

01

Моделирование особенностей магнитных свойств осесимметричных гранул жестких сверхпроводников II рода

© Н.Д. Кузьмичев, А.А. Шушпанов, М.А. Васютин

Мордовский государственный университет им. Огарева,
430000 Саранск, Россия
e-mail: kuzmichevnd@yandex.ru

Поступило в Редакцию 14 апреля 2022 г.

В окончательной редакции 6 июля 2022 г.

Принято к публикации 11 июля 2022 г.

На основе уравнений электродинамики и концепции критического состояния для жестких сверхпроводников второго рода выполнено численное моделирование магнитных свойств осесимметричных сверхпроводящих образцов, в частности, гранул для ряда моделей зависимости плотности критического тока от индукции магнитного поля. Петли магнитного момента рассчитаны непосредственно путем интегрирования по времени интегрального уравнения для плотности тока. Рассмотрены также явления пик-эффекта и асимметрии петли гистерезиса намагниченности с использованием указанного уравнения. В качестве пик-функций применялись различные варианты функций, используемых в литературе. Кроме петли гистерезиса магнитного момента, индукции магнитного поля в центре осесимметричных образцов и поля полного проникновения были получены профили плотности критического тока $J_c(B)$ и равновесный магнитный момент для шарообразных гранул. Используемый метод расчета магнитного момента сверхпроводников позволил учитывать равновесную и неравновесную области намагниченности образцов независимо.

Ключевые слова: магнитный момент, осесимметричные гранулы, сверхпроводник II рода, критическое состояние, пик-эффект, равновесный магнитный момент.

DOI: 10.21883/JTF.2022.11.53434.98-22

Введение

Расширение области применения сверхпроводящих материалов значительно усилило научный интерес к исследованию их свойств, в том числе магнитных. Изменение параметров известных и новых веществ является одним из наиболее важных аспектов исследований. К основным характеристикам сверхпроводников относятся, например, критическая плотность тока и критические значения магнитных полей. Для их получения обычно используют бесконтактные косвенные измерения. Полученные параметры, в свою очередь, могут быть использованы для предсказания поведения сверхпроводника в иных сценариях, что технически упрощает исследования.

Для измерений чаще всего используют простые формы образцов: диски, цилиндры, пленки, параллелепипеды, эллипсоиды и т.д. Большинство современных синтезируемых кристаллических сверхпроводниковых материалов имеют гранулярную структуру и в первом приближении могут быть представлены в виде набора микроскопических шаров, эллипсоидов или цилиндров. Для таких образцов задача приобретает осевую симметрию, что облегчает задачу моделирования. В этом случае траектории токов становятся соосными окружностями, и задача сводится к двумерному распределению основных электрических и магнитных величин: плотности тока J , векторного потенциала A , напряженностей электрического E и магнитного полей H . Одна из первых моделей, описывающих намагниченность жестких

сверхпроводников II рода, была предложена Ч. Бином [1]. В ней предполагалось, что в полях, превышающих первое критическое поле H_{c1} , плотность тока принимает постоянное значение, равное критической плотности J_c в областях проникновения магнитного поля (т.е. там, где образовались нити Абрикосова, закрепленные на неоднородностях). В реальности на поведение сверхпроводника влияет гораздо больше факторов, и распределение тока внутри образца сильно усложняется. Во многом оно зависит от движения переносчиков магнитного поля (нитей (вихрей) Абрикосова). Сила их взаимодействия с материалом сверхпроводника (пиннинг, перемещение, формирование структур и т.д.) и будет во многом определять поведение образца в магнитном поле. В результате все это становится причиной более сложных эффектов: полевой зависимости критической плотности тока, пик-эффекта, зон равновесной намагниченности, температурных зависимостей параметров и т.д.

Целью настоящей работы является численное моделирование ряда особенностей магнитных свойств однородных жестких сверхпроводников второго рода (ЖСВР) с осевой симметрией (эллипсоиды вращения, цилиндры и др.), в частности, гранул в однородных магнитных полях, параллельных оси симметрии образцов. Моделирование проводится с помощью различных полевых зависимостей критической плотности тока. Рассмотрены явления пик-эффекта и равновесной намагниченности. Выполненные в работе численные расчеты основаны на работах [2,3], в которых в рамках моделей Бина и Кима

для пластин, дисков, коротких цилиндров определялись их магнитные свойства с использованием интегрального уравнения второго рода. Для эллипсоидов вращения и цилиндров подобные расчеты выполнены в работах [4,5]. Следует отметить, что имеются и другие применяемые в настоящее время подходы к описанию магнитных свойств сверхпроводников конечных размеров, основанные на стационарном [6,7] и нестационарном [8] уравнениях Гинзбурга–Ландау. Эти описания приводят к более глубокому пониманию механизма намагниченности сверхпроводников, но указанные уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями и требуют дополнительного задания граничных и начальных условий, что сильно усложняет задачу.

1. Уравнение движения тока

Как было отмечено во введении, численное моделирование критического состояния ЖСВР, выполненное в настоящей работе, основано на методике работ [2,3]. Методику расчета, примененную в указанных работах, можно расширить на любые осесимметричные формы и другие модели при рассмотрении более сложных эффектов.

Будем работать в цилиндрической системе координат r, φ, z . Сориентируем ось z по оси симметрии образца и зададим его границы: $-b \leq z \leq b$, $r(z) \leq a(z)$, где b — полувысота образца, а $a(z)$ — радиус образца в сечении с координатой z . В случае если у него есть горизонтальная плоскость симметрии, положение $(0, 0)$ выбирается в центре образца. В общем случае (например, для задания конической формы) можно сдвинуть начало координат в крайнюю нижнюю точку.

Будем рассматривать изотропный по магнитным свойствам ЖСВР с линейной изотропной зависимостью индукции магнитного поля от его напряженности $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ ($\mu = 1$, μ_0 — магнитная постоянная). Для описания электрических свойств необходимо ввести аналог вольт-амперной характеристики (ВАХ) — зависимость вектора напряженности электрического поля от плотности тока $\mathbf{E}(\mathbf{J})$, которую можно представить в виде: $\mathbf{E} = E(J)\mathbf{J}/J$. Для корректности расчетов, следуя работам [2,3], в качестве $E(J)$ будем использовать быстрорастущую гладкую функцию, хорошей аппроксимацией которой является степенная функция с большим показателем n :

$$E(J) = E_c (J/J_c)^n. \quad (1)$$

Здесь J_c — критическая плотность тока, а E_c — соответствующая ему напряженность электрического поля.

Кроме этого, будут использованы уравнения Максвелла для магнитного поля и калибровка Лондона для векторного потенциала. Исходная система уравнений

имеет вид:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{E(J)\mathbf{J}}{J}, \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \\ \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H}, \\ \dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Преобразуя данную систему, получим уравнение Пуассона для векторного потенциала

$$\mu_0 \mathbf{J} = -\nabla^2 (\mathbf{A} - \mathbf{A}_a).$$

Здесь \mathbf{A}_a — векторный потенциал внешнего магнитного поля. В осевой симметрии, когда индукция внешнего магнитного поля \mathbf{B}_a направлена по оси, уравнение примет вид

$$\mu_0 J = -\nabla^2 \left(A + \frac{r}{2} B_a \right). \quad (3)$$

Здесь векторы \mathbf{A} , \mathbf{A}_a и \mathbf{J} имеют одну азимутальную компоненту и соответственно равны: A , $A_a = -(r/2)B_a$ и J .

