

## Фокусировка поверхностной плазмонной волны на нановершине сканирующего металлического микроострия у плоскостройной структуры

© А.Б. Петрин

Объединенный институт высоких температур РАН,  
125412 Москва, Россия

e-mail: a\_petrin@mail.ru

Поступила в редакцию 30.04.2022 г.

В окончательной редакции 08.06.2022 г.

Принята к публикации 20.06.2022 г.

Сформулирован и обоснован обобщенный метод зеркальных отражений электростатики для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостройной структурой. Метод обобщен на случай произвольной системы зарядов. Подробно показано, как применить полученный метод к нахождению фокального распределения электрического поля в окрестности нановершины металлического микроострия, расположенного рядом с плоскостройной структурой, которое получается при схождении поверхностной плазмонной ТМ волны к нановершине. Демонстрируется проникновение поля в область поверхностного слоя плоскостройной структуры (фоторезист) размером порядка радиуса закругления острия.

**Ключевые слова:** нанофокусировка, поверхностные плазмоны, оптические сенсоры.

DOI: 10.21883/OS.2022.09.53308.3636-22

### Введение

Нанофокусировка световой энергии на вершинах микроострий — важнейшее явление, лежащее в основе перспективных нанотехнологических приложений. Нанофокусировка состоит в необычайно резком возрастании интенсивности поверхностной плазмонно-поляритонной волны, симметрично возбуждаемой в основании металлического конического микроострия, при ее схождении к нановершине [1–3]. Это явление объясняется тем, что на геометрически идеальном металлическом острие может существовать осесимметричная электромагнитная стоячая волна с сингулярностью электрического поля на вершине [4]. Как показывают эксперименты [5,6], эта волна может эффективно возбуждаться сходящейся к вершине поверхностной плазмонно-поляритонной ТМ-волной с той же осевой симметрией поля. Наличие сингулярности электрического поля хорошо объясняется в квазистатическом приближении, выполняющимся в окрестности вершины.

Реальная вершина микроострия не идеальна и имеет закругление на вершине. В работах [7,8] для нахождения распределения электрического поля на закругленной вершине одиночного микроострия поверхность вершины была аппроксимирована параболоидом вращения. Задача была решена в параболоидальной системе координат. Было доказано, что размер фокального распределения на вершине убывает пропорционально радиусу закругления вершины, что принципиально и объясняет нанофокусировку (при уменьшении радиуса острия до нанометровых размеров размер фокальной области уменьшается в той же пропорции).

Если нановершина микроострия находится вблизи плоскостройной структуры, то возникает необходимость детального описания распределения сфокусированного на вершине поля как вблизи вершины острия, так и в плоскостройной структуре. В задачах излучения и распространения электромагнитных полей в плоскостройных средах широко используются матричные методы и методы функции Грина для плоскостройных сред [9,10]. В работах [11–13] был предложен оригинальный вариант строгой электромагнитной теории излучения элементарного диполя, расположенного на границе или внутри плоскостройной структуры, являющийся развитием работ [14,15]. В частности, в [11–13] был продемонстрирован метод аналитического упрощения решения, имеющий потенциально важное общетеоретическое значение. Обобщение данного метода для случая произвольного количества пленок в плоскостройной структуре [16] позволило привести формулы для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задачи и ускорило численные расчеты. В данном исследовании методы работ [11–13,16] применяются сначала к нахождению трехмерного фундаментального решения электростатики (квазиэлектростатики) в плоскостройных средах, т.е. к нахождению поля точечного заряда в плоскостройных средах. На основе полученных результатов дается обобщение метода зеркальных отражений для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостройной структурой, а далее этот результат обобщается на случай произвольного распределения зарядов вблизи плоскостройной структуры. Обсуждается применение обобщенного метода зеркальных отражений для формулировки задач нанофокусировки поверхност-

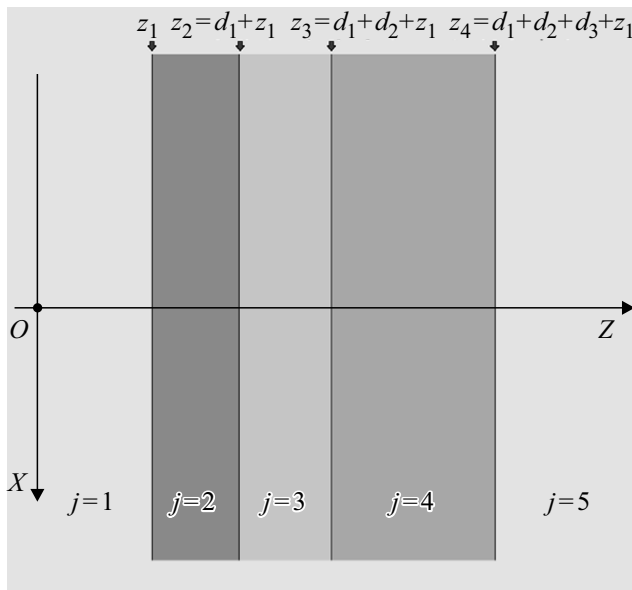


Рис. 1. Геометрия плоскостойкой структуры, состоящей из трех пленок.

ной плазмонной волны на вершине микроострия, расположенного вблизи нанослоя фоторезиста.

**Постановка задачи. Электрическое поле точечного заряда, расположенного внутри плоскостойкой структуры**

Рассмотрим общую задачу нахождения электростатического поля от точечного заряда, расположенного внутри плоскостойкой структуры. Пусть, для общности, этот заряд расположен внутри плоской слоистой структуры, состоящей из нескольких пленок, и из окружающих слоистую структуру двух полупространств. Для определенности сначала будем считать, что заряд расположен в одной из пленок, а затем обобщим эту задачу на случай, когда заряд расположен на их границе или в одном из полупространств.

Пусть общее число пленок равно  $N_f$ , толщина  $m$ -й пленки равна  $d_m$  и полная толщина слоистой структуры равна  $d_{tot} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$ . Общее число границ между пленками обозначим как  $N = N_f + 1$ . Пронумеруем области пространства  $j = 1, \dots, (N + 1)$ , (на рис. 1 показана для примера задача с  $N = 4$  и  $N_f = 3$ ). Предположим, что пленки имеют абсолютные диэлектрические проницаемости, равные  $\epsilon_j$ , а перед и за слоистой структурой находятся однородные полупространства с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_{N+1}$ . Обозначим также через  $z_j$  координаты  $N$  границ пленок по оси  $Z$  следующим образом:  $z_1 = z_1$ ,  $z_j = z_1 + \sum_{m=1}^{j-1} d_m$  при  $j = 2, \dots, N$ .

Уравнения электростатики (или квазиэлектростатики) в области с номером  $j$  можно записать через электри-

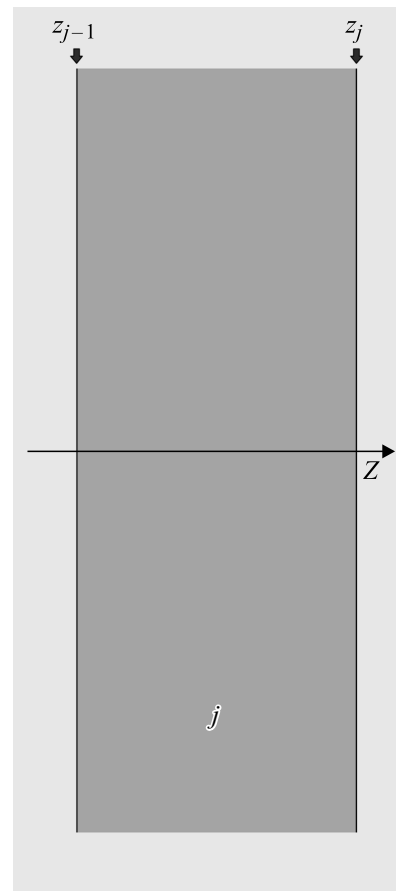


Рис. 2. Пленка с номером  $j$ , расположенная между границами  $z_{j-1}$  и  $z_j$ .

ческий потенциал  $\phi_j$  в виде:  $\Delta\phi_j = -q/\epsilon_j$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\epsilon_j$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость  $j$ -й области. Решая уравнения Лапласа в каждой области с учетом граничных условий, найдем электрическое поле во всех областях. Рассмотрим сначала следующую вспомогательную задачу.

