) - 1]\mathbf{E}(x, y)$, то двумерное ОИУ формулируются по типу вышеприведенных уравнений в области поперечного сечения S . Хотя мы используем в уравнениях поля, зависящие от поперечных координат, реально все поля также имеют зависимость $\exp(-i\gamma z)$. Это означает, что следует использовать оператор $\nabla \otimes \nabla = (\nabla_\tau + \mathbf{z}_0\gamma) \otimes (\nabla_\tau + \mathbf{z}_0\gamma)$, где $\nabla_\tau = \mathbf{x}_0\partial_x + \mathbf{y}_0\partial_y$. Выделяя в этом операторе часть $\nabla_\tau \otimes \nabla_\tau$, можно преобразовать гиперсингулярное ОИУ с выделенным внеинтегральным членом интегралом в смысле главного значения. Другие возможные виды ОИУ получаются преобразованиями путем переноса оператора ∇_τ на подынтегральные функции. Такие ОИУ становятся нагруженными контурными интегралами, в которых содержатся производные. Поэтому их следует трактовать как ИДУ. Таким образом, в уравнения непосредственно входят параметр γ , k_0 и спектральный параметр $\kappa = \sqrt{k_0^2 - \gamma^2(\omega)}$ или $q = \sqrt{\gamma^2(\omega) - k_0^2}$. В двумерных ФК в виде набора периодически расположенных в поперечном сечении диэлектрических цилиндров можно использовать приведенную ФГ (35), преобразованную с использованием периодичности:

$$\tilde{G}_\tau(\omega, \gamma, \mathbf{r}_\tau - \mathbf{r}'_\tau) = \frac{1}{ab} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \times \frac{\exp(-i\tilde{k}_{xm}(x - x') - i\tilde{k}_{yn}(y - y'))}{\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2 - (k_0^2 - \gamma^2(\omega))}. \quad (38)$$

Здесь мы для простоты привели ФГ для прямоугольной ячейки с периодами a и b , поэтому $\tilde{k}_{xm} = k_x + 2m\pi/a$, $\tilde{k}_{yn} = k_y + 2n\pi/b$. Волна в таком ФК идет по всем трем направлениям: в продольном это обычная волна, а в поперечном это блоховская волна, определяемая k_x и k_y . Для выявления волноведущих свойств в продольном направлении двумерный ФК должен иметь дефект. В качестве дефекта может быть цилиндрическая полость. Такие ДВ известны как фотонно-кристаллические волноводы (ФКВ) типа полый канал в периодической оболочке. Если рабочая область попадает в запрещенную зону регулярного двумерного ФК, такой волновод канализирует моду вдоль оси z . Дефект может быть и в виде оптически более плотного включения. Учесть дефект можно, добавив соответствующие его току поляризации члены в двумерное ОИУ. При этом в случае дефекта в виде полого канала „добавление“ сводится к вычитанию вклада от тока поляризации удаленных элементов ФК, а в случае дефекта в виде оптически более плотного включения — к добавлению вклада от дополнительного тока поляризации. Такой подход алгоритмически

существенно проще, чем обычно используемые методы анализа ФКВ [75,76].

В силу аналогии мы не приводим виды ИДУ, получаемые переносом действия оператора ∇_{τ} с ядра на подынтегральную функцию. Из-за наличия продольного члена, связанного с параметром γ , они имеют несколько более громоздкие виды. Вместо интегралов по поверхности они нагружены контурными интегралами по контуру поперечного сечения. Используя эти уравнения, можно получить функционалы, стационарные значения которых определяют либо спектральный параметр (поперечное волновое число), либо искомое продольное волновое число γ . Для ДВ и ФКВ из диэлектрических элементов можно также сформулировать ИДУ относительно только магнитного поля. Поскольку магнитное поле не терпит скачков на поверхностях раздела, оно удобно, так как векторные базисные функции не надо подчинять условиям разрыва нормальных компонент на поверхностях. В работе [76] использовано ОИУ для конечной оболочки фотонно-кристаллического волновода для расчета его мод. В работе [77] метод ОИУ использован для анализа мод 2D ФК из нанопроволок. ОИУ для анализа мод прямоугольного ДВ использованы в работах [9,78]. Хотя открытый прямоугольный ДВ является простой структурой, анализ его мод на основе разложения полей в областях и сшивания весьма сложен [79–89]. Моды являются гибридными, имеющими все шесть компонент. Относительно классификации мод также нет единообразия. Их можно классифицировать как HE_{mn} и EH_{mn} , где m и n определяют примерное число вариаций компонент H_z или E_z вдоль x и y в поперечном сечении в случае распространяющейся поверхностной моды. Колеблущееся поле выходит за пределы диэлектрика, поэтому эти индексы не целые (приблизительно целые). Ясно, что поля мод будут симметричными/антисимметричными относительно плоскостей $x = 0$, $y = 0$. В случае $\omega \rightarrow \infty$ или $\varepsilon \rightarrow \infty$ поле не выходит за пределы прямоугольной области, дисперсия стремится к значению $\gamma(\omega) = k_0\sqrt{\varepsilon}$, и мода HE_{mn} переходит в E_{mn} , а мода EH_{mn} — в E_{mn} . В работе [79] две основные моды классифицируются как HE_{\perp} и HE_{\parallel} или как четная и нечетная по отношению к поперечному электрическому полю. В первом случае электрическое поле перпендикулярно максимальной стороне ДВ, а во втором случае оно параллельно ей. Принятая в работах [79,80] схема классификации основана на том факте, что при большом соотношении сторон и небольшой разнице показателей преломления в пределе короткой длины волны поперечное электрическое поле в основном параллельно одной из поперечных осей. Режимы обозначаются как E_{mn}^y , если в пределе их электрическое поле параллельно оси y , и как E_{mn}^x , если в пределе их электрическое поле параллельно оси x . Индексы m и n используются для обозначения количества максимумов в направлениях x и y соответственно. Обычно поперечные компоненты волноводных мод выражают через продольные компоненты E_z и H_z или через векторы Герца. В случае

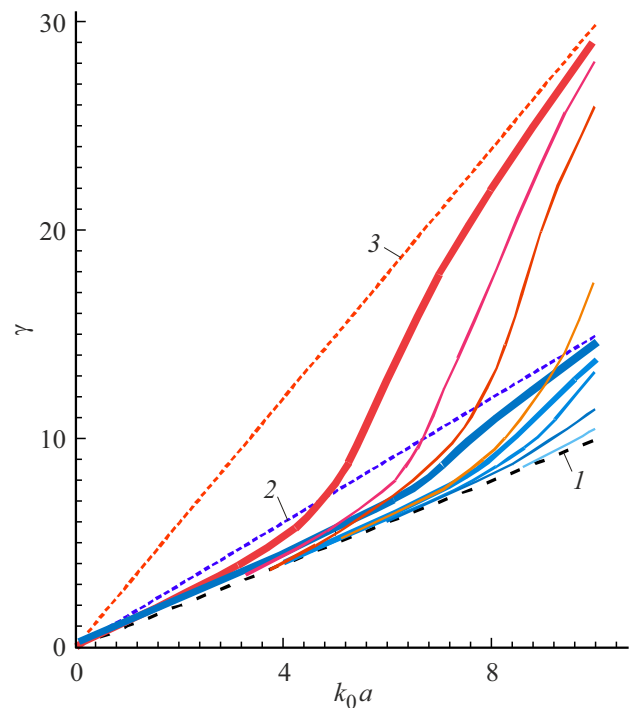


Рис. 6. Дисперсия первых нескольких HE_{mn} мод ДВ квадратного сечения для ДП с $\varepsilon = 2.25$ и $\varepsilon = 9.0$. Штриховая линия 1 обозначает низкочастотную отсечку $\gamma = k_0$, штриховая линия 2 — $\gamma = k_0\sqrt{2.25}$, линия 3 — $\gamma = 3k_0$. Кривые для $\varepsilon = 2.25$ лежат между линиями 1 и 2, кривые для $\varepsilon = 9.0$ — между линиями 1 и 3. Моды без отсечки — HE_{11} . Использованы квадратные конечные элементы.