Решение уравнения (3) можно получить с помощью функции Грина в цилиндрической системе координат [3,5,9]:

$$A(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int_0^a dr' \int_0^b dz' G_{cyl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') - \frac{r}{2} B_a, \quad (4)$$

где $\mathbf{r} = (r, z)$, $\mathbf{r}' = (r', z')$. Интегральное ядро (функция Грина) выражается через эллиптические функции:

$$G_{cyl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(r, r', z - z') + f(r, r', z + z').$$

где

$$f(r, r', z) = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{-r' \cos \varphi}{(z^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \varphi)^{1/2}}. \quad (5)$$

Для форм, не имеющих горизонтальной плоскости симметрии, следует использовать упрощенную форму ядра: $G_{cyl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(r, r', z - z')$.

При изменении внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_a = \mathbf{B}_a(t)$ изменяется и плотность тока внутри сверхпроводника $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$. Возьмем производную уравнения (4) по времени (точка над буквой, обозначающей функцию). Тогда, используя систему уравнений (2), получим:

$$E(\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)) = \mu_0 \int_0^a dr' \int_0^b dz' G_{cyl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \dot{J}(\mathbf{r}', t) + \frac{r}{2} \dot{B}_a(t).$$

Выразим производную $\dot{J}(\mathbf{r}, t)$ под знаком интеграла, используя обратное ядро $G_{cyl}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ и подставим явный

вид ВАХ (1) в полученное нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка по времени для плотности тока (уравнение движения тока) [3]:

$$J(\mathbf{r}, t) = \mu_0^{-1} \int_0^a dr' \int_0^b dz' G_{cyl}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times \left[E_c \left(\frac{J(r, r')}{J_c} \right)^n - \frac{r'}{2} \dot{\mathbf{B}}_a(t) \right]. \quad (6)$$

Данное уравнение позволяет отследить динамику изменения локальных плотностей токов внутри сверхпроводника. Для получения полного распределения тока внутри сверхпроводника будем использовать численные методы решения.

2. Численный метод решения

Введем сетку, по которой будем разбивать однородный образец на элементарные участки. Сделаем ее неравномерной с уплотнением ячеек ближе к краям, что позволит лучше описывать краевые эффекты. Дискретные переменные уравнения (6) \mathbf{r}_k и \mathbf{r}'_m имеют в цилиндрической системе координаты (r_i, z_j) , где $i = 1, \dots, N_r$; $j = 1, \dots, N_z$; $k, m = 1, \dots, N_r N_z$. Введем новые переменные u и v , которые использовались ранее в работе [5], отличные от переменных в работах [2,3]:

$$r_i = r_i(u_i) = \sin(u_i) \cdot a(z_i), \quad z_j = z(v_j) = \sin(v_j) \cdot b, \\ u_i = \frac{\pi(i - \frac{1}{2})}{N_r}, \quad v_j = \frac{\pi(j - \frac{1}{2})}{N_z}.$$

Дифференциалы dr' и dz' в (6) заменим дискретными весовыми функциями по правилам дифференцирования:

$$dr'_i = (r'_i)' di \rightarrow \frac{\pi}{2} \cos u_i \frac{a(z_i)}{N_r} = \omega_r, \\ dy'_j = (y'_j)' dj \rightarrow \frac{\pi}{2} \cos v_j \frac{b}{N_z} = \omega_z,$$

Тогда, например, „вес“ отдельной ячейки с координатой \mathbf{r}_m определится как $\omega_m = \omega_r \omega_z$. Ядро интеграла $G_{cyl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ сводится к матрице $G_{cyl}(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}'_m) = G_{km}$. Уравнение движения тока (6) сводится к сумме (дискретному аналогу)

$$J(\mathbf{r}_k, t) = j_k(t) = \sum_m (G_{km} \omega_m)^{-1} \left[E_c \left(\frac{J_m(t)}{J_{cm}} \right)^n - \frac{r_k}{2} \dot{B}_a(t) \right]. \quad (7)$$

Функция $f(r, r', \eta)$ рассчитывалась по линейной сетке u_i :

$$u_i = \frac{i - 1/2}{M}, \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad M = 30; \\ \phi(u_i) = \pi u_i - \sin(\pi u_i).$$

Функция (5) в новых переменных имеет вид

$$f = \int_0^1 g[\phi(u)] \phi'(u) du \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[\phi(u_i)] \phi'(u_i),$$

где

$$g[\phi(u_i)] = \frac{1}{2\pi} \frac{r' \cos \phi(u_i)}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi(u_i))^{1/2}}, \\ \phi'(u_i) = \pi - \pi \cos(\pi u_i), \quad du_i = \frac{1}{M} di \rightarrow \frac{1}{M}.$$

Магнитный момент образца в момент времени будет определяться выражением

$$m(t) = 2\pi \int_0^a dr r^2 \int_0^b dz J(r, z, t) \rightarrow m(t) \\ = 2\pi \sum_k r_k^2 \omega_k J_k(t). \quad (8)$$

Вычисления выполнялись с помощью пакета прикладных программ. Для этого уравнение движения тока (6) сводилось к матричному виду (7):

$$\mathbf{J}(t) = (\mathbf{G}\mathbf{W})^{-1} \left[E_c (\mathbf{J}(t) \mathbf{J}_c(t))^{on} - \frac{\mathbf{R}}{2} B_a(t) \right],$$

где $\mathbf{J} = (J_{k1})$ — матрица-столбец производных плотностей тока по времени для каждого элемента сетки, $\mathbf{G} = (G_{km})$ — квадратная матрица ядра уравнения, $\mathbf{W} = \text{diag}(\omega_k)$ — диагональная матрица весов ячеек сетки, $\mathbf{J} = (J_{k1})$ и $\mathbf{J}_c = (\mathbf{J}_{ck1})$ — матрицы-столбцы текущих и критических плотностей токов в ячейках сетки, $\mathbf{R} = (r_{k1})$ — матрица-столбец координат r ячеек, on — поэлементное возведение матрицы в степень, \mathbf{O} — поэлементное деление матриц. Для получения полного распределения плотностей токов \mathbf{J} данное уравнение решается для каждого момента времени с шагом τ и начальным условием $\mathbf{J}(0) = \mathbf{0}$: $\mathbf{J}(t + \tau) = \mathbf{J}(t) + \dot{\mathbf{J}}(t)\tau$.