**Электрическое поле в слое, свободном от зарядов**

Пусть в области с номером  $j$  нет сторонних зарядов между границами  $z_{j-1}$  и  $z_j$  (рис. 2). Диэлектрическая проницаемость среды в этой пленке равна  $\epsilon_j$ .

Электрический потенциал можно представить в виде фурье-разложения:

$$\phi_j(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x + i\eta y} \hat{\phi}_j(\xi, \eta, z) d\xi d\eta. \quad (1)$$

Подставим в уравнение  $\Delta\phi_j = 0$  потенциал в виде фурье-разложения, тогда в рассматриваемой области можно записать

$$d^2\hat{\phi}_j/dz^2 - \gamma^2\hat{\phi}_j = 0, \quad (2)$$

где  $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ . Уравнения при фиксированных значениях  $\xi$  и  $\eta$  есть обыкновенные дифференциальные уравнения относительно переменной  $z$ . Задача состоит в нахождении из уравнений функции  $\hat{\varphi}_j$  в рассматриваемой области.

Линейно независимые решения уравнений можно записать в виде

$$\varphi_j^\pm = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_j^\pm e^{\mp\gamma z} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (3)$$

Общее решение уравнений (2) в области  $[z_{j-1}, z_j]$  запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_j(z, y, z) = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_j^+ e^{-\gamma(z-z_{j-1})} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ & + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_j^- e^{\gamma(z-z_j)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\hat{\varphi}_j^+$  и  $\hat{\varphi}_j^-$  — функции только от  $\xi, \eta$ .

Отметим особо следующую принципиально важную идею: общее решение уравнения Лапласа, состоящее из линейной комбинации решений, должно быть записано таким образом, чтобы существовали обратные преобразования Фурье. Поэтому форма записи общего решения для поля в слое не случайна, она выделяет физически верное решение. Первое слагаемое справа в формуле представляет собой поле от источников, находящихся слева от левой границы слоя. При этом поле будет уменьшаться при удалении вправо (при удалении от источников слева от слоя). Второе слагаемое справа в формуле представляет собой поле от источников, находящихся справа от правой границы слоя (внутри слоя источников нет по условию задачи). Это поле будет уменьшаться при удалении влево (при удалении от источников, находящихся справа от слоя).

Из найдем фурье-образ электрического потенциала и нормальную компоненту индукции электрического поля границах области  $j$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_j \\ \hat{D}_{j,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_{j-1}} &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \varepsilon_j \gamma & -\varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_j^+ \\ \hat{\varphi}_j^- \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_j \\ \hat{D}_{j,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_j} &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_j} & 1 \\ \varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_j} & -\varepsilon_j \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_j^+ \\ \hat{\varphi}_j^- \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$ . Вводя вектор-столбец  $\hat{\mathcal{F}}_j = (\hat{\varphi}_j^+; \hat{\varphi}_j^-)^T$ , перепишем полученные выражения следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_j \\ \hat{D}_{j,d} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_{j-1}} = \mathbf{L}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j, \quad \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_j \\ \hat{D}_{j,d} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_j} = \mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j, \quad (6)$$

где матрицы  $\mathbf{L}_j$  и  $\mathbf{R}_j$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_j &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \varepsilon_j \gamma & -\varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_j &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_j} & 1 \\ \varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_j} & -\varepsilon_j \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

### Электрическое поле в многослойной структуре, свободной от сторонних зарядов

Рассмотрим теперь многослойную структуру, внутри которой нет сторонних зарядов. Рассмотрим границу  $z = z_j$  между областями с номерами  $j$  и  $j + 1$ . Непрерывность тангенциальных компонент напряженностей электрического поля ( $E_{j,x}, E_{j+1,x}$  и  $E_{j,y}, E_{j+1,y}$ ), и нормальных компонент электрической индукции ( $D_{j,z} = -\varepsilon_j \partial \varphi_j / \partial z$  и  $D_{j+1,z} = -\varepsilon_{j+1} \partial \varphi_{j+1} / \partial z$ ) на этой границе можно записать через соответствующие электрические потенциалы  $\varphi_j$  и  $\varphi_{j+1}$  в виде:

$$\varphi_j|_{(x,y,z_j)} - \varphi_{j+1}|_{(x,y,z_j)} = 0,$$

и

$$\varepsilon_j \partial \varphi_j / \partial z|_{(x,y,z_j)} - \varepsilon_{j+1} \partial \varphi_{j+1} / \partial z|_{(x,y,z_j)} = 0,$$

где электрический потенциал  $\varphi_{j+1}$  в области  $j + 1$  выражается формулой (4), в которой произведена замена индексов  $j \rightarrow j + 1$ . Так как уравнения электростатики (квазиэлектростатики) — линейные уравнения, то граничные условия должны выполняться для каждого члена фурье-разложения, т.е. граничные условия должны выполняться для фурье-образов соответствующих величин:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_j|_{(\xi,\eta,z_j)} - \hat{\varphi}_{j+1}|_{(\xi,\eta,z_j)} &= 0, \\ \hat{D}_{j,z}|_{(\xi,\eta,z_j)} - \hat{D}_{j+1,z}|_{(\xi,\eta,z_j)} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Записывая граничные условия (8) с помощью выражений (6), получим матричное уравнение на границе  $z = z_j$ :

$$\mathbf{R}_j \times \hat{\mathcal{F}}_j = \mathbf{L}_{j+1} \times \hat{\mathcal{F}}_{j+1}, \quad (9)$$

где  $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$ ,  $d_j = z_{j+1} - z_j$ , а матрицы  $\mathbf{R}_j$  и  $\mathbf{L}_{j+1}$  выражаются формулами (7), т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{j+1} &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_j} \\ \varepsilon_{j+1} \gamma & -\varepsilon_{j+1} \gamma e^{-\gamma d_j} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R}_j &= \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_{j-1}} & 1 \\ \varepsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} & -\varepsilon_j \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Уравнение (9) можно записать для  $j = 2, \dots, (N - 1)$ , где  $(N + 1)$  — общее число областей,  $N$  — число границ, т.е. для всех границ, исключая первую ( $j = 1$ ) и последнюю ( $j = N$ ) границы. То есть исключая границы  $z_1$  и

$z_N = d_{tot} = \sum_{m=1}^{N-1} d_m$ , где  $d_{tot}$  — общая толщина слоистой структуры (сумма толщин пленок, составляющих рассматриваемую структуру).

Общее решение для электрического потенциала в области  $j = 1$ , т.е. в интервале  $(-\infty, z_1]$ , запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_1^+ e^{-\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ & + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (10)$$

В рассматриваемой задаче, в выражении (10), отлично от нуля только второе слагаемое, которое предполагает наличие источников только справа от границы  $z = z_1$ .

Тогда, учитывая, что из выражения (10) следует, что

$$\left. \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1 \\ \hat{D}_{1,x} \end{pmatrix} \right|_{z=z_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\varphi}_1^- \end{pmatrix},$$

запишем граничные условия на границе  $z = z_1$ , обозначив  $\hat{\mathcal{F}}_1 = (0; \hat{\varphi}_1^-)^T$ , в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}} = \mathbf{L}_2 \times \hat{\mathcal{F}}_2. \quad (11)$$

Аналогично общее решение для электрического потенциала в области  $j = N + 1$ , т.е. в интервале  $[z_N + \infty)$ , запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{N+1}(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ & + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{N+1}^- e^{\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (12)$$

В рассматриваемой задаче, в выражении (12), отлично от нуля только одно слагаемое, которое предполагает наличие источников только слева от границы  $z = z_N$ .