прямоугольного ДВ вместо них можно выбирать поперечные компоненты, причем этот выбор не однозначен. Граничные условия требуют рассмотрения всех шести компонент, т.е. моды гибридные. В этом плане метод ОИУ с использованием конечных элементов удобен тем, что не требует выполнения граничных условий (они автоматически выполняются при решении), что особенно удобно для сложных границ. Сравнительный анализ ряда методов расчета ДВ дан в [89].

На рис. 6 приведены результаты расчета дисперсии в квадратном ДВ. Решение получено с использованием квадратных кусочно-постоянных двумерных КЭ. Использованы ОИУ с интегрируемым ядром и итерационный метод определения спектрального параметра. В точке отсечки полагалось $\gamma = k_0$, для каждой из частот больше критической решалось дисперсионное уравнение методом итераций. Итерационный метод удобен тем, что если на некой частоте ω получено сходящееся решение, например $\gamma(\omega)$, то изменяя частоту на малую величину $\Delta\omega$ и используя в качестве начального приближения предыдущее решение, достаточно точно и быстро получаем значение $\gamma(\omega + \Delta\omega)$ для той же моды на близкой частоте. Тем самым можно получить дисперсионные кривые в области, где нет их пересече-

ния. Метод итераций позволяет определять и быстрые комплексные вытекающие моды.

5. Плазмонные волноводы и локализованные плазмоны

Взяв ДВ в виде прямоугольной области сечения $a \times b$ и определив ДП по модели Друде-Лоренца, получим модель плазмонного волновода. В области частот, где реальная часть ДП отрицательная, в таком волноводе распространяются плазмон-поляритоны (ПП). Медленные ПП существуют в области $\varepsilon'_m(\omega) = \text{Re}(\varepsilon'_m) < -1$, там, где диссипация $\varepsilon''_m(\omega)$ не слишком велика. Это область плазмонного резонанса. Обычно ПП рассматривают в слое толщины a при $b \rightarrow \infty$ или в структуре из нескольких слоев, используя метод сшивания. Такие ПП имеют три компоненты поля E_x , E_z и H_y . Метод ОИУ позволяет рассматривать ПП в конечной пластине, когда имеются все шесть компонент полей. На низких частотах скорость ПП близка к скорости света c , и они представляют собой слабо втекающие волны. Замедление ПП в области плазмонного резонанса тем больше, чем меньше толщина a , при этом поддерживаются как прямые, так и обратные поверхностные волны [90]. Сильное замедление получается при толщинах порядка нм. Увеличение замедления связано с взаимодействием поверхностных волн на двух сторонах. Для тонких конечных структур ОИУ весьма удобны, поскольку число КЭ невелико. На рис. 7 дан пример моделирования квази-Е-ПП для соотношения сторон $b/a = 100$ и $b/a = 10$. Алгоритм строился следующим образом. Вычислялась дисперсия $\gamma = k_z$ для Е-ПП на основе строгого дисперсионного уравнения, полученного методом сшивания. Указанный результат использовался в качестве начального приближения в функционале относительно $\gamma = k_z$, который получен на основе ОИУ, которое решалось итерационно совместно с вычислением γ . Было использовано 300 КЭ. Аналогичный подход к моделированию ПП может быть применен для слоистых и неоднородных плазмонных волноводов, а также в случае произвольных поперечных сечений. На высоких частотах металл приобретает свойства диэлектрика с потерями, и рассмотренные алгоритмы могут описывать моды ДВ. Это в большей степени относится к полупроводниковым волноводам, у которых плазменные частоты лежат существенно ниже, чем у металлов. Материалы для плазмоники и плазмонные волноводы рассмотрены в работе [91].

Методы типа ОИУ широко применяются к анализу локализованных плазмонов. Здесь подход тот же, что и для ДР, но с учетом ДП металлов. Внедренные в ткани и возбуждаемые лазером золотые наночастицы воздействуют на окружающую их область. Такие методы широко применяются в медицине. Существенное усиление поля возможно при дипольном, квадрупольном и ином мультипольном возбуждении нескольких частиц.

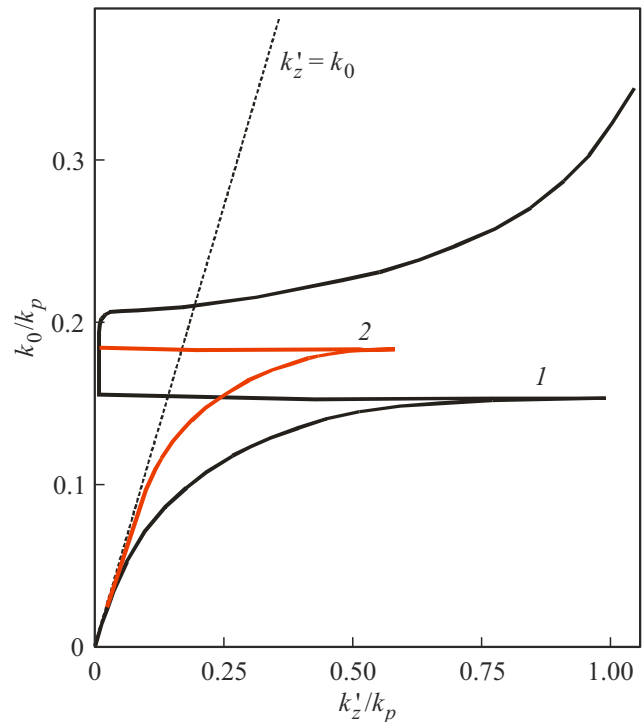


Рис. 7. Нормированное к плазмонному волновому числу $k_p = \omega_p/c$ замедление k'_z (по оси абсцисс) в зависимости от нормированного волнового числа (ось ординат) для медленного ПП вдоль слоя серебра толщины 2 нм (кривая 1) и 10 нм (кривая 2). Кривая 1 построена для $b/a = 100$, кривая 2 — для $b/a = 10$. $\omega_p = 1.57 \cdot 10^{16}$, $\omega_c = 3.6 \cdot 10^{13}$ Hz.

Аналізу локализованных плазмонов методом ОИУ посвящен ряд работ, например работа [92]. Некоторые ее результаты представлены на рис. 8, 9.

6. Численные алгоритмы для задач дифракции

Задачам дифракции соответствуют неоднородные ОИУ. Если они сформулированы относительно электрического и магнитного полей, то введем бивектор $\mathbf{F}^p = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$, а также бивектор $\mathbf{F}^0 = (\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0)$. Последний состоит из сторонних полей. Они же являются падающими полями и могут являться полем плоской волны или, например, полем диполя. Полное поле есть $\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}^p$. Именно оно действует на тело, вызывая поляризацию, что эквивалентно соотношению $\mathbf{F}^p(\mathbf{r}) = \hat{K}(\mathbf{r}, \mathbf{F})$, где $\hat{K}(\mathbf{r}, \mathbf{F})$ — один из интегродифференциальных операторов, определенных выше. Таким образом, задача дифракции определяется так:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^0(\mathbf{r}) + \mathbf{F}^p(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^0(\mathbf{r}) + \hat{K}(\mathbf{r}, \mathbf{F}). \quad (39)$$

Если мы используем только ОИУ относительно электрического поля, то все величины \mathbf{F} заменяем на \mathbf{E} . Приближенным решением уравнения (39) является