Локальную индукцию магнитного поля получим, численно определив ротор от вектор-потенциала (4):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} \\ = -\nabla \times \left[\mu_0 \int_0^a dr' \int_0^b dz' G_{cyl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') + \frac{r}{2} B_a \right]. \quad (9)$$

Благодаря осевой симметрии вектор \mathbf{A} будет иметь только азимутальную проекцию, что упрощает расчет вектора \mathbf{B} , имеющего r и z компоненты:

$$B_{ij} = \sqrt{(B_r^2)_{ij} + (B_z^2)_{ij}},$$

где

$$B_{rij} = -\frac{A_{i,j+1} - A_{i,j}}{z_{j+1} - z_j}, \quad B_{zij} = \frac{A_{i+1,j} r_{i+1} - A_{i,j} r_i}{r_i(r_{i+1} - r_i)},$$

$$i = 1, 2, \dots, N_r - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_z - 1.$$

Матрица A_{ij} размером $N_r \times N_y$ получена из матрицы-столбца

$$\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{G} \mathbf{W} \mathbf{J} - \frac{\mathbf{R}}{2} B_a.$$

3. Петли гистерезиса магнитного момента для ряда зависимостей критической плотности тока от индукции магнитного поля

На основании вышеприведенной методики рассмотрим гистерезисные кривые магнитного момента сферически симметричных однородных образцов, в частности, гранул, с использованием ряда различных полевых зависимостей критической плотности тока, используемых в литературе. Влияние магнитного поля на критическую плотность тока обусловлено тем, что возникающий экранирующий индукционный ток взаимодействует с вихрями Абрикосова в области их проникновения. Вихри закрепляются на неоднородностях материала или приходят в движение при достаточной силе Лоренца со стороны возникающего экранирующего тока. Поскольку сила зависит от локальной напряженности магнитного поля и тока, протекающего в этой точке, критическая плотность тока ограничена минимальной силой F_p (силой пиннинга), достаточной для начала движения вихрей. Иными словами, $J = f(F_p, H)$. В разных образцах наблюдаются отличия в зависимостях силы пиннинга, а также в значениях второго критического поля H_{c2} . На основании этого выбор зависимости $J(B)$ осуществляется через сравнение с экспериментальными петлями намагниченности у подобных образцов. Их согласование служит основным критерием для выбора зависимостей $J(B)$.

В настоящей работе использовались следующие модели. Одна из первых зависимостей, описывающая спад критической плотности тока при росте магнитного поля, была предложена Кимом [10]:

$$J_c(B) = \frac{J_{c0}}{\left(1 + \frac{|B|}{B_0}\right)}. \quad (10)$$

Модель хорошо описывает поведение сверхпроводника в малых полях $H \ll H_{c2}$. Для полей, близких к H_{c2} , зависимость $J_c(B)$ лучше описывает модель [11,12] с зависимостью критического тока $J_c(B) = J_{c0} e^{-|B|/B_0}$.

Также были использованы: совмещенная двухпараметрическая форма

$$J_c(B) = J_{c0} \left(1 + \frac{|B|}{B_0}\right)^{-\alpha} \quad (11)$$

и трехпараметрическая, предложенная в работах [13,14] и др.

$$J_c(B) = J_{c0} \frac{1 - \left(\frac{|B|}{B_{c2}}\right)^\alpha}{1 + \left(\frac{|B|}{B_0}\right)^\alpha}. \quad (12)$$

Последняя зависимость учитывает поведение сверхпроводника на разных масштабах за счет учета второго критического поля $B_{c2} = \mu_0 H_{c2}$.

Для расчета были выбраны образцы в виде шаров, форма боковой границы описывается уравнением: $a(z) = a_0(1 - z^2)^{1/2}$, $a_0 = b = 1$. Плотность сетки, на которой производился расчет, составляет 15 ячеек на единицу длины. Все константы в матричных уравнениях для удобства принимались за единицу: $E_c = J_{c0} = \dot{B}_a = \mu_0 = \mu = 1$. „Скорость расчета“ (шаг по времени) — $\tau = 8 \cdot 10^{-6}$ с. Степень ВАХ выбрана большим нечетным числом n , как и в работе [3]. Уменьшение величины n в несколько раз, например, с $n = 51$ до 11, приводит небольшому росту магнитного момента ($\sim 9\%$), качественно не меняя картину гистерезиса петли. При расчетах все значения напряженности магнитного поля нормировались на величину $J_{c0} a_0$, а значения магнитного момента на $J_{c0} a_0^4$. Показатель степени α принимался равным 0,5, а $B_{c2} = 20 \mu_0 J_{c0} a_0$.

Для каждой модели был рассчитан полный цикл намагничивания в равномерно изменяющемся магнитном поле. На графиках ниже (рис. 1) представлены рассчитанные петли магнитного момента $m(H_a)$ образцов с вариацией основных параметров на основе формул (10)–(12). Также здесь представлены петли гистерезиса $B(H_a)$, где B — индукция магнитного поля в центре образца, H_a — напряженность внешнего поля и $H_{a,max}$ — максимальная напряженность поля цикла намагничивания.

Из графиков петель магнитного момента, приведенных на рис. 1, a, c, e, g , видно, что магнитный момент, соответствующий зависимости (11), уменьшается медленнее с ростом H_a вследствие медленного спада $J_c(B)$. Магнитный момент, соответствующий формуле (12), имеет более острый пик вблизи нуля внешнего поля. В целом кривые $m(H_a)$ имеют похожий вид. На рис. 1, b, d, f, h приведены гистерезисные кривые индукции поля $B(H_a)$ в центре образца, которые показывают, что зависимость $J_c(B)$ (11) дает более широкую петлю, как и в случае $m(H_a)$. Кроме того, на рис. 1, h кривая $B(H_a)$ при $H_{a,max} = 0.5 J_{c0} a_0$ отсутствует, так как $H_{a,max} < H_p$ — поля полного проникновения.

Помимо получения петель магнитного момента, был выполнен расчет поля полного проникновения H_p в зависимости от значений основного параметра $B_0 = \mu_0 H_0$ эллипсоидальных образцов с разными соотношениями полуосей $a_0/b = 0.5, 1, 2$, для разных моделей полевой зависимости критической плотности тока $J_c(B)$ ((10)–(12)) с прежними параметрами B_{c2} и α . Результаты приведены на рис. 2.

Поле полного проникновения H_p в образец (H_p — это напряженность магнитного поля, когда плотность вихрей (плотность магнитного потока B) и экранирующего сверхтока будут отличны от нуля в центральной области образца) рассчитывалось для равномерно растущего внешнего магнитного поля. Далее на