Тогда, учитывая, что из (12) следует

$$\left. \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{N+1} \\ \hat{D}_{N+1,z} \end{pmatrix} \right|_{z=z_N} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{N+1}^+ \\ 0 \end{pmatrix},$$

запишем граничные условия на границе  $z = z_N$  в виде

$$\mathbf{R}_N \times \hat{\mathcal{F}}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}, \quad (13)$$

где  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1} = (\hat{\varphi}_{N+1}^+; 0)$ . Уравнения (9), (11) и (13) позволяют связать векторы-столбцы электрического потенциала

в первой и последней областях задачи (т.е. в полупространствах, вне плоскостойкой структуры):

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_1 = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times [\mathbf{L}_2 \times (\mathbf{R}_2)^{-1}] \times \dots \\ & \times [\mathbf{L}_N \times (\mathbf{R}_N)^{-1}] \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}, \end{aligned} \quad (14)$$

или  $\hat{\mathcal{F}}_1 = \mathbf{M} \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ , причем матрица  $\mathbf{M}$  имеет вид  $\mathbf{M} = \mathbf{T}_1 \times (\prod_{m=2}^N \mathbf{T}_m) \times \mathbf{T}_{N+1}$ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix}^{-1} & \mathbf{T}_m = \mathbf{L}_m \times (\mathbf{R}_m)^{-1}, \\ \mathbf{T}_{N+1} = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если нам известен, например, потенциал какого-то распределения зарядов в пленках структуры, то из уравнения (14), как системы из двух уравнений, можно найти два неизвестных — функцию  $\hat{\varphi}_1^-$  и, значит, потенциал в полупространстве  $j = 1$  от зарядов, в плоскостойкой структуре по формуле (10), и функцию  $\hat{\varphi}_{N+1}^+$  вектора-столбца  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$  и потенциал от зарядов в полупространстве  $j = N + 1$ , в плоскостойкой структуре по формуле (12).

### Электрическое поле в многослойной структуре от точечного заряда

Пусть имеется точечный сторонний заряд  $q$ , расположенный в точке  $(0, 0, z_q)$  в области с номером  $s$  (рис. 3).

Пусть этот заряд определяется распределением плотности,

$$\rho(x, y, z) = q \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_q),$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Фурье-образ этого распределения определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\xi, \eta, z) = & q \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \delta(y) \delta(z - z_q) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy \\ = & q \delta(z - z_q). \end{aligned}$$

Пусть этот точечный заряд находится в бесконечно тонком слое  $(z_q - \Delta z/2, z_q + \Delta z/2)$ . Тогда из уравнений электростатики  $rot \mathbf{E} = 0$  и  $div \mathbf{D} = \rho$  для фурье-образов полей можно записать (при  $\Delta z \rightarrow 0$ ) уравнения:

$$\begin{aligned} i\eta \hat{E}_{s,z} - \frac{\Delta \hat{E}_{s,y}}{\Delta z} = 0, & \quad \frac{\Delta \hat{E}_{s,x}}{\Delta z} - i\xi \hat{E}_{s,z} = 0 \\ i\xi \hat{E}_{s,y} - i\eta \hat{E}_{s,x} = 0, & \end{aligned} \quad (15)$$

$$i\xi \hat{D}_{s,x} + i\eta \hat{D}_{s,y} + \frac{\Delta \hat{D}_{s,z}}{\Delta z} = q \delta(z - z_q). \quad (16)$$

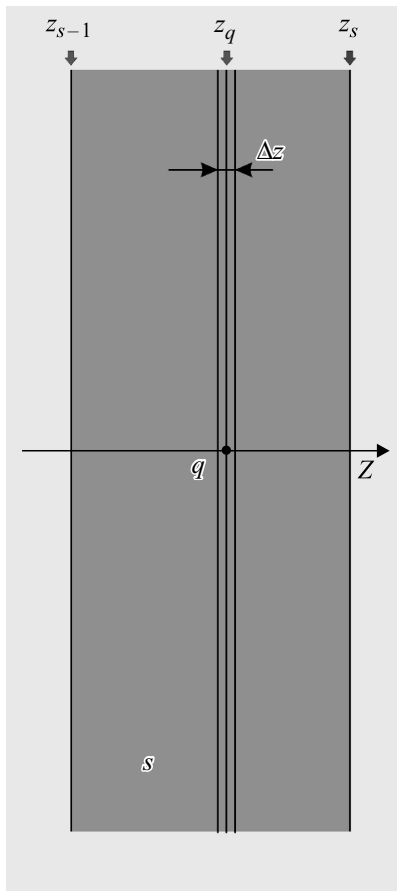


Рис. 3. Точечный заряд  $q$ , расположенный в точке  $(0, 0, z_d)$  в области с номером  $s$ .

Откуда получим

$$\Delta \hat{E}_{s,y} = i\eta \hat{E}_{s,z} \Delta z, \quad \Delta \hat{E}_{s,x} = i\xi \hat{E}_{s,z} \Delta z,$$

$$\Delta \hat{D}_{s,x} = -(i\xi \hat{D}_{s,x} + i\eta \hat{D}_{s,y}) \Delta z + q\delta(z - z_q) \Delta z.$$

Тогда, в пределе  $\Delta z \rightarrow 0$ , скачки тангенциальных компонент напряженностей электрического поля и нормальной компоненты индукции электрического поля при переходе через бесконечно тонкий слой с зарядом равны

$$\Delta \hat{E}_{s,x} \xrightarrow{\Delta z} 0, \quad \Delta \hat{E}_{s,y} \xrightarrow{\Delta z} 0, \quad \Delta \hat{D}_{s,z} \xrightarrow{\Delta z} q.$$

В матричном виде эти предельные уравнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \hat{E}_{s,x} \\ \hat{E}_{s,y} \\ \Delta \hat{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q+0} - \begin{pmatrix} \hat{E}_{s,x} \\ \hat{E}_{s,y} \\ \Delta \hat{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{pmatrix},$$

или, в эквивалентном виде, через потенциал

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_s \\ \hat{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q+0} - \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_s \\ \hat{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Выразим теперь левую часть граничного условия (17) через векторы-столбцы  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$  полупространств, снаружи плоскостной структуры. Для этого разобьем область с номером  $s$  на две области и обозначим их индексами  $l$  и  $r$  (левая и правая, если смотреть на рис. 3). Введем векторы-столбцы  $\hat{\mathcal{F}}_l$  и  $\hat{\mathcal{F}}_r$  в этих областях. Тогда члены слева от знака равенства в (17) можно выразить как

$$\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_s \\ \hat{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d-0} = \mathbf{R}_l \times \hat{\mathcal{F}}_l \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_s \\ \hat{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d+0} = \mathbf{L}_r \times \hat{\mathcal{F}}_r. \quad (18)$$

Кроме того, из (9) следует, что

$$\hat{\mathcal{F}}_l = \mathbf{Q}_L \times \hat{\mathcal{F}}_1 \quad \text{и} \quad \hat{\mathcal{F}}_r = \mathbf{Q}_R \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1}, \quad (19)$$

где

$$\mathbf{Q}_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix}^{-1} \times [\mathbf{L}_2 \times (\mathbf{R}_2)^{-1}] \times \dots$$

$$\times \times [\mathbf{L}_{s-1} \times (\mathbf{R}_{s-1})^{-1}] \times \mathbf{L}_l,$$

$$\mathbf{L}_l = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_q - z_{s-1})} \\ \varepsilon_s \gamma & -\varepsilon_s \gamma e^{-\gamma(z_q - z_{s-1})} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_R = (\mathbf{R}_r)^{-1} \times [\mathbf{L}_{s+1} \times (\mathbf{R}_{s+1})^{-1}] \times \dots$$

$$\times [\mathbf{L}_N \times (\mathbf{R}_N)^{-1}] \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_r = \begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_s - z_q)} & 1 \\ \varepsilon_s \gamma e^{-\gamma(z_s - z_q)} & -\varepsilon_s \gamma \end{pmatrix}.$$

Подставляя (19) в (18) и затем полученные выражения в (17), получаем

$$\mathbf{H}_R \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V}, \quad (20)$$

где  $\mathbf{V} = (0, q)^T$  — вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие точечного заряда, а матрицы  $\mathbf{H}_R$  и  $\mathbf{H}_L$  — характеризуют отклик на внешнее возбуждение слоистой структуры справа и слева от заряда и выражаются следующим образом:

$$\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_R \times (\Pi_{m=s+1}^N \mathbf{T}_m) \times \mathbf{T}_{N+1},$$

$$\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1 \times (\Pi_{m=2}^{s-1} \mathbf{T}_m) \times \mathbf{T}_L)^{-1},$$

где матрицы  $\mathbf{T}_m$  при  $m \neq s$  выражаются формулой  $\mathbf{T}_m = \mathbf{L}_m \times (\mathbf{R}_m)^{-1}$ , а матрицы  $\mathbf{T}_L$  и  $\mathbf{T}_R$  — формулами  $\mathbf{T}_L = \mathbf{L}_l \times (\mathbf{R}_l)^{-1}$ ,  $\mathbf{T}_R = \mathbf{L}_r \times (\mathbf{R}_r)^{-1}$ .

