01;04;09

Высокочастотная асимптотика одного интеграла в теории равновесного излучения электронного газа

© В.Б. Бобров

Объединенный институт высоких температур РАН, Москва, Россия
Национальный исследовательский университет „Московский энергетический институт“, Москва, Россия
E-mail: vic5907@mail.ru

Поступило в Редакцию 20 июня 2022 г.
В окончательной редакции 8 августа 2022 г.
Принято к публикации 8 августа 2022 г.

Рассмотрен несобственный интеграл, определяющий высокочастотную асимптотику спектрального распределения энергии равновесного излучения в идеальном электронном газе. Установлено, что в „высокочастотном“ пределе асимптотика этого интеграла имеет степенной характер, а его величина пропорциональна плотности электронного газа как функции температуры и химического потенциала при произвольном вырождении электронов.

Ключевые слова: равновесное излучение, спектральное распределение энергии, электронный газ.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.18.53399.19284

В последние годы возник большой интерес к изучению теплого плотного вещества (ТПВ) (warm dense matter) (см. подробнее [1–4]). Это обусловлено имеющимися экспериментальными данными в области лабораторной астрофизики, где существенным вопросом является анализ влияния вещества на характеристики равновесного излучения в ТПВ [5,6]. Дело в том, что спектральное распределение энергии равновесного излучения, установленное Планком, соответствует идеализированной модели абсолютно черного тела (АЧТ) в полости, заполненной излучением и ограниченной поглощающей материальной средой, так что излучение находится в термодинамическом равновесии с окружающим веществом (см. подробнее [7]). Однако эффекты взаимодействия фотонов с веществом, ограничивающим полость, обычно не учитываются, хотя именно это взаимодействие обеспечивает равновесное состояние АЧТ [7]. Кроме того, имеющиеся экспериментальные данные [8,9] свидетельствуют о влиянии вещества на характеристики собственного излучения однородной и изотропной материальной среды. Различные аспекты определения характеристик равновесного электромагнитного излучения при наличии вещества рассмотрены в работах [10–13] и цитированной там литературе. В частности, в работе [10] было установлено, что средняя энергия равновесного излучения E_{ph} в материальной среде, занимающей макроскопический объем V, может быть представлена в виде

$$E_{ph}=V\sum_{\lambda=1}^{2}\int d^3q\hbar\omega_{\mathbf{q}}f(\mathbf{q},\lambda)/(2\pi)^3=V\int_0^\infty d\omega\varepsilon_\omega(T,\{\mu_a\}):$$

$$\varepsilon_\omega(T,\{\mu_a\})=\varepsilon_\omega^{(0)}(T)+\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\mu_a\}),$$

$$\varepsilon_\omega^{(0)}=\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/T)-1}, \tag{1}$$

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\mu_a\})=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right)\times\left(\frac{c^5}{\pi\omega}\int_0^\infty dq\,q^4\frac{\mathrm{Im}\varepsilon_T^{\mathrm{tr}}(q,\omega)}{|\varepsilon_T^{\mathrm{tr}}(q,\omega)\omega^2-c^2q^2|^2}-\frac{1}{2}\right). \tag{2}$$