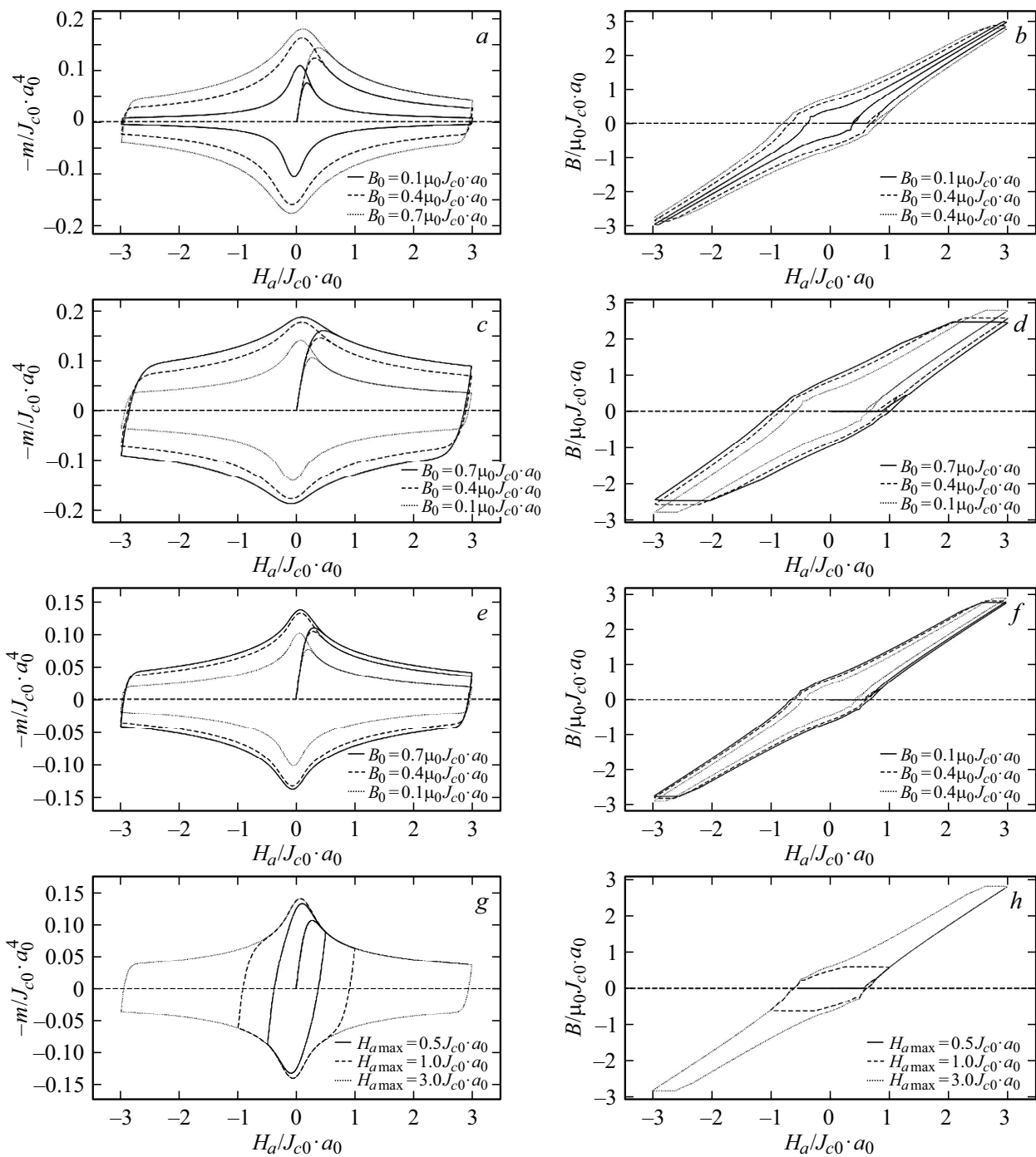


Рис. 1. Петли магнитного момента (*a, c, e, g*), а также зависимость индукции магнитного поля в центре (*b, d, f, h*) сверхпроводящего шара для различных значений параметра B_0 и зависимостей $J_c(B)$ (сверху вниз: (10) — *a, b*, (11) — *c, d*, (12) — *e, f*). Петли магнитного момента для $J_c(B)$ ((11) — *g, h*) при различных значениях максимального поля $H_{a,max}$ цикла намагничивания. Значения величины B_0 на рисунках указаны в единицах $\mu_0 J_{c0} a_0$.

каждом шаге счета производилась проверка условия $B > 0.05 \mu_0 J_{c0} a_0$. При его выполнении внешнее магнитное поле считалось проникшим в образец и его значение H_p фиксировалось. При уменьшении размера ячеек это условие можно уменьшить. При увеличении плотности ячеек на единицу длины с 15 до 30 поле H_p менялось незначительно. Из рисунка видно, что кри-

вые $H_p(H_0)$ демонстрируют монотонное возрастание с выходом на насыщение. Также кривые показывают, что для вытянутых вдоль оси симметрии образцов требуется меньшее поле H_p , а для сплюснутых — большее. Из сравнения графиков $H_p(H_0)$ между собой следует, что зависимости $J_c(B)$ (11) соответствует большее поле H_p .

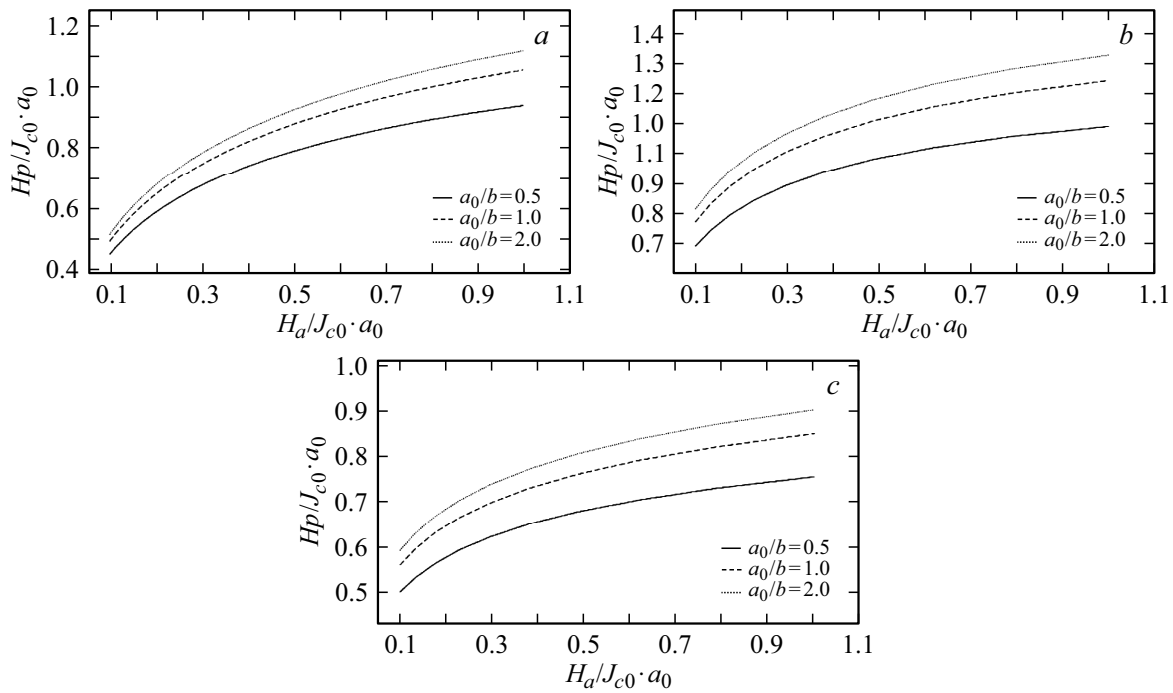


Рис. 2. Зависимость поля полного проникновения H_p от параметра $H_0 = B_0/\mu_0$ для эллипсоидов разного соотношения полуосей $a_0/b = 0.5, 1, 2$ с использованием различных моделей $J_c(B)$: a — (10), b — (11), c — (12).