В рассматриваемой задаче источник полей (точечный заряд) находится исключительно внутри плоскостной структуры. Поэтому в столбцах  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$  есть только компоненты, определяющие волны, идущие от плоско-слоистой структуры.

Чтобы получить оставшиеся, отличные от нуля, компоненты  $\tilde{\mathcal{F}}_1$  и  $\tilde{\mathcal{F}}_{N+1}$ , разобьем матрицы на  $\mathbf{H}_R$  и  $\mathbf{H}_L$  на элементы  $H_{RA}, H_{RB}, H_{RC}, H_{RD}$  и  $H_{LA}, H_{LB}, H_{LC}, H_{LD}$ , тогда уравнение (20) примет вид

$$\begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{N+1}^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\varphi}_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Тогда можно представить следующими уравнениями:

$$H_{RA}\hat{\varphi}_{N+1}^+ = H_{LB}\hat{\varphi}_1^-; \quad H_{RC}\hat{\varphi}_{N+1}^+ = H_{LD}\hat{\varphi}_1^- + q.$$

Полученные уравнения можно снова объединить в одно матричное  $2 \times 2$  уравнение:

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & H_{RA} \\ -H_{LD} & H_{RC} \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{F}}_{out} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где введен вектор-столбец  $\tilde{\mathcal{F}}_{out} = (\hat{\varphi}_1^-; \hat{\varphi}_{N+1}^+)^T$ .

Решая это уравнение, найдем  $\hat{\varphi}_1^-$  и  $\hat{\varphi}_{N+1}^+$ , а значит, убывающие при удалении от плоскостройной структуры поля:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_1^- &= qH_{RA}/(H_{RC}H_{LB} - H_{RA}H_{LD}), \\ \hat{\varphi}_{N+1}^+ &= qH_{LB}/(H_{RC}H_{LB} - H_{RA}H_{LD}). \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда убывающее влево поле в полупространстве  $J + 1$  (в направлении  $z \rightarrow -\infty$ ):

$$\varphi_1(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (24)$$

а убывающее вправо поле в полупространстве  $j = N + 1$  (в направлении  $z \rightarrow +\infty$ ):

$$\varphi_{N+1}(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (25)$$

Наконец, зная  $\tilde{\mathcal{F}}_1$  и  $\tilde{\mathcal{F}}_{N+1}$ , можно при необходимости найти векторы-столбцы потенциалов в любой внутренней области  $\tilde{\mathcal{F}}_j$ , так как они однозначно определяется граничными условиями. После этого электрический потенциал в любой из этих областей может быть найден по формуле (4). Таким образом, поля будут определены во всем пространстве.

### Электрическое поле точечного заряда, расположенного на некотором расстоянии от границы пленки на полупространстве

Рассмотрим теперь задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда  $q$ , расположенного в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_f$ , на

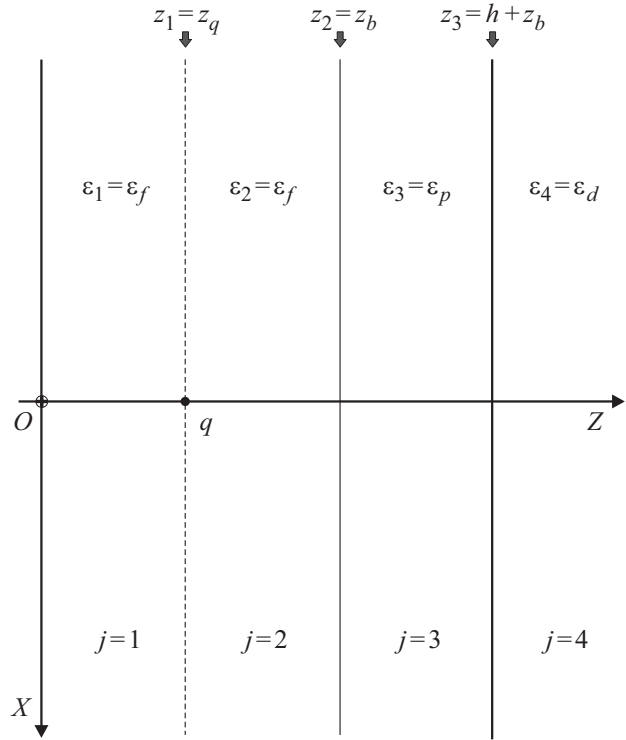


Рис. 4. Точечный заряд  $z_q$ , расположенный в точке с координатой на расстоянии  $z_b - z_q$  от пленки толщиной  $h$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_p$ , расположенной на границе полупространства.

некотором расстоянии от пленки с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_p$ , нанесенной на полупространство с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_d$  (рис. 4).

В системе координат рис. 4 заряд находится в точке с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$  на расстоянии  $z_{bq} = z_b - z_q$  вдоль оси  $Z$  от пленки толщиной  $h$ .

Можно рассмотреть эту задачу как задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда, расположенного на поверхности вспомогательной пленки толщины  $z_{bq} = z_b - z_q$ , причем диэлектрические постоянные этой вспомогательной пленки и полупространства слева одинаковы и равны  $\epsilon_f$ .

Таким образом, имеется четыре области задачи. В предложенной выше нумерации индекс  $j = 1$  соответствует полупространству с  $\epsilon_f$ ,  $j = 2$  — вспомогательной пленке с  $\epsilon_2 = \epsilon_f$  и толщиной, равной расстоянию от заряда до пленки, т.е.  $z_{bq} = z_b - z_q$ ,  $j = 3$  — реальной пленке с  $\epsilon_3 = \epsilon_p$  толщиной  $h$ , а  $j = 4$  — полупространству с  $\epsilon_4 = \epsilon_d$  (рис. 4).

Тогда  $N = 3$ ,  $z_1 = z_q$ ,  $z_2 = z_b$ ,  $z_3 = h + z_b$ ,  $\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4$ ,  $\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1)^{-1}$  и уравнение (20) примет вид

$$(\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4) \times \tilde{\mathcal{F}}_4 = (\mathbf{T}_1)^{-1} \times \tilde{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V}, \quad (26)$$

где матрицы выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{T}_2 &= \mathbf{L}_2 \times (\mathbf{R}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_b-z_q)} \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b-z_q)} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_b-z_q)} & 1 \\ \varepsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b-z_q)} & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{T}_3 &= \mathbf{L}_3 \times (\mathbf{R}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h} \\ \varepsilon_p \gamma & -\varepsilon_p \gamma e^{-\gamma h} \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} e^{-\gamma h} & 1 \\ \varepsilon_p \gamma e^{-\gamma h} & -\varepsilon_p \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{T}_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_d \gamma & -\varepsilon_d \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а вектор-столбец точечного заряда равен

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_L &= \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} = (\mathbf{T}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}_R &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_b-z_q)} \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b-z_q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_b-z_q)} & 1 \\ \varepsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b-z_q)} & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h} \\ \varepsilon_p \gamma & -\varepsilon_p \gamma e^{-\gamma h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h} & 1 \\ \varepsilon_p \gamma e^{-\gamma h} & -\varepsilon_p \gamma \end{pmatrix}^{-1} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_d \gamma & -\varepsilon_d \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вводя вектор-столбец  $\hat{\mathcal{F}}_{out} = (\hat{\varphi}_1^-; \hat{\varphi}_4^+)^T$ , уравнение (22) для данной задачи примет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & H_{RA} \\ \varepsilon_f \gamma & H_{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1^- \\ \hat{\varphi}_4^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Из (27) следует

$$\hat{\varphi}_1^- = q H_{RA} / (H_{RC} + \varepsilon_f \gamma H_{RA}), \quad \hat{\varphi}_4^+ = q / (H_{RC} + \varepsilon_f \gamma H_{RA}). \quad (28)$$

В явном виде выражения (28) можно получить через гиперболические синусы и косинусы, если в них подставить выражения

$$\begin{aligned} H_{RA} &= (\varepsilon_p \operatorname{ch}(\gamma h) + \varepsilon_d \operatorname{sh}(\gamma h)) \operatorname{ch}(\gamma z_{bq}) / \varepsilon_p \\ &+ (\varepsilon_p \operatorname{sh}(\gamma h) + \varepsilon_d \operatorname{ch}(\gamma h)) \operatorname{sh}(\gamma z_{bq}) / \varepsilon_f, \quad (29) \end{aligned}$$

$$H_{RC} = \gamma (\varepsilon_p \operatorname{ch}(\gamma h) + \varepsilon_d \operatorname{sh}(\gamma h)) (\varepsilon_f \operatorname{sh}(\gamma z_{bq}) + \varepsilon_p \operatorname{ch}(\gamma z_{bq})) / \varepsilon_p. \quad (30)$$