Здесь и далее $f(\mathbf{q},\lambda)$ — точная равновесная функция распределения фотонов по импульсам $\hbar\mathbf{q}$ и поляризации $\lambda=1,2$ для исследуемой системы, которая характеризуется термодинамической температурой T (в энергетических единицах). При этом равновесная однородная и изотропная материальная среда рассматривается как совокупность собственного квантованного электромагнитного поля и заряженных частиц. Это означает, что спектральное распределение энергии излучения в веществе $\varepsilon_\omega(T,\{\mu_a\})$ зависит не только от частоты ω и температуры T, как это имеет место в формуле Планка $\varepsilon_\omega^{(0)}(T)$ (1) для идеального газа фотонов, но и от характеристик вещества, а именно от набора химических потенциалов $\{\mu_a\}$ заряженных частиц различных сортов a, входящих в систему. В результате отличие спектрального распределения энергии излучения в веществе от формулы Планка $\varepsilon_\omega^{(0)}(T)$ (1) полностью определяется поперечной диэлектрической проницаемостью (ДП) $\varepsilon_T^{\mathrm{tr}}(q,\omega)$ для рассматриваемой однородной и изотропной среды, линейные электромагнитные свойства которой однозначно определяются продольной $\varepsilon_T^{l}(q,\omega)$ и поперечной $\varepsilon_T^{\mathrm{tr}}(q,\omega)$ ДП [14]. Нижний индекс T в обозначениях ДП означает, что соответствующие функции рассматриваются в термодинамическом пределе $(V\to\infty):\varepsilon_T^{l(\mathrm{tr})}(q,\omega)\equiv\varepsilon^{l(\mathrm{tr})}(q,\omega;T,\{\mu_a\})$.

Дальнейшее рассмотрение связано с анализом сходимости несобственного интеграла в правой части соотношения (2) [11,13] с учетом общих свойств электродинамических функций отклика [15]. Однако в отличие от рассмотрения продольной ДП $\varepsilon_T^l(q,\omega)$ (см. работу [16] и цитированную там литературу) исследованию поперечной ДП $\varepsilon_T^{\mathrm{tr}}(q,\omega)$ до сих пор не уделяется достаточного внимания. Более того, даже для идеального электронного газа имеется только интегральное представление при произвольном вырождении электронов (см. подробнее [17]).

Тем не менее в работе [11] были установлены особенности функции $\Delta\varepsilon_\omega(T,\{\mu_a\})$ (2) для идеального электронного газа при произвольном вырождении в области низких частот ($\omega\to 0$). В свою очередь в [13] было показано, что в высокочастотном пределе ($\omega\to\infty$) поведение функции $\Delta\varepsilon_\omega(T,\mu_e)$ (2) для идеального электронного газа при произвольном вырождении определяется выражениями

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\mu_e)|_{\omega\to\infty}\to\frac{2c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^4}\Phi(\beta_\omega,\mu_e/T)|_{\omega\to\infty},$$

$$\Phi(\beta,\mu)=\int\limits_0^\infty dx x^2\ln\left(\frac{1+\exp\big(\mu-x\Delta_x^{(-)}(\beta)\big)}{1+\exp\big(\mu-x\Delta_x^{(+)}(\beta)\big)}\right),$$

$$\beta_\omega=\frac{\hbar\omega}{T},\quad \Delta_x^{(\pm)}(\beta)=\frac{(\beta/x\pm 1)^2}{4}. \qquad (3)$$

Здесь и далее m_e — масса электрона с зарядом e и спином $S_e=1/2$. Таким образом, задача сводится к установлению асимптотики в области „высоких частот“ ($\beta\to\infty$) функции $\Phi(\beta,\mu)$, выраженной через несобственный интеграл (3). Для решения этой задачи представим функцию $\Phi(\beta,\mu)$ согласно (3) в виде $\Phi(\beta,\mu)=\Phi^{(-)}(\beta,\mu)-\Phi^{(+)}(\beta,\mu)$,

$$\Phi^{(\pm)}(\beta,\mu)=2\beta^3\int\limits_0^\infty dz z^5\ln\left(1+\exp\left(\mu-\frac{\beta}{4}\left(z\pm\frac{1}{z}\right)^2\right)\right),$$

так что

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\mu_e)|_{\omega\to\infty}\to\frac{2c^2e^2m_e^3}{\pi^3\hbar^3\beta_\omega^4}\Big\{\Phi^{(-)}(\beta_\omega,\mu_e/T)|_{\beta_\omega\to\infty}$$
$$-\Phi^{(+)}(\beta_\omega,\mu_e/T)|_{\beta_\omega\to\infty}\Big\}. \qquad (4)$$