4. Пик-эффект

Функции, аппроксимирующие зависимость плотности критического тока от локальной индукции магнитного поля, предполагают ее монотонное убывание при увеличении поля, что согласуется с большинством экспериментов. Однако у некоторых сверхпроводников наблюдается рост макроскопической плотности тока в некоторой области вместо его монотонного уменьшения. Данный эффект отражается в виде вторичного максимума на петлях намагниченности. Причин возникновения данного эффекта может быть много, например, уменьшение жесткости вихревой решетки, влияние межгранулярных границ, фазовый переход вихревой решетки, фазовое расслоение и т.д. Для моделирования данного эффекта в работах [15–18] и др. было предложено видоизменить функцию $J_c(B)$ следующим образом. К основным моделям зависимости $J_c(B)$ добавляется дополнительное слагаемое, определяющее форму вторичного максимума:

$$J_c(B) = J_{c0}(B)(1 + f_{peak}(B)). \tag{13}$$

В качестве пик-функции f_{peak} в настоящей работе использовались следующие функции [15–18]:

$$f_{peak}(B) = A / \left(1 + \left(\frac{|B| - B_p}{B_w} \right)^2 \right), \tag{14}$$

$$f_{peak}(B) = \frac{A|B|}{B_p} \exp\left(-\frac{(|B| - B_p)^2}{2B_w^2}\right), \tag{15}$$

$$f_{peak}(B) = A \exp\left(-\frac{(\frac{\ln|B|}{B_p})^2}{2(\frac{B_w}{B_p})^2}\right). \tag{16}$$

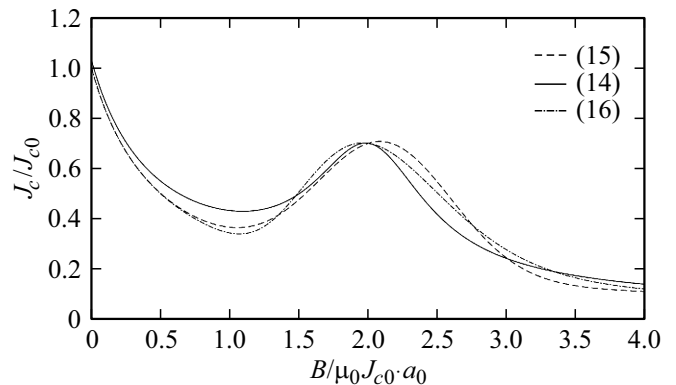


Рис. 3. Вид функции критической плотности тока при использовании пик-функций (14)–(16) с параметрами $A = 0.5$, $B_p = 2\mu_0 J_{c0} a_0$, $B_w = 0.5\mu_0 J_{c0} a_0$.

Здесь B_p — поле, соответствующее максимуму пика; B_w — поле, характеризующее ширину пика; A — амплитуда пика.

На рис. 3 представлено сравнение пик-функций с одинаковыми параметрами. Как можно заметить, все функции имеют довольно близкую форму при равных параметрах ширины, высоты и положения. Преимуществом использования функций (15) и (16) является их значение при нулевом поле: $f_{peak}(0) = 0$, что не меняет максимальную плотность критического тока. В разд. 4 будут представлены результаты моделирования петли гистерезиса намагниченности сферического образца радиуса a_0 в модели полевой зависимости Кима с исполь-

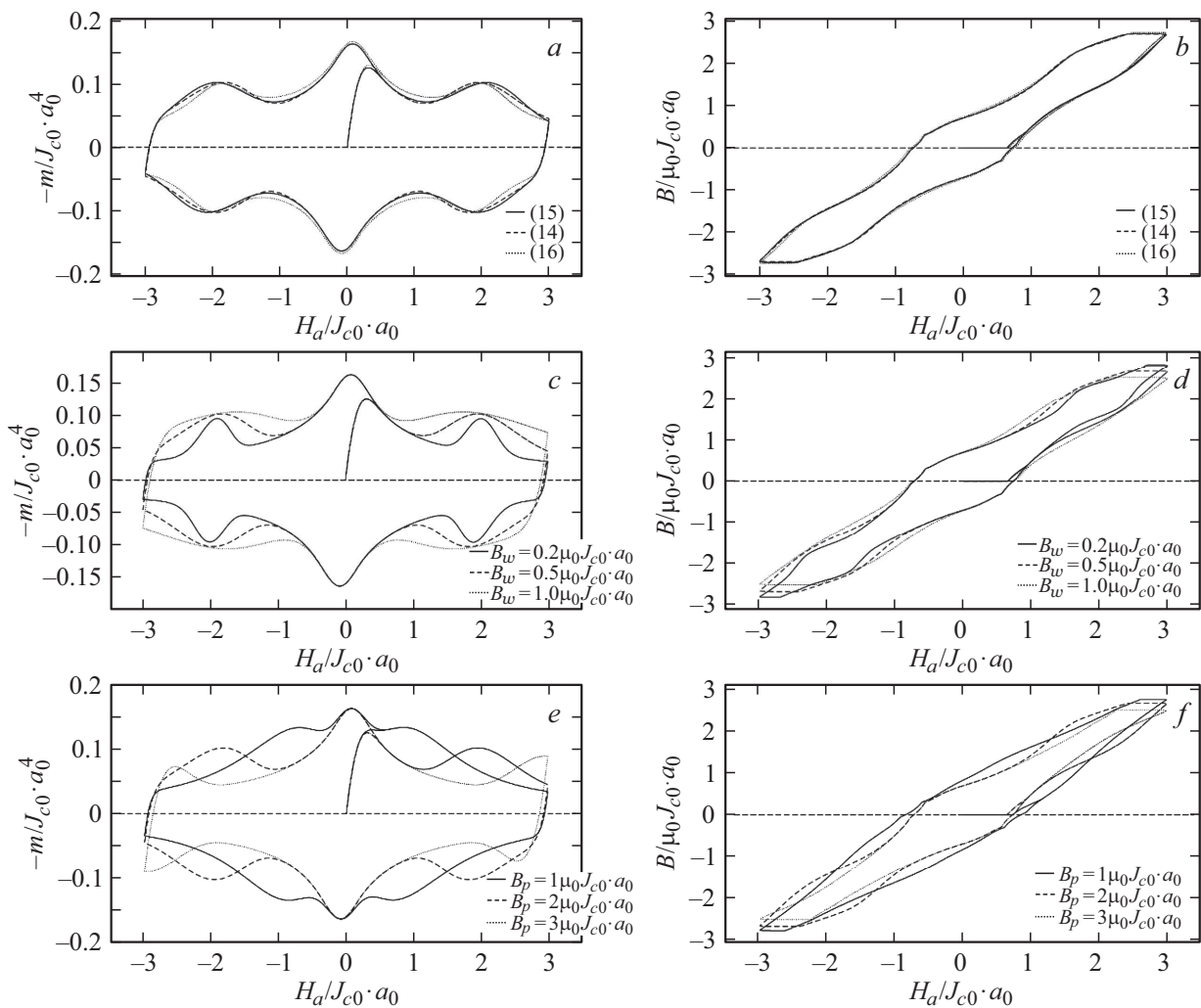


Рис. 4. Вид петель магнитного момента (*a, c, e*) и значения магнитного поля в центре образцов (*b, d, f*). *a, b* — приведены данные для разных пик-функций (14)–(16) с одинаковыми параметрами: $A = 0.3$, $B_p = 2\mu_0 J_{c0} a_0$, $B_w = 0.5\mu_0 J_{c0} a_0$; *c, d* — для разной ширины; *e, f* — для разных положений вторичного пика. Значения изменяемых параметров указаны на рисунках. В остальных случаях использовались значения $A = 0.3$, $B_p = 2\mu_0 J_{c0} a_0$, $B_w = 0.5\mu_0 J_{c0} a_0$, а в качестве пик-функции на втором и третьем рядах использовалась функция (16).