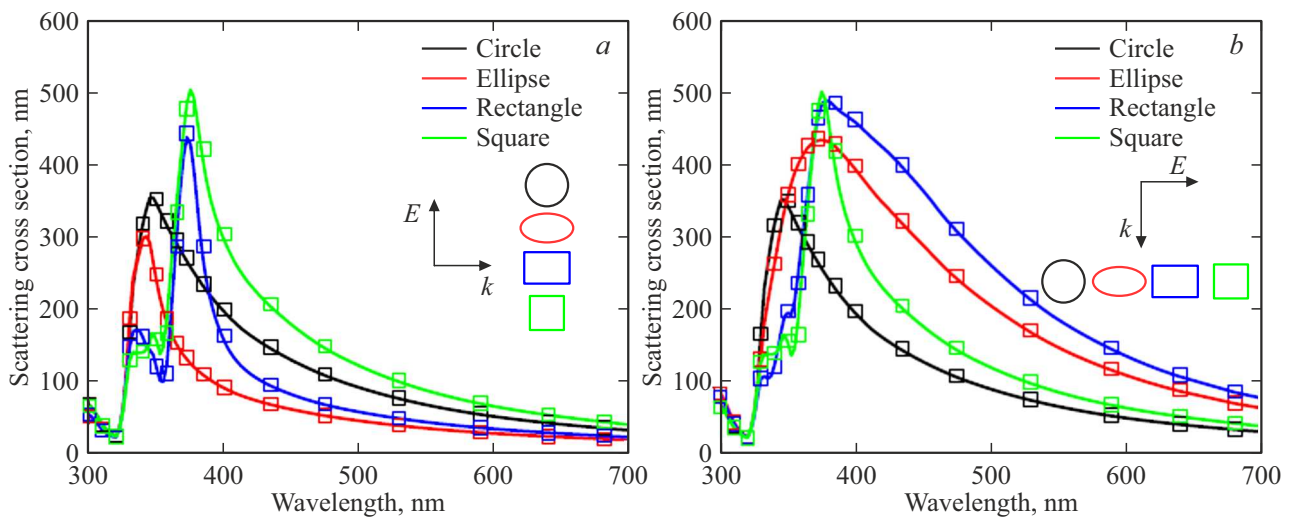


Рис. 8. Сечение рассеяния (по данным работы [92]) при углах падения света 180° (a) и 90° (b) в зависимости от длины волны для цилиндров различной формы, вычисленных методом ОИУ (сплошные линии) и методом граничных элементов (квадратные символы). Как для эллиптических, так и для прямоугольных цилиндров их поверхностные плазмонные резонансы имеют красное смещение, а их полные ширины при половинном максимуме увеличиваются при смене угла падения света с 180° на 90° .

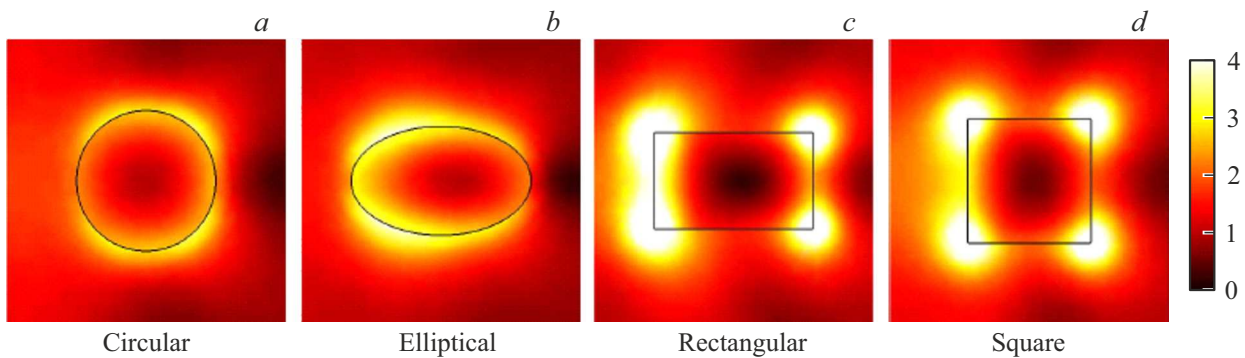


Рис. 9. Нормализованное распределение ближнего поля круглых (a), эллиптических (b), прямоугольных (c), квадратных (d) наночастиц (по данным работы [92]) на их соответствующих резонансных длинах волн при облучении светом под углом падения 180° , как показано на вставке рис. 8, a.

$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^0(\mathbf{r}) + \hat{K}(\mathbf{r}, \mathbf{F}^0)$. Однако дальнейшее использование последовательных приближений может не приводить к сходящемуся результату, если параметр $\varepsilon - 1$ (или аналогичный ему параметр) велик. Это ограничивает метод близкими к единице ДП. По крайней мере должно быть $0 < \varepsilon < 2$. Если использовать сингулярное ОИУ с выделением особенности, то получим $\varepsilon < 2.5$. Поэтому уравнения типа (39) решаются численными методами путем обращения систем линейных уравнений большого порядка. Здесь возможны разные подходы: проекционный (типа методов моментов) и Галеркина на различных базисных и весовых функциях, методы коллокаций, вариационные подходы с построением функционалов. Все они следуют из минимизации обобщенных взвешенных невязок [93]. Мы рассмотрели тело конечного объема, поэтому при использовании в качестве стороннего поля диполя возникает задача о возбуждении такого тела. Аналогичная задача возникает

при возбуждении тела плоской волной. Для задач о возбуждении идеального диэлектрического шара известны аналитические решения [68–70]. Любая задача о возбуждении электрическим и магнитным диполями есть задача нахождения компонент тензорной ФГ-структуры. Для полной такой ФГ следует рассмотреть все ориентации диполей. В дальней зоне поле такой запаздывающей ФГ представляет собой расходящиеся сферические волны [28]. Для диэлектрического тела сложной формы можно использовать ОИУ относительно магнитного поля и в качестве базисных функций брать его разложение по сферическим гармоникам в сфере, описывающей тело, а интегрировать по объему тела. Это требует численного интегрирования. Решение задач о возбуждении точечными диполями в принципе позволяет решить задачу о возбуждении произвольными источниками.

Приведенные уравнения легко преобразовываются к виду, когда по одной из координат задача или

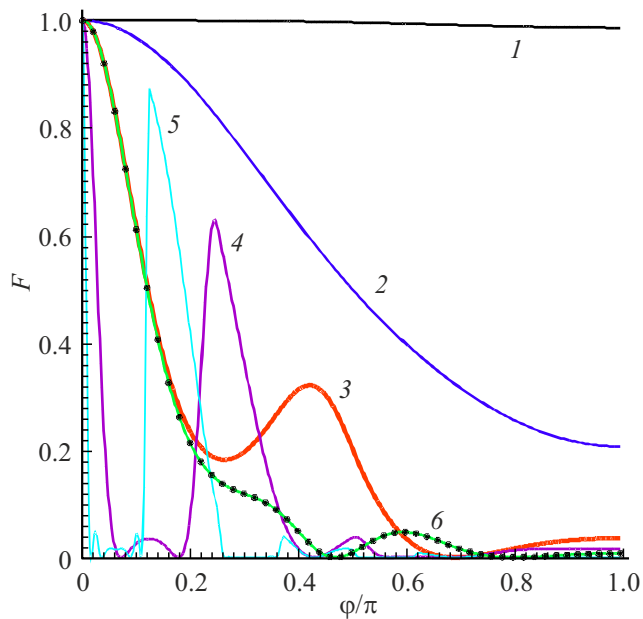


Рис. 10. Диаграмма направленности $F(\varphi/\pi) = |E_z(\varphi/\pi)/E_z(0)|^2$ рассеяния плоской волны, поляризованной вдоль оси квадратного диэлектрического цилиндра при разных значениях k_0a : 1 — 0.1, 2 — 1.0, 3, 6 — 2.0, 4 — 4.0, 5 — 8.0. Кривые 1–5 построены для $\varepsilon = 2.25$, кривая 6 — для $\varepsilon = 4$.