С учетом замены переменных $y=z\pm 1/z$

$$\Phi^{(+)}(\beta,\mu)=2\beta^3\int\limits_2^\infty dy\left\{\frac{(z_2^{(+)})^7}{(z_2^{(+)})^2-1}-\frac{(z_1^{(+)})^7}{\big((z_1^{(+)})^2-1\big)}\right\}$$
$$\times\ln\big(1+\exp(\mu-\beta y^2/4)\big), \qquad (5)$$

$$\Phi^{(-)}(\beta,\mu)=2\beta^3\int\limits_{-\infty}^\infty dy\frac{\big(z^{(-)}(y)\big)^7}{\big(z^{(-)}(y)\big)^2+1}$$
$$\times\ln\big(1+\exp(\mu-\beta y^2/4)\big), \qquad (6)$$

$$z_1^{(+)}(y)=\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2},\quad z_2^{(+)}(y)=\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2},$$
$$z^{(-)}(y)=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}. \qquad (7)$$

Из соотношений (5)–(7) находим „высокочастотную“ асимптотику для функций $\Phi^{(\pm)}(\beta,\mu)$ в пределе $\beta\to\infty$:

$$\Phi^{(+)}(\beta,\mu)|_{\beta\to\infty}\to 4\sqrt{\beta}\int\limits_0^\infty d\alpha\{16\beta^{3/2}\alpha+3\beta^2\}$$
$$\times\exp\big(\mu-\beta-\alpha\sqrt{\beta}\big)|_{\beta\to\infty}\to 12\beta^2\exp(\mu-\beta),$$

$$\Phi^{(-)}(\beta,\mu)|_{\beta\to\infty}\to 4\sqrt{\beta}\int\limits_0^\infty d\alpha(4\beta\alpha^2+3\beta^2)$$
$$\times\ln\big(1+\exp(\mu-\alpha^2/4)\big)|_{\beta\to\infty}\to 12\beta^{5/2}I(\mu),$$

где

$$I(\mu)=\int\limits_0^\infty d\alpha\ln\big(1+\exp(\mu-\alpha^2/4)\big). \qquad (8)$$

При этом высокочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения в идеальном электронном газе имеет вид

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\mu_e)|_{\omega\to\infty}\to 24c^2e^2m_e^3I(\mu_e/T)/\pi^3\hbar^3\beta_\omega^{3/2},$$

где функция $I(\mu_e/T)$ определяется соотношением (8) при произвольном вырождении электронного газа $|\mu_e|<\infty$. Учтем далее, что величина химического потенциала электронов μ_e при заданной температуре T определяется плотностью числа электронов $n_e(T,\mu_e)$ исходя из условия

$$n_e(T,\mu_e)=(2S_e+1)\int d^3pf_e(p)/(2\pi)^3,$$

где

$$f_e(p)=\big\{\exp\big((\epsilon_e(p)-\mu_e)/T\big)+1\big\}^{-1},$$

а $\epsilon_e(p)=\hbar^2p^2/2m_e$ — энергия свободного электрона. Используя в (8) интегрирование по частям, нетрудно убедиться, что

$$n_e(T,\mu_e)=2I(\mu_e/T)/\Lambda_e^3\sqrt{\pi},$$

$\Lambda_e=(2\pi\hbar^2/m_eT)^{1/2}$ — тепловая длина волны де Бройля для электронов. Следовательно, $\Phi(\beta_\omega,\mu_e/T)|_{\omega\to\infty}\to 6\sqrt{\pi}n_e(T,\mu_e)\Lambda_e^3(T)\beta_\omega^{5/2}$,

$$\Delta\varepsilon_\omega(T,\mu_e)|_{\omega\to\infty}\to\frac{24\sqrt{2}e^2n_e(T,\mu_e)}{\pi c}\left(\frac{m_ec^2}{\hbar\omega}\right)^{3/2}. \qquad (9)$$

Соотношение (9) соответствует результатам, полученным для идеального электронного газа в двух предельных случаях: слабого ($n_e\Lambda_e^3\ll 1$) и сильного ($n_e\Lambda_e^3\gg 1$) вырождения электронов (см. подробнее работы [11,13].