зованием разных пик-функций (14)–(16) и вариации их параметров.

Из анализа результатов, приведенных на рис. 4, следует, что все три функции (14)–(16) не оказывают существенного влияния на различия петель гистерезиса магнитного момента. Кроме того, влияние параметров, определяющих ширину и положение пика в зависимостях $J_c(B)$ и $m(H_a)$, одинаково.

Также были вычислены профили плотности тока $J_c(B(r, z))$ для шаровой гранулы радиуса a_0 в модели Кима (1) с пик функцией (16) для трех значений внешнего поля $H_a = J_{c0} a_0$, $2J_{c0} a_0$ и $3J_{c0} a_0$, $2J_{c0} a_0$ и $3J_{c0} a_0$, которые получены для возрастающего поля. Результаты приведены на рис. 5 и 6. Из рисунков видно, что существенное отличие имеется лишь при $H_a = J_{c0} a_0$ на полюсах шара.

5. Учет равновесной намагниченности

В полях $H > H_{c1}$ вблизи поверхности сверхпроводника образуются вихри Абрикосова, которые в отсутствие явления пиннинга распределяются в сверхпроводнике равномерно, и магнитный момент образца также не зависит от предыстории. В случае пиннинга образованные вблизи поверхности вихри закрепляются на неоднородностях. В области, заполненной вихрями, согласно модели критического состояния [1,10], течет экранирующий ток, равный току депиннинга $I_c(B)$. В этом случае магнитный момент будет зависеть от предыстории состояния сверхпроводника, и появится гистерезис. При исследовании намагниченности, например, низкотемпературных [11] и поликристаллических высокотемпературных сверхпроводников [19] обнаружено, что их гистерезисные петли намагниченности или магнитного

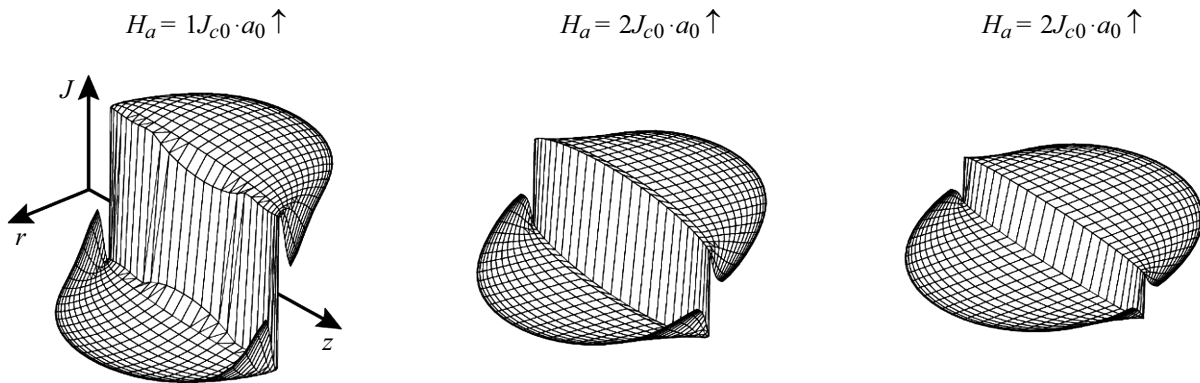


Рис. 5. Профили плотности тока $J_c(B(r, z))$ для шара радиуса a в модели Кима (10) с пик-эффектом (16) для трех значений внешнего поля $H_a = 1J_{c0}a_0$, $2J_{c0}a_0$ и $3J_{c0}a_0$. Положение максимума равно $B_p = 2\mu_0J_{c0}a_0$.

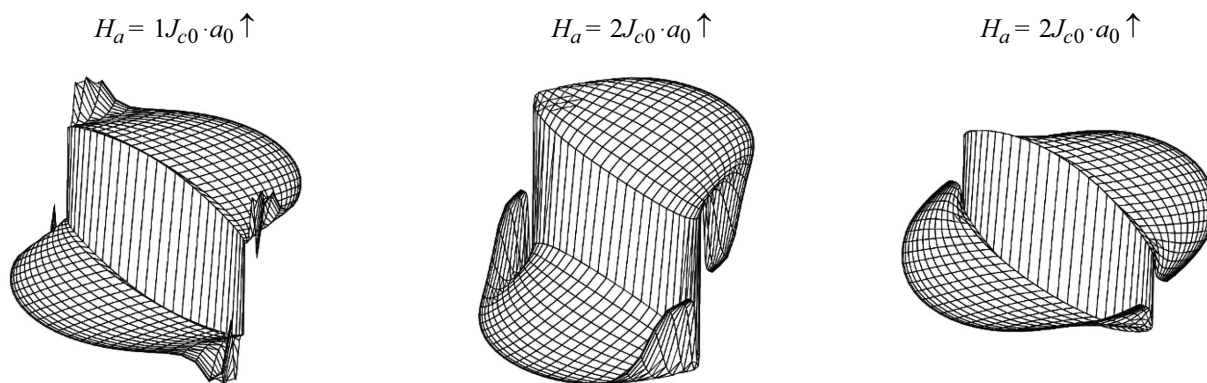


Рис. 6. Профили плотности тока $J_c(B(r, z))$ для шара радиуса a в модели Кима с пик-эффектом (16) для трех значений внешнего поля $H_a = 1J_{c0}a_0$, $2J_{c0}a_0$ и $3J_{c0}a_0$. Положение максимума равно $B_p = 2\mu_0J_{c0}a_0$.

момента имеют заметную асимметрию относительно оси абсцисс (оси напряженности магнитного поля). Величина асимметрии зависит от температуры. Для описания асимметрии авторы работы [11] предложили рассматривать равновесную намагниченность поверхностного слоя сверхпроводящего образца толщиной $l_0 \sim \lambda$ — лондонской глубиной проникновения. Намагниченность такого слоя не зависит от предыстории его состояния и будет обратимой. Причины, приводящие к асимметрии петли гистерезиса намагниченности, рассмотрены в работах [20–22]. Среди них, например, эффект Мейснера, поверхностный барьер и др. Данную область называют областью равновесной намагниченности в отличие от области внутренней части, заполненной вихрями, где намагниченность будет неравновесная.