структура бесконечные. Разрешимость таких двумерных ОИУ, сформулированных относительно электрического или магнитного полей, рассмотрена в [19]. В работах [8,20,21] доказана разрешимость сингулярных ОИУ. Обычно рассматривают возбуждение таких структур плоскими волнами. Численные подходы к решению ОИУ исследованы в [10,13]. В качестве решенных задач методом шивания отметим дифракцию на круглых диэлектрическом или эллиптическом цилиндрах [70]. Разложение по цилиндрическим гармоникам можно использовать при решении задач о дифракциях на цилиндрах сложного поперечного сечения. Отдельно коснемся задачи о периодически расположенных в одном из поперечных направлений цилиндрических структурах. Это задача о дифракции на конечном в одном из направлений элементе ФК. Также можно рассматривать и полубесконечную в этом направлении область ФК. Такая задача может быть поставлена и для полубесконечного 3D ФК. Она не может быть решена в рамках приведенных ОИУ, поскольку содержит бесконечные области интегрирования. Ее решение возможно при учете конечного, но большого числа периодов.

Дифракция на двумерных структурах описывается на основе 2D скалярной ФГ $G(\mathbf{r}_\tau - \mathbf{r}'_\tau) = -(i/4)H_0^{(2)}(k_0R)$, $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$. В этом случае обычно рассматривают задачу дифракции плоской волны $\mathbf{E} = \mathbf{y}_0 E_0 \exp(-ik_0x)$, $\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 \eta^{-1} E_0 \exp(-ik_0x)$ ТЕ-поляризации или волны $\mathbf{E} = \mathbf{z}_0 E_0 \exp(-ik_0z)$, $\mathbf{H} = -\mathbf{y}_0 \eta_0^{-1} E_0 \exp(-ik_0z)$ ТН-поляризации на диэлектриче-

ском цилиндре произвольного сечения, расположенном в начале координат вдоль оси z (см., например, [94]). На рис. 10 приведена диаграмма направленности $F(\varphi/\pi) = |E_z(\varphi/(\varphi/\pi))/E_z(0)|^2$ дифракции на изотропном квадратном диэлектрическом цилиндре с размером сторон $2a$.

Основанные на ОИУ алгоритмы можно строить на основе проекционных или вариационных подходов с одинаковыми или разными базисными и весовыми функциями. В первом случае получаем методы типа соответственно Галеркина (Бубнова-Галеркина) и моментов, а во втором — квадратичные или билинейные функционалы. Все они приводят к системам линейных алгебраических уравнений, которые следует решать итерационно. Прямые методы возможны для тел малых электрических размеров. Иначе возникает плохая обусловленность. Часто можно получить функционалы для некоторых параметров задачи: квадратов резонансных частот ДР, коэффициентов отражения, входных импедансов, диаграмм направленности и т.п. Их следует находить итерационно совместно с итерационным решением ОИУ [9,65]. В случае тел малого электрического размера и при малой диэлектрической восприимчивости $\chi = \varepsilon - 1 < 1$, когда возмущение поля \mathbf{E}_0 мало, можно использовать теорию возмущений (МПП) для уравнений типа Липпмана-Швингера. Это требует вычисления кратных объемных интегралов, а сформулированные условия малости для реальных задач почти никогда не выполняются. В случае формулировки в виде билинейного функционала с дифференцируемыми весовыми функциями удобно перенести действие оператора \hat{D} на весовые функции. В этом случае для получения матричных элементов нужно интегрировать со слабо сингулярным ядром $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

В последнее время методам, связанным с ОИУ, уделяется большое внимание, и они все более широко используются. Следует отметить монографии [95–97], в которых основное внимание уделено математическим вопросам доказательства фредгольмовости операторов и разрешимости задач, а также две монографии [98,99], имеющие непосредственное отношение к рассматриваемым вопросам и посвященные преобразованию и решению уравнений электродинамики, включая и вариационные подходы. В работах [100–111] исследуются алгоритмы решения задач для конкретных структур методом ОИУ с обоснованием различных аппроксимаций решений. В частности, развиваются итерационные подходы к получению решений [109–112].

Если решена спектральная задача, т.е. найдены поля как функции частоты, то получение зависящего от времени нестационарного решения можно выполнить обращением по Фурье. Это, однако, математически сложная задача, особенно если использовать численные методы определения спектральных интегралов, которые необходимы для большинства подобных задач. В ряде работ сформулированы и использованы пространственно-временные ОИУ [14,15,23,31,112–118]. Их удобно основывать на скалярной ФГ $g(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}')$,

которая дается обратным преобразованием Фурье от $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и имеет вид $g(t, \mathbf{r}) = (4\pi)^{-1} \delta(t - |\mathbf{r}|/c)$. Для диэлектрических тел следует вводить поляризацию $\mathbf{P}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{D}(t, \mathbf{r}) - \varepsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, ток поляризации $\mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = \partial_t \mathbf{P}(t, \mathbf{r})$ и определять электрическую индукцию \mathbf{D} через интегральную связь с полем. Наиболее просто уравнения получаются при отсутствии пространственной дисперсии. Тогда \mathbf{D} связано с \mathbf{E} интегральным оператором с ядром $\varepsilon_0 \varepsilon(t - t', \mathbf{r})$, где $\varepsilon(t, \mathbf{r})$ есть обратное преобразование от $\varepsilon(\omega, \mathbf{r})$, а интегрирование идет по t' . Ядро удовлетворяет принципу причинности: $\varepsilon(t, \mathbf{r}) = 0$ для $t > 0$, что означает вклад в поляризацию только от электрических полей в предшествующие моменты времени. Учет пространственной дисперсии приводит к тому, что связь становится нелокальной с ядром $\varepsilon_0 \varepsilon(t - t', \mathbf{r} - \mathbf{r}')$ и определяется пространственным и временным интегралами. В пространственном интеграле следует учитывать только те точки в окрестности точки \mathbf{r} , для которых $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < c(t - t')$, т.е. для которых возмущение успевает дойти в точку наблюдения. В получающихся ОИУ возникает функция Хевисайда $\chi(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$, указывающая на то, что вклад в поле в некоторой точке в данный момент $\chi(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)$ вносят только те точки тела в момент t' , возмущение от которых успевает дойти со скоростью света c . Наиболее простые нестационарные уравнения возникают при локальных во времени и в пространстве связях $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Однако такие связи возможны, когда дисперсией ДП можно пренебречь, что обычно бывает при весьма низкочастотном спектре волнового пакета.

Как отмечалось, металлическое тело можно описать ДП. Но когда в основной части спектра глубина проникновения пренебрежимо мала по сравнению с размерами тела, его удобно описывать поверхностной плотностью тока \mathbf{j} . Ее следует также вводить в случае графеновых и аналогичных им двумерных структур в присутствии диэлектрических тел. В этом случае дополнительно возникают поверхностные интегралы, а уравнения становятся комбинированными объемно-поверхностными. Введению и использованию таких уравнений в последнее время посвящено много работ, например [118–120]. Рассматриваются уравнения как относительно полей, так и относительно потенциалов. Поскольку потенциалы могут быть введены разными способами, то и возможных уравнений также может быть много. Рассматриваются различные аппроксимации как в объеме, так и на поверхности. Каждому уравнению можно сопоставить несколько алгоритмов. Они для комбинированных объемно-поверхностных уравнений более сложные, поскольку требуют еще определения поверхностного тока \mathbf{j} . Последний удовлетворяет уравнению непрерывности, поэтому при преобразовании поверхностного интеграла с переносом на него оператора дивергенции необходимо определять плотность поверхностного заряда $\sigma(\omega, \mathbf{r}_s) = i\omega^{-1} \nabla_s \cdot \mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}_s)$. Индекс s здесь означает касательный к поверхности радиус-

вектор и поверхностную дивергенцию. На таких поверхностях накладывают импедансное граничное условие $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}_s) = Z_s(\mathbf{r}_s) \mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}_s)$, которое является дополнительным условием для определения \mathbf{j} . Еще раз подчеркнем, что из решения ОИУ внутри тела автоматически следуют граничные условия для поля \mathbf{E} на границе тела и условия излучения на бесконечности. В англоязычной литературе используются классификации уравнений: ИУ относительно электрического поля (EFIE), магнитного поля (MFIE), относительно смешанных потенциалов (MPIE), объемно-поверхностные ИУ (VSIE), гибридные ИУ и др. Сочетание поверхностных и объемных ИУ позволяет анализировать все возможные структуры, встречающиеся в задачах электродинамики и оптики.