В свою очередь высокочастотная асимптотика спектрального распределения энергии равновесного излучения в идеальном электронном газе характеризуется степенным убыванием с увеличением частоты при произвольном вырождении, а значение асимптотики полностью определяется плотностью электронного газа $n_e(T, \mu_e)$ как функцией температуры T и его химического потенциала μ_e.

В заключение отметим, что, несмотря на „медленность" убывания с ростом частоты (в сравнении с распределением Планка), средняя энергия равновесного излучения, приходящаяся на единицу объема, является конечной величиной. Следует подчеркнуть, что полученные результаты можно рассматривать как точные. Дело в том, что в рассмотренной высокочастотной асимптотике значение энергии фотонов $\hbar\omega$ считается заведомо бо́льшим, чем характерные энергетические величины, характеризующие вещество, включая величину характерной энергии кулоновского взаимодействия между заряженными частицами в веществе. Это означает, что в высокочастотном пределе в рассматриваемой материальной среде не выполняется закон Вина, который непосредственно следует из распределения Планка для АЧТ. При этом само равновесное излучение АЧТ является результатом взаимодействия заряженных частиц, окружающих полость, заполненную излучением. Однако материальная среда, представляющая собой совокупность полости с излучением при отсутствии (предположительно) в ней частиц и окружающего эту полость вещества с излучением, является неоднородной системой. В такой неоднородной системе в силу локальности гамильтониана взаимодействия электромагнитного поля с заряженными частицами средняя энергия такого взаимодействия пропорциональна площади поверхности взаимодействия S.

После перехода к термодинамическому пределу ($V \to \infty$, $S \to \infty$) поверхностным вкладом в среднюю энергию электромагнитного поля следует пренебречь по сравнению с объемным вкладом, что и приводит к распределению Планка для АЧТ. В свою очередь в настоящей работе рассматривается однородная и изотропная материальная среда, в которой отсутствуют выделенные полости. Поэтому учет взаимодействия частиц и поля приводит к поправке к распределению Планка, рассматриваемому как „нулевое приближение", в котором не учитываются поверхностные эффекты. Такое рассмотрение также приводит к корректному результату только в термодинамическом пределе.

Вместе с тем последовательные модели для ТПВ включают в себя учет связанных состояний электронов, локализованных около ядер, образующих ионы ТПВ как составные частицы. При этом ТПВ обычно ассоциируется с комбинацией сильно связанных ионов и умеренно вырожденных электронов. С этой точки зрения дальнейшее развитие полученных выше результатов связано с построением моделей, учитывающих эффекты взаимодействия между частицами вещества при описании поперечной ДП. При этом в отличие от хорошо известных методов, используемых при рассмотрении продольной ДП [18,19], для корректного рассмотрения поперечной ДП необходимо последовательно учитывать собственный магнитный момент электронов (см. подробнее [20]).

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-00348 (https://rscf.ru/project/22-29-00348/).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] J.C. Valenzuela, C. Krauland, D. Mariscal, I. Krasheninnikov, C. Niemann, T. Ma, P. Mabey, G. Gregori, P. Wiewior, A.M. Covington, F.N. Beg, Sci. Rep., **8**, 8432 (2018). DOI: 10.1038/s41598-018-26608-w

[2] T. Dornheim, S. Groth, M. Bonitz, Phys. Rep., **744**, 1 (2018). DOI: 10.1016/j.physrep.2018.04.001

[3] L.V. Pourovskii, J. Mravlje, M. Pozzo, D. Alfé, Nature Commun., **11**, 4105 (2020). DOI: 10.1038/s41467-020-18003-9

[4] K. Hunger, T. Schoof, T. Dornheim, M. Bonitz, A. Filinov, Phys. Rev. E, **103** (5), 053204 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevE.103.053204

[5] V.B. Bobrov, J. Phys.: Condens Matter, **2** (31), 6695 (1990). DOI: 10.1088/0953-8984/2/31/022

[6] M. Opher, R. Opher, Phys. Rev. Lett., **79** (14), 2628 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.2628

[7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика* (Наука, М., 1976), ч. 1, с. 205. [L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Statistical physics*, 3rd ed. (Butterworth–Heinemann, Oxford, 1980), vol. 5].