При расчете магнитных свойств сверхпроводящих тел, размеры которых много больше l_0 , а также в больших полях (сравнимых с полем H_p) можно пренебрегать равновесной областью, поскольку ее вклад в полную намагниченность пренебрежимо мал. Однако если рассматривать гранулярные сверхпроводники, то значение l_0 может иметь порядок, сопоставимый с размером гранул. Это приводит к заметной асимметрии петель намагниченности, и чем больше отношение глубины

приповерхностной области к размеру гранул образца, тем она выражается сильнее [12].

В настоящей работе приведен расчет петель намагниченности с учетом равновесной области на основе методики, указанной выше. В отличие от работ [13–16, 20–22], метод расчета, в которых справедлив для образцов с нулевым размагничивающим фактором, расчет гистерезисных петель магнитного момента выполнялся по предварительно полученному распределению критической плотности тока в образце на основании уравнения (6). В этом случае размагничивающее поле учитывается без дополнительных ограничений.

При проведении расчета добивались того, чтобы распределение тока в равновесной области зависело только от направления и значения внешнего магнитного поля, но не от знака скорости его изменения. Для этого на первом этапе, когда поле увеличивается от нуля до своего максимального значения программой, записываются значения локальных плотностей токов в ячейках, входящих в приповерхностный слой. При дальнейших изменениях эти данные используются для расчета полного магнитного отклика образца. На рис. 7 представлены результаты расчета петель магнитного момента сферического образца радиуса a_0 , а также профили локальной индукции

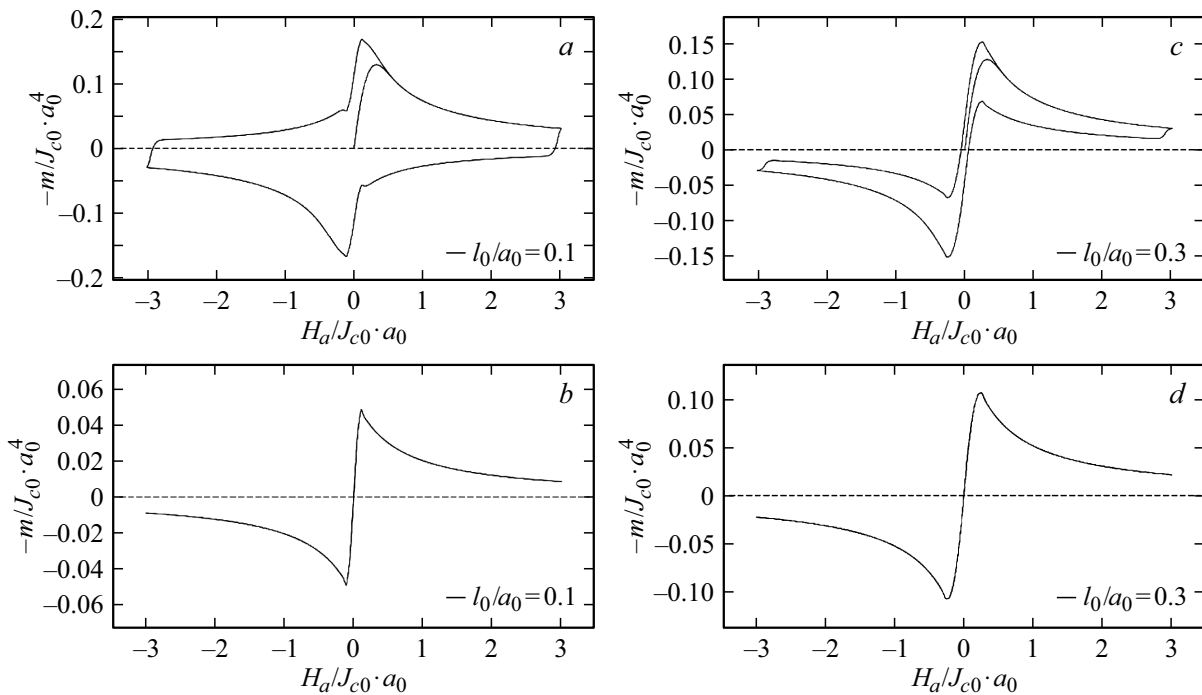


Рис. 7. Петли магнитного момента сферического образца с учетом равновесных областей разной толщины (a, c). Толщины равновесных областей на рисунке приведены в относительных единицах и указаны на рисунке ($l_0/a_0 = 0.1$ (a) и $l_0/a_0 = 0.3$ (c)). b, d — приведены магнитные моменты указанных равновесных областей. Использовалась модель Кима (10) с параметрами $B_0 = 0.5 \mu_0 J_{c0} a_0$.

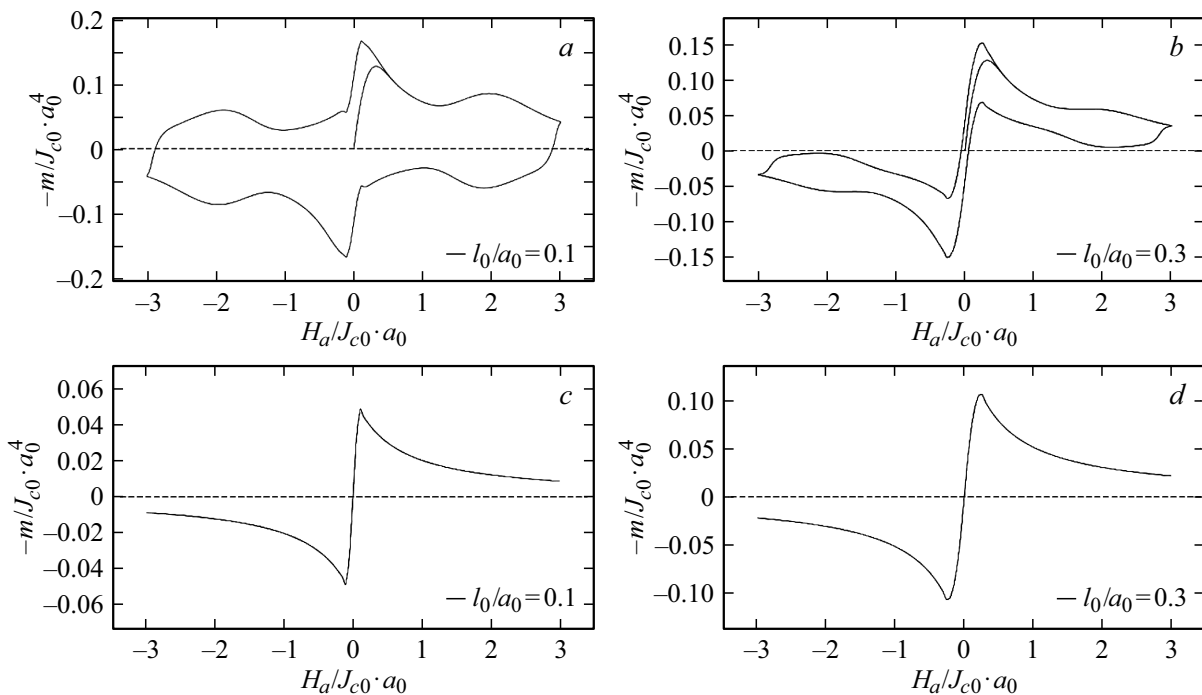


Рис. 8. Петли магнитного момента всего образца (a, b), поверхностного слоя (c, d). Данные приведены для ширины зоны равновесной намагниченности, равной $l_0/a_0 = 0.1$ (a, c), 0.3 (b, d), пик функции (16), модели Кима (10), с использованием параметров $B_0 = 0.5 \mu_0 J_{c0} a_0$, $A = 0.3$, $B_p = 2 \mu_0 J_{c0} a_0$, $B_w = 0.5 \mu_0 J_{c0} a_0$.