7. Вычисление матричных элементов

Матричные элементы для простых конфигураций (куба и т.п.) можно строить с использованием фурье-базисов типа синусов и косинусов. Однако более общий подход, применимый для тел сложной формы, основан на КЭ. Для этого необходима дискретизация объема тел. Для ОИУ, по-видимому, наиболее удобна кубическая дискретизация с размером куба Δ . Самые простые конечные элементы — кусочно-постоянные. Они строятся на одиночном кубе и требуют интегрируемости ядер. Для гладких КЭ обычно требуется 3 или 5 точек дискретизации по каждой их переменных, т.е. 27 или 125 таких кубиков на объемный КЭ, который привязан к центральному узлу. Также возможны различные аппроксимации КЭ полиномами. Гладкие (дифференцируемые) КЭ приводят к сложным алгоритмам, особенно при сложных границах раздела. Более удобны квадратурные формулы вычисления интегралов. Поскольку интегралы в матричном элементе шестикратные по двум пространственным переменным \mathbf{r} и \mathbf{r}' , удобно смещать точки узлов $\mathbf{r}_j, \mathbf{r}'_j$, например, на величину $\Delta/2$ по каждой из переменных. Для ядер в координатном представлении удобно считать подинтегральные выражения постоянными. В этом случае матричные элементы вычисляются максимально просто, а диагональные элементы конечные. При ОИУ с выделенным внеинтегральным членом диагональные элементы следует обнулить. Для ядер в пространственно-спектральном представлении зависимость от координат имеет вид $\exp(-i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$. Интегрирование с этой функцией на смещенных КЭ приводит к результату $f_{jj'}(\mathbf{k}) = f(k_x, x_j - x'_{j'}) f(k_y, y_j - y'_{j'}) f(k_z, z_j - z'_{j'})$, где $f(k, x) = \Delta \exp(-ikx) \sin c(k\Delta)$, где обозначена функция $\sin c(x) = \sin(x)/x$. Поэтому матричные элементы определяются как интегралы в \mathbf{k} -пространстве от величин $\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) f_{jj'}(\mathbf{k})$, где $\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$ — спектральные части тензорных ФГ. Эти интегралы обычно сходятся медленно, поэтому значительные усилия при получении алгоритмов могут быть затрачены на улучшение

сходимости интегралов. Для слабо сингулярных ядер с особенностями $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\alpha}$, $\alpha = 1, 2$ при вычислении диагональных матричных элементов удобно заменить кубическую ячейку на шар эквивалентного объема: $\Delta^3 = 4\pi r_0^3/3$. Тогда интегрирование в приближении постоянства взятых в ячейке функций выполняется аналитически:

$$\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 \leq r_0^2} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\alpha} d^3r d^3r' = 4\pi\Delta^3 r^{2-\alpha} dr = 4\pi\Delta^{6-\alpha} (3/(4\pi))^{3-\alpha/3} / (3-\alpha).$$

Можно использовать и другие аппроксимации для вычисления матричных элементов. В задаче о ДР рис. 1–3 в силу азимутальной симметрии ядро имеет слабую особенность, и использованы квадратурные формулы. Отметим, что здесь ОИУ для E_φ такое же, как и для компоненты вектора-потенциала. В задаче о ДВ использовано ОИУ с интегрируемым ядром и смещенные КЭ. В задаче о дисперсии в ФК использовано ОИУ с выделенным внеинтегральным членом и с периодически транслированной ФГ $G(k, \mathbf{r} - \mathbf{r}')$. В задаче о диаграмме направленности в качестве скалярной ФГ была использована функция Ганкеля [28] и дискретизация на смещенных сетках.

8. Заключение

В обзоре рассмотрены 3D и 2D ОИУ в частотной области и приведены их виды, описывающие свободные колебания и волны в ДР, ДВ и в световодах произвольной формы и анизотропии, включая учет неоднородных и нелинейных свойств, а также дифракцию на диэлектрических и магнитных телах. На основе таких уравнений можно анализировать плазмонные волноводы и локализованные плазмоны. Приведен обзор публикаций, где использован метод ОИУ. Обзор не претендует на полноту охвата материала. Что касается анализа ДР с нелинейными свойствами, то в сильном поле это сугубо нестационарная задача: по мере высвечивания поля из объема ДР падает интенсивность и меняется резонансная частота. Нестационарный подход следует использовать и для ДВ с нелинейным диэлектриком, поскольку нелинейность изменяет спектральный состав волнового пакета, и он весьма сложно распространяется вдоль ДВ, особенно если есть сильная частотная дисперсия и неоднородное (селективное) поглощение. Эта проблема связана с возбуждением ДВ и световодов мощными лазерными пучками, когда происходит размножение волн и генерация суперконтинуума. Соответственно следует рассматривать конечный спектр волн в волновом пакете и нестационарную задачу. Если все же спектр узкий, возможно одночастотное приближение. В данном обзоре мы коснулись проблемы нестационарных задач вскользь. Можно сформулировать нестационарные уравнения и

для волноведущих структур. Обзор не затронул численных методов и обоснований решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Для 1D уравнений этот термин ввел Ж. Адамар, а впервые рассмотрел поверхностные ИУ для электродинамики в 1949 г. А. Мауэ [121]. Эти уравнения долгое время непосредственно не использовались для численного решения, и только относительно недавно для них стали применяться алгоритмы. В 1D случае уравнения описывают тонкие вибраторные антенны. Для поверхностных гиперсингулярных ИУ методы основаны на представлении полей как конечной части интеграла в смысле значения по Адамару при стремлении точки наблюдения к поверхности. Теоретические подходы тесно связаны с теорией псевдодифференциальных операторов [33–35, 122]. Интересующемуся этими вопросами читателю можно рекомендовать литературу [122–125].

Приведенные в обзоре численные результаты для цилиндрического ДР, прямоугольного ДВ, дисперсии в ФК и в плазмонном волноводе, дифракции на диэлектрической структуре получены автором. Что касается эффективности и точности метода ОИУ, то его можно оценить на основе расчета резонансных частот ДР, которые можно вполне точно измерить. В частности, рис. 3 демонстрирует сходимость в зависимости от числа разбиений (узлов) по каждой из двух координат. Число пробных функций (порядок матрицы) здесь N^2 . При использовании гладких КЭ размерность задачи снижается примерно в 4 раза, т.е. для достижения той же точности необходимо в 4 раза меньше базисных функций. Однако такие КЭ приводят к усложнению алгоритма. Рассчитанные результаты для собственных частот примерно на 1–1.5% ниже, чем данные из работы [4], где также приведены результаты эксперимента. Результаты эксперимента по сравнению с расчетами в [4] на 1–2% выше. Для кривых 2, 3 рис. 3 уточнение по методу Эйткена дает частоту $f = 5.23752 \angle \text{GHz}$, тогда как в [4] приведена частота $f = 5.289 \text{ GHz}$. С другой стороны, решение самосопряженной задачи с линейным вхождением собственного значения k_0^{-2} (т.е. для ФГ при $k_0 = 0$) рассмотренными методами дает значения, практически совпадающие с [4]. Отсюда можно сделать вывод, что результаты [4] получены с недостатком. Частоты H_{011} колебаний при рассмотренной форме ДР примерно в полтора раза, а добротности более чем на порядок выше, чем для низшего типа $H_{01\delta}$ колебаний, поскольку в первом случае добротность связана с магнитно-дипольным излучением, а во втором — с магнитно-квадрупольным. Расчет показывают, что достижение высоких добротностей на низших модах требует использования значений $\varepsilon > 40$ при пренебрежимо малом тангенсе потерь. Качественно полную добротность можно оценить через радиационную из соотношения $Q^{-1} = Q_R^{-1} + \varepsilon''/\varepsilon'$, однако метод позволяет ее рассчитать, используя комплексную ДП. Если имеет место сильная частотная дисперсия ДП, то полученные уравнения всегда нуждаются в итерационном решении.