[8] М.Б. Агранат, С.И. Ашитков, А.В. Овчинников, Д.С. Ситников, А.А. Юркевич, О.В. Чефонов, Л.Т. Перельман, С.И. Анисимов, В.Е. Фортов, Письма в ЖЭТФ, **101** (9), 671 (2015). DOI: 10.7868/S0370274X15090039 [M.B. Agranat, S.I. Ashitkov, A.V. Ovchinnikov, D.S. Sitnikov, A.A. Yurkevich, O.V. Chefonov, L.T. Perel'man, S.I. Anisimov, V.E. Fortov, JETP Lett., **101** (9), 598 (2015). DOI: 10.1134/S0021364015090039].

[9] С.П. Русин, ТВТ, **56** (2), 203 (2018). DOI: 10.7868/S0040364418020060 [S.P. Rusin, High Temp., **56** (2), 193 (2018). DOI: a10.1134/S0018151X18020207].

[10] В.Б. Бобров, И.М. Соколов, С.А. Тригер, Письма в ЖЭТФ, **101** (5), 326 (2015). DOI: 10.7868/S0370274X15050033 [V.B. Bobrov, I.M. Sokolov, S.A. Trigger, JETP Lett., **101** (5), 299 (2015). DOI: 10.1134/S0021364015050045].

[11] В.Б. Бобров, ЖТФ, **89** (7), 1025 (2019). DOI: 10.21883/JTF.2019.07.47792.52-18 [V.B. Bobrov, Tech. Phys., **64** (7), 966 (2019). DOI: 10.1134/S1063784219070089].

[12] V.R. Munirov, N.J. Fisch, Phys. Rev. E, **100** (2), 023202 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevE.100.023202

[13] V.B. Bobrov, S.A. Trigger, I.M. Sokolov, Phys. Plasmas, **27** (2), 022106 (2020). DOI: 10.1063/1.5119429

[14] А.Ф. Александров, Л.С. Богданкевич, А.А. Рухадзе, *Основы электродинамики плазмы* (Высш. шк., М., 1978), с. 16. [A.F. Alexandrov, L.S. Bogdankevich, A.A. Rukhadze, *Principles of plasma electrodynamics* (Springer, Heidelberg, 1984).].

[15] Д.А. Киржниц, УФН, **152** (3), 399 (1987). DOI: 10.3367/UFNr.0152.198707b.0399 [D.A. Kirzhnits, Sov. Phys. Usp., **30** (7), 575 (1987). DOI: 10.1070/PU1987v030n07ABEH002925].

[16] S. Ichimaru, Rev. Mod. Phys., **54** (4), 1017 (1982). DOI: 10.1103/RevModPhys.54.1017

[17] V.B. Bobrov, S.A. Maslov, S.A. Trigger, Phys. Plasmas, **25** (7), 072116 (2018). DOI: 10.1063/1.5034243

[18] В.Д. Горобченко, Е.Г. Максимов, УФН, **130** (1), 65 (1980). DOI: 10.3367/UFNr.0130.198001c.0065 [V.D. Gorobchenko, E.G. Maksimov, Sov. Phys. Usp., **23** (1), 35 (1980). DOI: 10.1070/PU1980v023n01ABEH004860].

[19] В.П. Макаров, А.А. Рухадзе, ЖЭТФ, **125** (2), 345 (2004). http://www.jetp.ras.ru/cgi-bin/r/index/r/125/2/p345?a=list [V.P. Makarov, A.A. Rukhadze, JETP, **98** (2), 305 (2004). DOI: 10.1134/1.1675897].

[20] V.B. Bobrov, Physica A, **187** (3-4), 603 (1992). DOI: 10.1016/0378-4371 (92)90013-G