Найдем потенциал  $\varphi_1$  в полупространстве ( $j = 1$ ) при  $z \leq z_q$ . Подставляя выражения (29) и (30) для  $H_{RA}$  и  $H_{RC}$  в выражение (28) для  $\hat{\varphi}_1^-$ , получаем

$$\hat{\varphi}_1^- = \frac{q H_{RA}}{H_{RC} + \varepsilon_f \gamma H_{RA}} = \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} + \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} e^{-2\gamma(z_b-z_q)} \mathfrak{R}(\gamma, h), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\gamma, h) &= \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{\varepsilon_p + \varepsilon_f} + \frac{4\varepsilon_p \varepsilon_f}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \\ &\times \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]}. \quad (32) \end{aligned}$$

Из выражения (24), используя (31), получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} e^{\gamma(z-z_q)} \right. \\ &\left. + \frac{q}{2\gamma \varepsilon_f} e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))} \mathfrak{R}(\gamma, h) \right) \times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( q e^{\gamma|z-a|} / 2\varepsilon_f \gamma \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ = q / 4\pi \varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}. \quad (33) \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi \varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z_q)^2}} \\ &+ \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{\varepsilon_p + \varepsilon_f} \frac{q}{4\pi \varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-(2z_b-z_q))^2}} \\ &+ \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2\varepsilon_p}{\gamma(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \right. \\ &\times \left. \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d) e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} \right) \\ &\times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (34) \end{aligned}$$

Переходя в интеграле к полярным координатам в плоскостях  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$ , по формулам

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi \quad \text{и} \\ \xi &= \lambda \cos \vartheta, \quad \eta = \lambda \sin \vartheta, \quad (35) \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho, \psi, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - z_q)^2}} \\ &+ \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - (2z_b - z_q))^2}} \\ &+ \frac{q}{(2\pi)^2} \frac{2\epsilon_p(\epsilon_p - \epsilon_d)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi - \vartheta)} d\vartheta \right) \\ &\times \left( \frac{e^{\lambda(z - (2z_b - z_q))}}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Используя тождество  $\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi - \vartheta)} d\vartheta = 2\pi J_0(\rho\lambda)$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho, \psi, z) &= q/4\pi\epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - z_q)^2} \\ &+ \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p - \epsilon_f} q/4\pi\epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - (2z_b - z_q))^2} \\ &+ \frac{q\epsilon_p(\epsilon_p - \epsilon_d)}{\pi(\epsilon_p + \epsilon_f)} \\ &\times \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda)e^{\lambda(z - (2z_b - z_q))}}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} d\lambda. \end{aligned} \tag{36}$$

Найдем потенциал  $\varphi_4$  в полупространстве ( $j = 4$ ) при  $z \geq h + z_b$ . Подставляя выражения (29) и (30) для  $H_{RA}$  и  $H_{RC}$  в выражение (28) для  $\hat{\varphi}_4^+$ , получаем

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_4^+ &= \frac{q}{H_{RC} + \epsilon_f \gamma H_{RA}} \\ &= \frac{2q\epsilon_p}{\gamma[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} \\ &\times e^{-\gamma(z_b - z_q)} e^{\gamma h}. \end{aligned} \tag{37}$$

Из выражения (25), используя (28) и подставляя (37), получим

$$\begin{aligned} \varphi_4(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2q\epsilon_p e^{2\gamma h}}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)} \\ &\times \frac{e^{-\gamma(z - z_q)}}{\gamma} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{38}$$

Переходя к полярным координатам в плоскостях  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$  по формулам (35) и снова используя

тождество  $\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi - \vartheta)} = 2\pi J_0(\rho\lambda)$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi_4(\rho, \psi, z) &= \frac{q}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\epsilon_p J_0(\rho\lambda)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)} \\ &\times e^{-\lambda(z - (z_q + 2h))} d\lambda. \end{aligned} \tag{39}$$

Найдем теперь потенциал при  $z_b \leq z \leq (h + z_b)$ , т. е. в слое  $j = 3$ . Граничные условия (9) на плоскости можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma h} & 1 \\ \epsilon_p \gamma e^{-\gamma h} & -\epsilon_p \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_3^+ \\ \hat{\varphi}_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_d \gamma & -\epsilon_d \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_4^+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая это уравнение и используя (37), получаем решение

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_3^+ &= \frac{\epsilon_p + \epsilon_d}{2\epsilon_p} e^{\gamma h} \hat{\varphi}_4^+ = \frac{\epsilon_p + \epsilon_d}{2\epsilon_p} \\ &\times \frac{2q\epsilon_p}{\gamma[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} \\ &\times e^{-\gamma(z_b - z_q - 2h)}, \\ \hat{\varphi}_3^- &= \frac{\epsilon_p - \epsilon_d}{2\epsilon_p} \hat{\varphi}_4^+ = \frac{\epsilon_p - \epsilon_d}{2\epsilon_p} \\ &\times \frac{2q\epsilon_p}{\gamma[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} \\ &\times e^{-\gamma(z_b - z_q - h)}. \end{aligned}$$

Полный потенциал поля внутри слоя  $j = 3$  выражается формулой (4)

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_3^+ e^{-\gamma(z - z_b)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ &+ (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_3^- e^{\gamma(z - (z_b + h))} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$



Подставляя сюда полученные выражения для  $\hat{\varphi}_3^+$  и  $\hat{\varphi}_3^-$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) &= (\varepsilon_p + \varepsilon_d)(2\pi)^{-2} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qe^{-\gamma(z-(z_q+2h))}}{\gamma[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} \\ &\times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(2\pi)^{-2} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qe^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{\gamma[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} \\ &\times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{40}$$

Переходя к полярным координатам в плоскостях  $(x, y)$  и  $(\xi, \eta)$  по формулам (35) и используя тождество  $\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi-\vartheta)} d\vartheta = 2\pi J_0(\rho\lambda)$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi_3(\rho, \psi, z) &= \frac{q}{2\pi} \\ &\int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\lambda h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)} \\ &\times e^{-\lambda(z-(z_q+2h))} d\lambda + \frac{q}{2\pi} \\ &\times \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda)(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\lambda h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)} \\ &\times e^{\lambda(z-(2z_b-z_q))} d\lambda. \end{aligned} \tag{41}$$

Найдем теперь потенциал при  $z_q \leq z \leq z_b$ , т.е. в слое  $j = 2$ . Граничные условия (9) на плоскости  $z = z_2 = z_b$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_b-z_q)} & 1 \\ \varepsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b-z_q)} & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_2^+ \\ \hat{\varphi}_2^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h} \\ \varepsilon_p \gamma & -\varepsilon_p \gamma e^{-\gamma h} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_3^+ \\ \hat{\varphi}_3^- \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда после несложных вычислений получаем

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_2^+ &= \frac{\varepsilon_f + \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} e^{\gamma(z_b-z_q)} \hat{\varphi}_3^+ + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} e^{\gamma(z_b-z_q-h)} \hat{\varphi}_3^- \\ &= \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f}, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_2^- &= \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} \hat{\varphi}_3^+ + \frac{\varepsilon_f + \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} e^{-\gamma h} \hat{\varphi}_3^- \\ &= \mathfrak{R}(\gamma, h) \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z_b-z_q)}, \end{aligned} \tag{43}$$

где  $\mathfrak{R}(\gamma, h)$ , как и ранее, выражается формулой (32).