магнитного поля для центрального сечения. Заметим, что с ростом значений глубины приповерхностного слоя увеличивается асимметричность петли магнитного момента относительно горизонтального уровня ($m = 0$, оси абсцисс).

Как было указано в работе [22] при наличии в образце пик-эффекта задача с равновесной намагниченностью усложняется. Поскольку вихри не испытывают в приповерхностной области такого закрепления как во внутренней, вторичный пик намагниченности не должен там проявляться и увеличивать асимметрию петли. Для компенсации этого явления автор указанной работы предлагает изменять глубину равновесной области, уменьшая ее на вторичном пике. В настоящей работе использовался иной подход: при расчете намагниченности образца с учетом пик-эффекта и равновесной области сначала определялись токи в приповерхностной зоне без учета пик-эффекта, затем полученные данные использовались для полного моделирования.

Результаты расчета для приповерхностной зоны показаны на рис. 8. Как можно заметить, пик-эффект не сказывается на области равновесной намагниченности.

Заключение

Таким образом, в работе выполнено численное моделирование магнитных свойств осесимметричных гранул сверхпроводников второго рода для ряда моделей зависимости плотности критического тока от индукции магнитного поля (10)–(12) с учетом пик-эффекта и равновесной намагниченности. В качестве пик-функций применялись различные варианты функций (14)–(16). Петли магнитного момента образцов определялись непосредственно путем интегрирования по времени интегрального уравнения для плотности тока, полученного с использованием концепции критического состояния на основании уравнений электродинамики. Расчет магнитного поля в каждой точке для каждого шага итерации позволил использовать различные зависимости критического тока от локальной индукции магнитного поля и пик-функций. Также были рассчитаны профили плотности тока $J_c(B)$ в модели Кима с логистической пик-функцией (16) и равновесный магнитный момент шарообразных гранул. Исползованный в работе метод расчета магнитного момента позволяет учитывать равновесную и неравновесную области образца независимо.

Результаты расчета петель гистерезиса $m(H_a)$ и $B(H_a)$ показали, что зависимость $J_c(B)$ (11) приводит, как и следовало ожидать, к более широким петлям вследствие более медленного спада функции $J_c(B)$. Получено, что для вытянутых вдоль оси симметрии эллипсоидальных образцов требуется меньшее поле проникновения H_p , а для сплюснутых — большее. Также следует отметить, что все три пик-функции (14)–(16) не оказывают существенного влияния на петли гистерезиса магнитного

момента. Результаты расчета петель магнитного момента сферического образца радиуса a_0 , а также профили локальной индукции магнитного поля для центрального сечения показали, что с ростом значений ширины приповерхностного слоя увеличивается асимметричность петли магнитного момента относительно горизонтального уровня ($m = 0$, ось абсцисс).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] P. Bean. Phys. Rev. Lett., **8**, 250 (1962). DOI: 10.1103/PhysRevLett.8.250
- [2] E.H. Brandt. Phys. Rev. B, **54**, 4246 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevB.54.4246
- [3] E.H. Brandt. Phys. Rev. B, **58**, 6506 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevB.58.6506
- [4] Н.Д. Кузьмичев, А.А. Федченко. ЖТФ, **82** (5), 52 (2012). [N.D. Kuz'michev, A.A. Fedchenko. Tech. Phys., **57** (5), 631 (2012). DOI: 10.1134/S1063784212050180]
- [5] Н.Д. Кузьмичев, А.А. Шушпанов, М.А. Васютин. Журнал СВМО, **22** (4), 456 (2020). DOI: 10.15507/2079-6900.22.202004.456-462
- [6] Г.Ф. Жарков. УФН, **174**, 1012 (2004). [G.F. Zharkov. Phys. Usp., **47**, 944 (2004). DOI: http://dx.doi.org/10.1070/PU2004v047n09ABEH001875]
- [7] G.F. Zharkov, V.G. Zharkov, A.Yu. Zvetkov. Phys. Rev. B, **61**, 12293 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevB.61.12293
- [8] A. Gulian. *Shortcut to Superconductivity. Superconducting Electronics via COMSOL Modeling* (Springer, 2020), DOI: 10.1007/978-3-030-23486-7
- [9] В.Я. Арсенин. *Методы математической физики и специальные функции* (Наука, М., 1984)
- [10] Y.B. Kim, C.F. Hempstead, A. Strand. Phys. Rev. Lett., **129**, 528 (1963). DOI: 10.1103/PhysRev.129.528
- [11] W.A. Fietz, M.R. Beasley, J. Silcox, W.W. Webb. Phys. Rev., **136**, A335 (1964). DOI: 10.1103/PhysRev.136.A335
- [12] F. Irie, K. Yamafuji. J. Phys. Soc. Jpn., **23**, 255 (1967). DOI: 10.1143/JPSJ.23.255
- [13] E.W. Urban. J. Appl. Phys., **42**, 115 (1971). DOI: 10.1063/1.1659540
- [14] В.В. Вальков, Б.П. Хрусталева. ЖЭТФ, **107** (4), 1221 (1995).
- [15] Д.А. Балаев, Д.М. Гохфельд, С.И. Попков, К.А. Шайхутдинов, Л.А. Клинова, Л.Н. Жерихина, А.М. Цвохребов. ЖЭТФ, **145** (1), 120 (2014). DOI: 10.7868/S004445101401012X
- [16] T.H. Johansen, M.R. Koblishka, H. Blatsberg, P.O. Hetland. Phys. Rev. B, **56**, 11273 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevB.56.11273
- [17] D.G. Kulkarni, K.V. Bhagwat, G. Ravikumar. Physica C., **391**, 178 (2003). DOI: http://dx.doi.org/10.1016/S0921-4534
- [18] M. Jirsa, L. Pust, D. Dlouhý, M.R. Koblishka. Phys. Rev. B, **55**, 3276 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevB.55.3276

- [19] S. Senoussi, C. Aguilon, P. Manuel. *Physica C*, **175** (1–2), 202 (1991). DOI: 10.1016/0921-4534(93)90135-D
- [20] D.-X. Chen, R.W. Cross, A. Sanchez. *Cryogenics*, **33**, 695 (1993). DOI: 10.1016/0011-2275(93)90022-G
- [21] D.-X. Chen, R.B. Goldfarb, R.W. Cross, A. Sanchez. *Phys. Rev.*, **48**, 6426 (1993). DOI: 10.1103/PhysRevB.48.6426
- [22] Д.М. Гохфельд. *ФТТ*, **56** (12), 2298 (2014). DOI: 10.1134/S1063783414120129