Действительно, параметр $k_0 = \omega/c$ входит в уравнения нелинейно (непосредственно и через ФГ), так же как и частота. Следует замораживать частоту в ДП, получать резонансную частоту, корректировать ДП и продолжать процесс до сходимости.

Метод ОИУ как инструмент исследования занимает свое определенное место в вычислительной электродинамике. Однако, на наш взгляд, он недостаточно оценен в плане своих возможностей, хотя и растет число использующих его публикаций. Он может быть применен в интегральной оптике, фотонике, плазмонике, для анализа и гомогенизации ФК (см., например, [16–18]), а также для 1D, 2D и 3D стационарных и нестационарных задач квантовой механики [15]. Кроме стационарных и нестационарных задач электродинамики он применялся и для задач магнитостатики с нелинейными магнитными структурами [126–129], к задачам механики, акустики [118] и к ряду других задач.

Финансирование работы

Эта работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки России в рамках выполнения государственного задания (проект № FSRR-2020-0004).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Н.А. Хижняк. ЖТФ, **28** (7), 1592–1604 (1958).
- [2] С. Müller. *Foundation of the mathematical theory of electromagnetic waves* (Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1969).
- [3] *Вычислительные методы в электродинамике*. Под ред. Р. Миттры (Мир, М., 1977). [*Computer techniques for electromagnetics*. Ed. R. Mittra (Pergamon Press, Oxford, N.Y., Toronto, Sydney, Braunschweig, 1973)].
- [4] Л.Б. Гольдберг, В.В. Пензяков. Радиотехника и электроника, **27** (9), 1735–1740 (1982).
- [5] Е.Н. Васильев. *Возбуждение тел вращения* (Радио и связь, М., 1987).
- [6] Н.А. Хижняк. *Интегральные уравнения макроскопической электродинамики* (Наукова думка, Киев, 1986).
- [7] В.И. Дмитриев, Е.В. Захаров. *Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики* (Изд-во МГУ, М., 1987).
- [8] А.Б. Самохин. *Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии* (Радио и связь, М., 1998).
- [9] М.В. Давидович. *Итерационные методы решения задач электродинамики* (Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2014).
- [10] М.М. Botha. *J. Computational Phys.*, **218** (1), 141–158 (2006). DOI: 10.1016/j.jcp.2006.02.004
- [11] M.I. Sancer, K. Sertel, J.L. Volakis, P. Van Alstine. *IEEE Trans.*, **AP-54** (5), 1488–1495 (2006). DOI: 10.1109/TAP.2006.874316
- [12] J. Markkanen, C.-C. Lu, X. Cao, P. Ylä-Oijala. *IEEE Trans.*, **AP-60** (5), 2367–2374 (2012). DOI: 10.1109/TAP.2012.2189704
- [13] J. Lee, M. Han. *Mathematics*, **8** (11), 1866(1–26) (2020). DOI: 10.3390/math8111866
- [14] М.В. Давидович. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика*, **21** (2), 116–132 (2021). [M.V. Davidovich. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Physics*, **21** (2), 116–132 (2021). DOI: 10.18500/1817-3020-2021-21-2-116-132].
- [15] М.В. Давидович. *Письма в ЖЭТФ*, **110** (7), 465–473 (2019). [M.V. Davidovich. *Jetp. Lett.*, **110** (7), 472–480. DOI: 10.1134/S0370274X19190068].
- [16] М.В. Давидович. *Письма в ЖЭТФ*, **108** (5), 299–326 (2018). [M.V. Davidovich. *JETP Letters*, **108** (5), 279–286 (2018). DOI: 10.1134/S0370274X18170010].
- [17] М.В. Давидович. *ЖЭТФ*, **154** (7), 5–25 (2018). [M.V. Davidovich. *JETP*, **127** (1), 1–19 (2018). DOI: 10.1134/S1063776118070178].
- [18] М.В. Давидович. *УФН*, **189** (12), 1250–1284 (2019). [M.V. Davidovich. *Phys. Usp.*, **62** (12), 1173–1207 (2019). DOI: 10.3367/UFNr.2019.08.038643].
- [19] M. Costabel, E. Darrigrand, H. Sakly. *Computers & Mathematics with Applications*, **70** (8), 2087–2101 (2015). DOI: 10.1016/j.camwa.2015.08.026
- [20] А.Б. Самохин. *Дифференциальные уравнения*, **50** (9), 1215–1230 (2014).
- [21] А.Б. Самохин, А.С. Самохина. *Дифференциальные уравнения*, **52** (9), 1221–1230 (2016). [A. Samokhin, A.S. Samokhina. *Differential Equations*, **52** (9), 1178–1187 (2016)].
- [22] А.Б. Самохин, А.С. Самохина, Ю.В. Шестопалов. *Дифференциальные уравнения*, **54** (9), 1251–1261 (2018). [A. Samokhin, A.S. Samokhina, Yu.V. Shestopalov. *Differential Equations*, **54** (9), 1225–1235 (2018)].
- [23] А.Б. Самохин, А.С. Самохина, К. Кобаяси. *Дифференциальные уравнения*, **55** (9), 1293–1300 (2019). [A.B. Samokhin, A.S. Samokhina, K. Kobayashi. *Differential Equations*, **55** (9), 1250–1257 (2019)].
- [24] А.Б. Самохин. *ЖВММФ*, **32** (5), 772–787 (1992). [A.B. Samokhin. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **32** (5), 673–686 (1992)].
- [25] А.Б. Самохин. *Дифференциальные уравнения*, **30** (12), 2162–2174 (1994). [A.B. Samokhin *Differ. Equ.*, **30** (12), 1987–1997 (1994)].
- [26] А.Б. Самохин. *Дифференциальные уравнения*, **31** (9), 1588–1590 (1995). [A.B. Samokhin. *Differ. Equ.*, **31** (9), 1548–1551 (1995)].
- [27] А.Б. Самохин. *Дифференциальные уравнения*, **37** (10), 1357–1363 (2001). [A.B. Samokhin. *Differ. Equ.*, **37** (10), 1427–1434 (2001)].
- [28] Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. *Возбуждение электромагнитных волн* (Радио и связь, М., 1983).
- [29] М.В. Давидович. *ЖЭТФ*, **159** (2), 195–215 (2021). [M.V. Davidovich. *JETP*, **32** (2), 159–176 (2021). DOI: 10.1134/S1063776121020102].
- [30] Л.А. Вайнштейн. *Электромагнитные волны* (Радио и связь, М., 1988).
- [31] М.В. Давидович. *Радиотехника и электроника*, **46** (11), 1285–1292 (2001).
- [32] T. Søndergaard. *Phys. Rev. B*, **66**, 155309 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevB.66.155309