Полученные выражения для  $\hat{\varphi}_2^+$  и  $\hat{\varphi}_2^-$  можно также получить из  $\hat{\varphi}_1^-$  и граничного условия на плоскости  $z = z_1 = z_q$ , при учете наличия на границе заряда [см. (17)]

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_b-z_q)} \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma e^{-\gamma(z_b-z_q)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_2^+ \\ \hat{\varphi}_2^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_f \gamma & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\varphi}_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полный потенциал поля внутри слоя  $j = 2$  выражается формулой (4)

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_2^+ e^{-\gamma(z-z_q)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ &+ (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_2^- e^{\gamma(z-z_q)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения (42) и (43), получим

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{qe^{-\gamma(z-z_q)}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ &+ (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{R}(\gamma, h) \frac{qe^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{2\gamma\varepsilon_f} e^{i(\xi x - \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для  $\mathfrak{R}(\gamma, h)$  и используя тождество (33), получим

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= q/4\pi\varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2} \\ &+ \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{\varepsilon_p + \varepsilon_f} q/4\pi\varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - (2z_b - z_q))^2} \\ &+ \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2\varepsilon_p}{\gamma(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \right. \\ &\times \left. \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_d e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} \right) \\ &\times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{44}$$

Заметим, что это то же самое выражение, что и (34) для  $\varphi_1(x, y, z)$  в полупространстве  $j = 1$ . Первый член этого выражения представляет из себя потенциал точечного заряда  $q$ , расположенного в точке  $\mathbf{r}_q = (0, 0, z_q)$ . Второй член — это потенциал точечного заряда величины  $q(\varepsilon_f - \varepsilon_p)(\varepsilon_p + \varepsilon_f)$  в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_f$ , расположенного зеркально, относительно плоскости  $z = z_b$ , в точке  $\mathbf{r}_{ref} = (0; 0; 2z_b - z_q)$ .

Третий член — это потенциал заряда, распределенного по плоскости  $z = z_b$  с некоторой поверхностной плотностью (ниже она будет вычислена в явном виде).

Переходя к цилиндрическим координатам (35) так же, как при рассмотрении решения в полупространстве  $j = 1$ , получим из (44) формулу для  $\varphi_2$ , аналогичную (36) в цилиндрических координатах

$$\begin{aligned} \varphi_2(\rho, \psi, z) = & q/4\pi\epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - z_q)^2} \\ & + \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} q/4\pi\epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - (2z_b - z_q))^2} \\ & + \frac{q\epsilon_p(\epsilon_p - \epsilon_d)}{\pi(\epsilon_p + \epsilon_f)} \\ & \times \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda)e^{\lambda(z - (2z_b - z_q))}}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} d\lambda. \end{aligned} \quad (45)$$

Для нахождения  $\varphi_{ind}$  — потенциала индуцированных в рассматриваемой плоскостной структуре зарядов, надо в области  $z < z_b$  вычесть из полного потенциала в этой области потенциал исходного точечного заряда. Тогда, обозначая  $z_{ref} = 2z_b - z_q$ , получим из (44) и (45) выражения в декартовой и цилиндрической системах координат

$$\begin{aligned} \varphi_{ind}(x, y, z) = & \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} q/4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{ref})^2} \\ & + \frac{q\epsilon_p(\epsilon_p - \epsilon_d)}{2\pi^2(\epsilon_p + \epsilon_f)} \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z - z_{ref})} e^{i(\xi x + \eta y)}}{[\gamma(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ind}(\rho, \psi, z) = & \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} q/4\pi\epsilon_f \sqrt{\rho^2 + (z - z_{ref})^2} \\ & + \frac{q\epsilon_p(\epsilon_p - \epsilon_d)}{\pi(\epsilon_p + \epsilon_f)} \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_0(\rho\lambda)e^{\lambda(z - z_{ref})}}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\lambda h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} d\lambda. \end{aligned} \quad (47)$$

Из (45) видно, что при  $h \rightarrow +\infty$  интеграл исчезает, и мы получаем известную формулу для заряда у границы двух полупространств при соответствующей замене символов диэлектрических проницаемостей [17].

### Обобщение метода зеркальных отражений в электростатике на случай точечного заряда, расположенного вблизи плоскостной среды

Продолжая рассмотрение задачи с одной пленкой, можно найти другую форму записи для потенциала  $\varphi_{ind}(x, y, z)$ , индуцированного точечным зарядом  $q$  в точке  $\mathbf{r}_q = (0, 0, z_q)$ . Воспользуемся (33) и введем функцию  $U(x, y, z) = q/4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , которая определяет потенциал точечного заряда  $q$ , расположенного в начале координат в пространстве с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_f$ .

Запишем выражение (46) в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{ref})^2}} \\ & + \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma, h) \frac{e^{\gamma(z - z_{ref})} e^{i(\xi x + \eta y)}}{2\epsilon_f \gamma} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (48)$$

где функция  $\chi(\gamma, h) = \Re(\gamma, h) - (\epsilon_f - \epsilon_p)/(\epsilon_p + \epsilon_f)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} \chi(\gamma, h) = & \frac{4\epsilon_p\epsilon_f}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \\ & \times \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]}. \end{aligned} \quad (49)$$

Введем также функцию

$$r_{u,v} = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, h) e^{i(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta. \quad (50)$$

Применяя теорему о свертке ко второму слагаемому в (48), можно записать  $\varphi_{ind}(x, y, z)$  в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{ind}(x, y, z) = & \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{ref})^2}} \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) U(x - u, y - v, z - z_{ref}) dudv. \end{aligned} \quad (51)$$

При численном нахождении  $\varphi_{ind}$  по формуле (51) можно устранить четырехкратное интегрирование. Это можно сделать, приводя двойное интегрирование в (50) к однократному интегрированию с помощью перехода к полярным координатам в плоскостях  $(u, v)$  и  $(\xi, \eta)$  по формулам  $u = \sigma \cos \psi$ ,  $v = \sigma \sin \psi$  и  $\xi = \lambda \cos \vartheta$ ,  $\eta = \lambda \sin \vartheta$ . Используя тожде-

стало  $\int_0^{2\pi} e^{i\rho\lambda \cos(\psi-\vartheta)} d\vartheta = 2\pi J_0(\rho\lambda)$ , получим

$$r(\sigma, \psi) = r(\sigma) = (2\pi)^{-1} \int_0^{+\infty} J_0(\sigma\lambda)\chi(\lambda, h)\lambda d\lambda$$

$$= \frac{2\varepsilon_p\varepsilon_f(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{\pi(\varepsilon_p + \varepsilon_f)}$$

$$\times \int_0^{+\infty} \frac{\lambda J_0(\sigma\lambda)}{[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\lambda h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} d\lambda.$$

Тогда в координатах  $(u, v)$  получим

$$r(u, v) = r(\sqrt{u^2 + v^2}) = \frac{2\varepsilon_p\varepsilon_f(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{\pi(\varepsilon_p + \varepsilon_f)}$$

$$\times \int_0^{+\infty} \frac{\lambda J_0(\lambda\sqrt{u^2 + v^2})}{[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\lambda h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} d\lambda. \tag{52}$$

Функция  $r(\sigma)$  является плавной функцией, ее можно очень просто приблизить сплайнами и при численном интегрировании в (51) можно использовать эту функцию в виде сплайн-аппроксимации.

Формула (51) дает потенциал, индуцированный в слоистой структуре под действием точечного заряда  $q$ , расположенного в точке  $\mathbf{r}_q = (0, 0, q)$ . Тогда для точечного заряда  $q$ , расположенного в произвольной точке  $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$ , полный потенциал  $\varphi_1 = \varphi_2$  в полупространстве  $j = 1$  и  $j = 2$  можно записать в виде

$$\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) =$$

$$= q/4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}$$

$$+ \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} q/4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_{ref})^2}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - z_{ref}) dudv, \tag{53}$$

где, как и ранее,  $z_{ref} = 2z_b - z_q$ .

Полученная формула дает обобщение метода зеркальных отражений в электростатике на случай, когда точечный заряд  $q$  расположен в одном полупространстве рядом с пленкой толщины  $h$ , расположенной на границе другого полупространства. Выражение (53) имеет простой физический смысл. Первый член в (53) — это потенциал исходного точечного заряда  $q$  (источника поля), второй член — это потенциал виртуального заряда величины  $q(\varepsilon_f - \varepsilon_p)/(\varepsilon_p + \varepsilon_f)$ , расположенного зеркально относительно ближайшей границы пленки  $z = z_b$ , а третий член — это потенциал виртуальных зарядов, распределенных по плоскости  $z = z_{ref}$  с плотностью  $q \cdot r(x, y)$ , сосредоточенных в поверхностной области

размером порядка толщины пленки  $h$ . Нетрудно видеть из выражения (52) для  $r(u, v)$ , что последний член в (53) весьма быстро убывает с ростом толщины пленки (при  $h \rightarrow \infty$ ).