- [33] Г.Э. Эскин. *Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений* (Наука, М., 1973).
- [34] М. Тейлор. *Псевдодифференциальные операторы* (Мир, М., 1985) [M. Taylor. *Pseudo differential operators* (Springer, 1974)].
- [35] А.С. Ильинский, Ю.Г. Смирнов. *Дифракция электромагнитных волн на проводящих экранах (псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции)* (ИПРЖР, М., 1996).
- [36] А.С. Ильинский. *Радиотехника и электроника*, **50** (2), 134–139 (2005).
- [37] А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. *Математические модели электродинамики* (Высшая школа, М., 1991).
- [38] S.G. Mikhlin. *Uspekhi Mat. Nauk*, **3** (3), 29–112 (1948).
- [39] С.Г. Михлин. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения* (ГИФМЛ, М., 1962).
- [40] М.В. Давидович. *Радиотехника*, **10**, 57–62 (2014).
- [41] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1977).
- [42] Г. Корн, Т. Корн. *Справочник по математике для научных работников и инженеров* (Наука, М., 1973).
- [43] Г.Т. Марков, Б.А. Панченко. *Известия вузов СССР. Радиотехника*, **7** (1), 34–41 (1964).
- [44] М.В. Давидович. *ЖТФ*, **83** (7), 135–145 (2013) [M.V. Davidovich. *Technical Physics*, **58** (7), 1061–1072 (2013). DOI: 10.1134/S1063784213070049].
- [45] J. Schwinger, L. DeRaad, K. Milton. *Annals of Physics*, **115** (1), 676–698 (1978).
- [46] N.K. Das, D.M. Pozar. *IEEE Trans.*, **MTT-35** (3), 326–333 (1987). DOI: 10.1109/TMTT.1987.1133646
- [47] K.A. Michalski, J.R. Mosig. *IEEE Trans.*, **AP-45** (3), 508–519 (1997). DOI: 10.1109/8.558666
- [48] K. Li. In: *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium & USNC/URSI National Radio Science Meeting. 1999 Digest*, vol. 2, p. 1266–1269. DOI: 10.1109/APS.1999.789544
- [49] T. Yuan, M. Zhang, L.-W. Li, L. Zhang, M.S. Leong. In: *IEEE 2004 Asia-Pacific Radio Science Conference*, p. 277–279. DOI: 10.1109/APRASC.2004.1422524
- [50] T.F. Elshafiey, J.T. Aberle. *IEEE Trans.*, **MTT-54** (2), 513–521 (2006). DOI: 10.1109/TMTT.2005.862706
- [51] M.V. Davidovich. In: *Modeling in applied electromagnetics and electronics*, Saratov University Press, Saratov, **7**, 30–38 (2006).
- [52] Л.Ц. Дао. *Математические методы в физике* (Мир, М., 1965).
- [53] Н.М. Гюнтер. *Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики* (ГИИТЛ, М., 1953).
- [54] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1977).
- [55] *Диэлектрические резонаторы*, под ред. М.Е. Ильченко (Радио и связь, М., 1989).
- [56] D. Kajfez, P. Guillon (eds.). *Dielectric Resonators* (Artech House, Nonwood, MA, 1986).
- [57] J. Van Bladel. *IEEE Trans.*, **MTT-23** (2), 199–208 (1975). DOI: 10.1109/TMTT.1975.1128528
- [58] M. Gastine, L. Courtois, J.L. Dormann. *IEEE Trans.*, **MTT-15** (12), 694–700 (1967). DOI: 10.1109/GMTT.1967.1122589
- [59] P. Guillon, Y. Garault. *IEEE Trans.*, **MTT-25** (11), 916–922 (1977). DOI: 10.1109/TMTT.1977.1129241
- [60] J. Ruiz, M.J. Nufez, A. Navarro, E. Martin. *IEEE Trans.*, **MTT-37** (11), 1814–1816 (1989). DOI: 10.1109/22.41050
- [61] J. Krupka. *IEEE Trans.*, **MTT-33** (3), 274–277 (1985). DOI: 10.1109/TMTT.1985.1132999
- [62] R.K. Mongia, A. Atipiboon, M. Cuhaci, D. Roscoe. *Electron. Lett.*, **30** (17), 1361–1362 (1994). DOI: 10.1049/el:19940968
- [63] Y. Liu, S. Safavi-Naeini, S.K. Chaudhuri, R. Sabry. *IEEE Trans.*, **AP-52** (1), 327–332 (2004). DOI: 10.1109/TAP.2003.822424
- [64] S.Y. Ke, Y.T. Cheng. *IEEE Trans.*, **MTT-49** (3), 571–574 (2001). DOI: 10.1109/22.910568
- [65] М.В. Давидович, Ю.В. Стефюк. *Известия вузов. Радиофизика*, **53** (4), 296–309 (2010). [M.V. Davidovich, Yu.V. Stefyuk. *Radiophysics and Quantum Electronics*, **53** (4), 268–279 (2010)].
- [66] М.В. Давидович. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*, **8** (1), 3–14 (2008).
- [67] М.В. Давидович, А.К. Кобец, К.А. Саяпин. *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*, **24** (3), 18–27 (2021). DOI: 10.18469/1810-3189.2021.24.3.18-27
- [68] G. Mie. *Leipzig Ann. Phys.*, **330**, 377–445 (1908). <http://www.elch.chem.msu.ru/rus/mfti/mie1908.pdf>
- [69] М. Борн, Э. Вольф. *Основы оптики* (Наука, М., 1973) [M. Born, E. Volf. *Principles of optics* (Pergamon Press, Oxford, London, Edinburgh, N.Y., Paris, Frankfurt, 1968)].
- [70] А. Зоммерфельд. *Дифференциальные уравнения в частных производных физики* (ИЛ, Москва, 1950, 458 с.) [A. Sommerfeld. *Partielle Differential Gleichungen der Physik* (Zweite Auflage, Leipzig, 1948)].
- [71] Г.А. Гринберг. *Некоторые вопросы математической теории электрических и магнитных явлений* (Изд-во АН СССР, М.-Л., 1948).
- [72] Л.Д. Гольдштейн, Н.В. Зернов. *Электромагнитные поля* (Сов. радио, М., 1971).
- [73] Л.А. Вайнштейн. *Открытые резонаторы и открытые волноводы* (Сов. радио, М., 1966).
- [74] В.В. Климов. *Наноплазмоника* (Физматлит, М., 2010).
- [75] Я.О. Шуюпова, В.В. Котляр. *Компьютерная оптика*, **33** (1), 27–36 (2009).
- [76] М.В. Давидович, Ю.В. Стефюк. *Опт. и спектр.*, **109** (4), 643–655 (2010). [M.V. Davidovich, Yu.V. Stefyuk. *Optics and Spectroscopy*, **109** (4), 596–607 (2010)].
- [77] М.В. Давидович, И.С. Нефедов. *ЖЭТФ*, **145** (5), 771–786 (2014) [M.V. Davidovich. *JETP*, **118** (5), 673–686. DOI: 10.1134/S1063776114040104].
- [78] M.V. Davidovich. In: *17th International Conference on Microwaves, Radar and Wireless Communications* (MIKON, 2008), p. 19–21.
- [79] W. Schlosser, H.G. Unger. *Partially filled waveguides and surface waveguides of rectangular cross section. In Advances in Microwaves, Academic* (New York, 1966), p. 319–387.
- [80] J. Goell. *Bell Syst. Tech. J.*, **48**, 2133–2160 (1969). <https://ieeexplore.ieee.org/document/6769760>
- [81] E.A.J. Marcattili. *Bell System. Tech. J.*, **48**, 2071–2102 (1969). <https://ieeexplore.ieee.org/document/6769758>
- [82] R.M. Knox, P.P. Toullos. In: *Proc. MRI Symp. Submillimeter Waves*, 1070, p. 497–516.
- [83] S. Akiba, H.A. Haus. *Appl. Opt.*, **21**, 804–808 (1982). <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/20372543/>
- [84] A. Kumar, K. Thyayarajan, A.K. Ghatak. *Opt. Lett.*, **8**, 63–65 (1983). <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/19714136/>