Из вывода формулы (53) видно, что для случая плоскостройной структуры, состоящей из произвольного числа пленок, мы можем получить подобную формулу, но с другим распределением поверхностного заряда  $q \cdot r(x, y)$  по плоскости  $z = z_{ref}$ , это распределение будет зависеть от толщин всех пленок и их диэлектрических проницаемостей, а также от параметров полупространства за плоскостройной структурой. Следуя предложенным выше рассуждениям, можно численно или аналитически найти функцию  $r(x, y)$  для многослойной структуры и использовать эту функцию в формуле (53).

Для дальнейших обобщений нетрудно получить формулы вида (53) для потенциала поля точечного заряда  $q$ , расположенного в произвольной точке  $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$  в области пленки ( $j = 3$ ) и в полупространстве за пленкой ( $j = 4$ ). Приведем результат вычислений:

$$\varphi_3(x, y, z) = \frac{2\varepsilon_f}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} U(x - x_q, y - y_q, z - z_q)$$

$$- \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v)$$

$$\times U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - z_q) dudv$$

$$+ \frac{2\varepsilon_f(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)}$$

$$\times U(x - x_q, y - y_q, z - [2(z_f + h) - z_q])$$

$$- \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v)$$

$$\times U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - [2(z_b + h) - z_q]) dudv, \tag{54}$$

$$\varphi_4(x, y, z) = \frac{4\varepsilon_f\varepsilon_p}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} U(x - x_q, y - y_q, z - z_q)$$

$$- \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v)$$

$$\times U(x - x_q - u, y - y_q - v, z - z_q) dudv, \tag{55}$$

где функции определяются (52).

### Обобщение метода зеркальных отражений на случай системы зарядов-источников

Обобщим теперь полученный метод зеркальных отражений и найдем потенциал полного поля  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  в области  $z < z_b$  перед пленкой (рис. 5) произвольной компактной системы  $N_q$  зарядов-источников  $q_k$ , расположенных в точках с радиусами-векторами  $\mathbf{r}_{q,k} = (x_{q,k}, y_{q,k}, z_{q,k})$ , где  $k = 1, 2, \dots, N_q$ .

Если бы не было плоскостной структуры, то потенциал этой системы зарядов-источников представлялся бы формулой

$$\begin{aligned} \Phi_s(x, y, z) &= \\ &= \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-z_{q,k})^2}. \end{aligned} \tag{56}$$

Суммируя выражения (53) для каждого заряда  $q_k$  по всем  $N_q$  зарядам системы и замечая, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-(z_b-z_{q,k}))^2} \\ &= \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + ((2z_b-z)-z_{q,k})^2} \\ &= \Phi_s(x, y, 2z_b - z), \end{aligned}$$

получим обобщение метода зеркальных отражений в электростатике для произвольных распределений зарядов в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{tot}(x, y, z) &= \Phi_s(x, y, z) + \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, 2z_b - z) dudv. \end{aligned} \tag{57}$$

Обобщение метода зеркальных отражений было получено ранее в работах [18,19], несколько другим способом, и было успешно применено к задаче о нанофокусировке поверхностной плазмонной волны на вершине металлического острия. При этом поле параболоидального острия снаружи и внутри было разложено по полным системам гармонических функций. Обобщенный метод зеркальных отражений позволяет получить уравнение, определяющее указанные разложения. Решение указанной задачи нанофокусировки позволяет вычислить распределение сфокусированного поля в пленке фоторезиста, что важно для задач нанолитографии.

Из вывода формулы (57) следует, что потенциал индуцированных зарядов  $\Phi_{ind}$ , который порождается потенциалом  $\Phi_s$  распределений зарядов-источников поля,

имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{ind}(x, y, z) &= \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, 2z_b - z) dudv. \end{aligned} \tag{58}$$

Аналогично из (54) и (55) найдем потенциал полного поля  $\Phi_3$  в пленке при  $z_b \leq z \leq (z_b + h)$  ( $j = 3$ ) и потенциал  $\Phi_4$  полного поля в полупространстве при ( $z \geq z_b + h$ ) ( $j = 4$ ):

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y, z) &= \frac{2\epsilon_f}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \Phi_s(x, y, z) - \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{2\epsilon_p} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, z) dudv \\ &+ \frac{2\epsilon_f(\epsilon_p - \epsilon_d)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} \Phi_s(x, y, 2(z_b + h) - z) \\ &- \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)}{2\epsilon_p(\epsilon_p + \epsilon_d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \\ &\times \Phi_s(x - u, y - v, 2(z_b + h) - z) dudv, \end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned} \Phi_4(x, y, z) &= \frac{4\epsilon_f\epsilon_p}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} \Phi_s(x, y, z) - \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_d)} \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \Phi_s(x - u, y - v, z) dudv. \end{aligned} \tag{60}$$

### Распределение электрического поля на нановершине металлического микроострия, расположенного вблизи плоской границы тонкопленочной структуры в квазистатическом приближении

Рассмотрим металлическое острие с наноразмерным радиусом закругления вершины  $R$ . Пусть поверхность острия вблизи вершины представляется (осесимметричным относительно оси  $Z$ ) параболоидом вращения  $z = R/2 - (x^2 + y^2)/2R$  (рис. 6). Пусть вблизи острия находится пленка толщиной  $h$  с границами  $z = z_b$  и  $z = (z_b + h)$ . Предполагается  $z_b \geq R/2$ . Комплексные диэлектрические проницаемости металла острия, внешней однородной среды, пленки и полубесконечной среды за пленкой обозначим  $\epsilon_m$ ,  $\epsilon_f$ ,  $\epsilon_p$  и  $\epsilon_d$  соответственно (рис. 6).

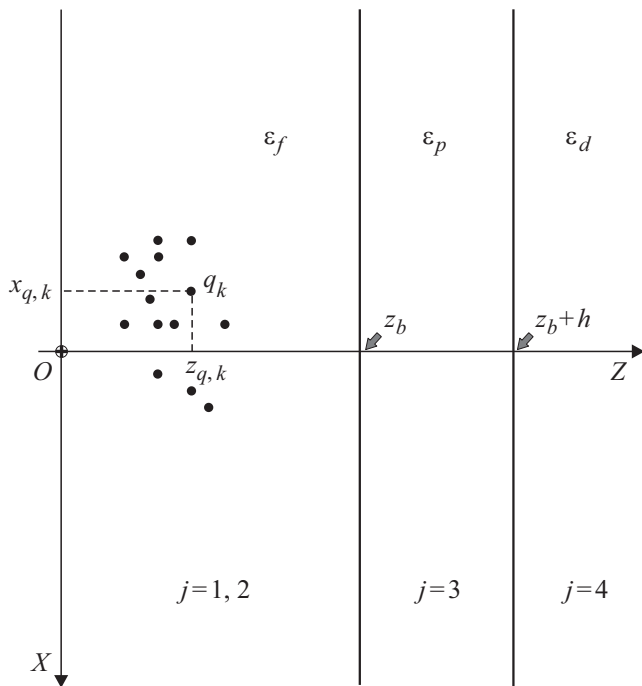


Рис. 5. Система точечных зарядов  $q_k$  у пленки, расположенной на границе полупространства.

стью  $e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  — циклическая частота. Будем предполагать, что характерные геометрические размеры задачи (порядка десяти нанометров) много меньше длины электромагнитной волны в вакууме, соответствующей частоте  $\omega$ . Можно показать [7,20,21], что такую задачу вблизи нановершины можно решать в квазистатической формулировке, при которой комплексный потенциал электрического поля  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = 0$ , а нормальные и тангенциальные составляющие электрического поля на поверхности острия и на двух плоских границах пленки должны соответствовать известным граничным условиям на поверхности острия:

$$\epsilon_f E_{f,n} = \epsilon_m E_{m,n} \text{ и } E_{f,\tau} = E_{m,\tau}, \quad (61)$$

на границе пленки  $z = z_b$ :

$$\epsilon_p E_{3,n} = \epsilon_f E_{f,n} \text{ и } E_{3,\tau} = E_{f,\tau}, \quad (62)$$

на границе пленки  $z = z_b + h$ :

$$\epsilon_d E_{4,n} = \epsilon_p E_{3,n} \text{ и } E_{4,\tau} = E_{3,\tau}. \quad (63)$$

Будем искать осесимметричное решение уравнения Лапласа, имеющее максимум поля на вершине острия, которое соответствует фокусировке на нем поверхностной симметричной плазмонной ТМ-волны.