- [85] M.D. Feit, J.A. Fleck. *Appl. Opt.*, **19**, 1154–1164 (1980). <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/20221001/>
- [86] C. Yeh., K. Ha, S.B. Dong, W.P. Brown. *Appl. Opt.*, **18**, 1490–1504 (1979). <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/20212884/>
- [87] A.W. Snyder, W.R. Young. *J. Opt. Soc. Amer.*, **68**, 297–309 (1978). <https://opg.optica.org/josa/abstract.cfm?uri=josa-68-3-297>
- [88] H. Kogeljik, V. Ramaswamy. *Appl. Opt.*, **8**, 1857–1862 (1974). <https://opg.optica.org/ao/abstract.cfm?uri=ao-13-8-1857>
- [89] С.Б. Раевский, А.Ю. Седаков, А.А. Титаренко. *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*, **19** (3), 45–48 (2016).
- [90] М.В. Давидович. *Квантовая электроника*, **47** (6), 567–579 (2017) [M.V. Davidovich. *Quantum electronics*, **47** (6), 567–579 (2017). DOI: 10.1070/QEL16272].
- [91] R. Yang, Z. Lu. *Int. J. Opt.* 2012(1). Article ID 258013, 1–12. DOI: 10.1155/2012/258013
- [92] W.-B. Ewe, H.-S. Chu, E.-P. Li. *Opt. Exp.*, **15** (26), 18200(1–8) (2008). DOI: 10.1364/OE.15.018200
- [93] К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. *Методы граничных элементов* (Мир, М., 1987).
- [94] С. Солимено, Б. Крозиньяни, П. Ди Порто. *Дифракция и волноводное распространение оптического излучения* (Мир, М., 1989), 664 с. [S. Solimeno, B. Crosignani, P. Di Porto. *Diffraction and Confinement of Optical Radiation* (Academic, Orlando, 1986)].
- [95] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences, vol. 82 (Springer-Verlag, New-York, 1989).
- [96] А.Б. Самохин. *Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики* (Техносфера, М., 2021).
- [97] Е.М. Карчевский, А.Г. Фролов. *Двумерные сингулярные и слабо сингулярные интегральные уравнения в теории диэлектрических волноводов* (Изд-во Казан. ун-та, Казань, 2018).
- [98] В.В. Никольский. *Вариационные методы для внутренних задач электродинамики* (Наука, М., 1967).
- [99] Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. *Численный анализ дифракции радиоволн* (Радио и связь, М., 1982).
- [100] K. Katsinos, G.P. Zouros. In: 2021 IEEE 15th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), p. 1–5. DOI:10.23919/EuCAP51087.2021.9411267
- [101] S. Tao, R.A. Chen. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett.*, **13**, 627–630 (2014). DOI: 10.1109/LAWP.2014.2312736
- [102] A.M. Lerer, I.V. Donets, G.A. Kalinchenko, P.V. Makhno. *Photonics Research*, **2** (1), 31–37 (2014). DOI: 10.1364/PRJ.2.000031
- [103] A.F. Peterson. In: IEEE 2013 USNC-URSI Radio Science Meeting (Joint with AP-S Symposium), p. 159. DOI: 10.1109/USNC-URSI.2013.6715465
- [104] A. Boag, V. Lomakin. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, **11**, 568–1571 (2012). DOI: 10.1109/LAWP.2012.2236294
- [105] М.Ю. Медведик, Ю.Г. Смирнов. *Изв. вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки*, **4**, 54–69 (2009). URL: <https://rucont.ru/efd/269849> (дата обращения: 08.06.2022).
- [106] Ю.Г. Смирнов, А.А. Цупак. *ЖВММФ*, **44** (12), 2252–2267 (2004).
- [107] А.А. Tsupak. In: *Proceedings of the Karlstad Workshop on Applied Mathematics (KWAM'03)*, 7–11 September (Karlstad, Sweden, 2003).
- [108] Ю.Г. Смирнов, А.А. Цупак. *Известия вузов. Поволжский регион. Естественные науки*, **2**, 31–43 (2003).
- [109] A. Samokhin, Y. Shestopalov, K. Kobayashi. *Appl. Math. Comput.*, **222**, 107–122 (2013). DOI: 10.1134/S0012266114090079
- [110] T. Deng, X. Liu. In: IEEE 1995 Antennas and Propagation Society International Symposium Digest, p. 1573–1576. DOI: 10.1109/APS.1995.530878
- [111] D.E. Livesay, K.M. Chen. In: S-MTT International Microwave Symposium Digest, 1974, p. 35–37. DOI: 10.1109/MWSYM.1974.1123471
- [112] М.В. Давидович. *Радиотехника и электроника*, **46** (10), 1198–1205 (2001).
- [113] М.В. Давидович. *ЖТФ*, **76** (1), 13–23 (2006) [M.V. Davidovich. *Technical Physics*, **51** (1), 11–21. DOI: 10.1134/S1063784206010026].
- [114] Y. Liu, A. Al-Jarro, H. Bağcı, E. Michielssen. In: IEEE 2013 USNC-URSI Radio Science Meeting (Joint with AP-S Symposium), p. 49. DOI: 10.1109/USNC-URSI.2013.6715355
- [115] H.A. Ülkü, S.B. Sayed, H. Bağcı. In: IEEE 2014 USNC-URSI Radio Science Meeting, p. 39. DOI: 10.1109/USNC-URSI.2014.6955421
- [116] Y. Liu, A. Al-Jarro, H. Bağcı, E. Michielssen. *IEEE Trans.*, **AP-64** (6), 2378–2388 (2016). DOI: 10.1109/TAP.2016.2546964
- [117] А.Б. Самохин, А.С. Самохина, И.А. Юрченков. *Дифференциальные уравнения*, **57** (9), 1273–1279 (2021) [A.B. Samokhin, A.S. Samokhina. *Differential Equations*, **57**, 1249–1255 (2021). DOI: 10.1134/S0012266121090123].
- [118] B.G. Ward. *IEEE Trans.*, **AP-69** (3), 1545–1552 (2021). DOI: 10.1109/TAP.2020.3026418
- [119] X. Li, L. Lei, Y. Chen, M. Jiang, J. Hu. In: 2018 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation & USNC/URSI National Radio Science Meeting, p. 1–3. DOI: 10.1109/ISAPE.2018.8634188
- [120] М.В. Давидович, С.Г. Сучков, Н.А. Бушуев. *Изв. вузов. ПНД*, **23** (1), 76–91 (2015).
- [121] A.W. Maue. *Zeitschrift für Physik*, **26**, 601–618 (1949). DOI: 10.1007/BF01328780
- [122] I. Lifanov, L. Poltavskii, G. Vainikko. *Hypersingular Integral Equations and Their Applications* (CHAPMAN & HALL/CRC A CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington, 2003), 395 p. DOI: 10.1201/9780203402160
- [123] А.Г. Давыдов, Е.В. Захаров, Ю.В. Пименов. *Прикладная математика и информатика*, **9**, 5–22 (2001) [A.G. Davydov, E.V. Zakharov, Yu.V. Pimenov. *Hypersingular integral equations in computational electrodynamics*. *Computational Mathematics and Modeling*, **14** (1), 1–15 (2003).
- [124] С.И. Эминов, В.С. Эминова. *ЖВММФ*, **56** (3), 432–440 (2016). [S.I. Eminov, V.S. Eminova. *Comput. Math. Math. Phys.*, **56** (3), 417–425 (2016)].
- [125] S.J. Obaiys, R.W. Ibrahim, A.F. Ahmad. *Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study*. In: D. Andrica, T. Rassias (eds). *Differential and Integral Inequalities*. Springer Optimization and Its Applications (Springer, Cham. Vol. 151, 2019. DOI: 10.1007/978-3-030-27407-8_25
- [126] М.В. Давидович, А.В. Козлов. *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*, **13** (2), 46–51 (2010). <https://journals.eco-vector.com/pwp/article/view/53390>

- [127] М.В. Давидович, А.И. Тимофеев, И.А. Корнев, В.Я. Явчуновский. Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика, **16** (1), 33–43 (2016).
- [128] М.В. Давидович, И.А. Корнев. Физика волновых процессов и радиотехнические системы, **22** (2), 30–36 (2019). DOI: 10.18469/1810-3189.2019.22.2.30-36
- [129] P.G. Akishin, A.A. Sapozhnikov. Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science, **27** (1), 60–69 (2019). DOI: 10.22363/2658-4670-2019-27-1-60-69