Кроме того, для автоматического удовлетворения граничных условий на плоских поверхностях пленки (62) и (63) будем использовать специальный метод, который будет изложен ниже. Пусть потенциал зарядов, находящихся на параболическом металлическом острье, в пространстве с проницаемостью  $\epsilon_f$  описывается функцией  $\Phi_s(x, y, z)$ . Пусть потенциал индуцированных зарядов на границах пленки (заметим, что из уравнений Максвелла следует, что внутри однородного диэлектрика нет поляризационных зарядов, они могут быть только на границе) в пространстве с проницаемостью  $\epsilon_f$  равен  $\Phi_{ind}(x, y, z)$ . Тогда полный потенциал  $\Phi_{tot}$  в области, заполненной диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon_f$ , равен

$$\Phi_{tot}(x, y, z) = \Phi_s(x, y, z) + \Phi_{ind}(x, y, z). \quad (64)$$

Пусть потенциал электрического поля, возбуждаемого зарядами острия в областях с  $\epsilon_p$  и  $\epsilon_d$ , т.е. в пленке и в полупространстве за пленкой, равны  $\Phi_3(x, y, z)$  и  $\Phi_4(x, y, z)$  соответственно.

Найдем общий вид потенциала одиночного острия без плоскостной структуры рядом, удовлетворяющий уравнению Лапласа в однородном диэлектрическом пространстве снаружи  $\Phi_s(x, y, z)$  и внутри  $\Phi_m(x, y, z)$  острия, причем на границе острия должны удовлетворяться граничные условия (61). Введем параболические координаты [22] (систему параболических координат вращения)  $(\alpha, \beta, \psi)$ , которые связаны с прямоугольными декартовыми координатами  $(x, y, z)$  формулами

$$x = c\alpha\beta \cos \psi, \quad y = c\alpha\beta \sin \psi, \quad z = c(\beta^2 - \alpha^2)/2, \quad (65)$$

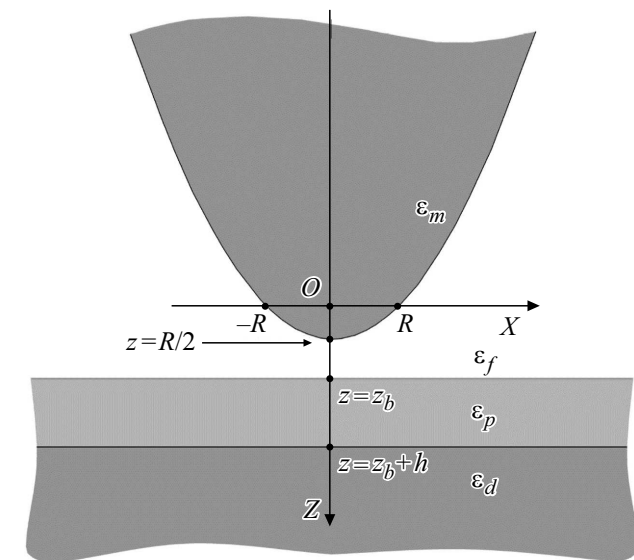


Рис. 6. Вершина металлического параболического острья у пленки, расположенной на границе полупространства. Геометрия задачи.

Рассмотрим распределение гармонического электрического поля, которое установится в окрестности нановершины микроострия при сходимости симметричной ТМ поверхностной плазмонной волны, которая используется для фокусировки светового поля на нановершине металлического микроострия в важных приложениях [1].

При решении данной задачи будем использовать комплексное представление полей с временной зависимо-

где  $c$  — масштабный постоянный множитель. В рассматриваемой системе координат с началом в точке  $0$  и осью  $Z$  (рис. 6) уравнение Лапласа для электрического потенциала внутри  $\Phi_m$  или снаружи  $\Phi_s$  острия при аксиальной симметрии ( $\Phi_m$  и  $\Phi_s$  не зависят от  $\psi$ ) можно записать следующим образом [22]:

$$\Delta\Phi = c^{-2}(\alpha^2 + \beta^2)^{-1} \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} \right) = 0. \tag{66}$$

Общее осесимметричное решение (66) известно [22] и определяется выражением

$$\Phi = \sum (B_1 J_0(p\alpha) + B_2 Y_0(p\alpha)) \times (C_1 I_0(p\beta) + C_2 K_0(p\beta)), \tag{67}$$

где  $p, B_1, B_2, C_1, C_2$  — константы;  $J_0, Y_0$  — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка;  $I_0, K_0$  — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. Суммирование производится по решениям с различными значениями констант.

Пусть граница параболоидального острия определяется уравнением  $\beta = \beta_0$ . Из (65) следует, что граница острия  $\beta = \beta_0$  в декартовых координатах  $(x, y, z)$  определяется уравнением  $z = c\beta_0^2/2 - (x^2 + y^2)/2c\beta_0^2$ . Несложно показать, что радиус кривизны вершины острия равен  $R = c\beta_0^2$ .

Имея в виду общность дальнейшего изложения, перейдем к безразмерным координатам:  $\tilde{x} = x/R, \tilde{y} = y/R, \tilde{z} = z/R$  и  $\tilde{\alpha} = \alpha/\beta_0, \tilde{\beta} = \beta/\beta_0$ . Безразмерные параболоидальные  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$  и декартовы координаты на плоскости  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  связаны между собой формулами  $\tilde{\alpha} = \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}$  и  $\tilde{\beta} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} / \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}$ . В этих координатах граница острия будет определяться функцией  $\tilde{z} = 1/2 - (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)/2$ . Нормируем потенциал на его значение  $U$  в максимуме поля на вершине острия, тогда можно перейти от размерного к безразмерному потенциалу  $\tilde{\Phi} = \Phi/U$ , для которого должно удовлетворяться уравнение (66) в безразмерных координатах.

В осесимметричном случае для выполнения граничных условий на поверхности вращения острия достаточно удовлетворить их на линии пересечения поверхности острия с любой плоскостью симметрии, проходящей через ось  $Z$ . В качестве такой плоскости мы выберем плоскость  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  при  $\tilde{y} = 0$ . Более конкретно, достаточно удовлетворить граничным условиям только на границе пересечения полуплоскости  $\tilde{y} = 0$  при  $\tilde{x} \geq 0$  и поверхности рассматриваемого параболоидального острия. В безразмерных координатах это будет кривая  $\tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$ , при  $\tilde{y} = 0$  и  $\tilde{x} \geq 0$ . В нормированных декартовых координатах в плоскости  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  при  $\tilde{y} = 0$  компоненты нормированного электрического поля будут иметь вид:  $\tilde{E}_{\tilde{x}} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{x}, \tilde{E}_{\tilde{z}} = -\partial\tilde{\Phi}/\partial\tilde{z}$ .

Итак, исходя из общего решения (67), будем искать решение граничной задачи для электрического поля в окрестности острия, предполагая, что потенциал снаружи  $\tilde{\Phi}_s$ , при  $\tilde{\beta} \geq \tilde{\beta}_0$ , и потенциал внутри металлического острия  $\tilde{\Phi}_m$ , при  $\tilde{\beta} \leq \tilde{\beta}_0$ , имеют вид соответственно

$$\Phi_s = \sum_{j=1}^N A_j J_0(\lambda_j \tilde{\alpha}) K_0(\lambda_j \tilde{\beta})$$

и

$$\Phi_m = \sum_{j=1}^N B_j J_0(\lambda_j \tilde{\alpha}) I_0(\lambda_j \tilde{\beta}), \tag{68}$$

где  $A_j, B_j$  и  $\lambda_j$  — константы. Значения  $\lambda_i$  можно выбрать в виде  $\lambda_j = \mu_j/L$ , где  $\mu_j, j = 1, 2, \dots, N$  — первые  $N$  корней уравнения Бесселя  $J_0(\mu_j) = 0$ , а  $L$  — некоторое безразмерное расстояние от вершины, на котором мы будем удовлетворять граничным условиям на поверхности острия. В пределе  $N \rightarrow \infty$  функции  $J_0(\lambda_j \tilde{\alpha})$  с вышеуказанным выбором  $\lambda_j$  на отрезке  $0 \leq \tilde{\alpha} \leq L$  образуют полную систему функций [23].

Отметим, что выбор функциональных зависимостей (68) из общего решения (67) обусловлен естественными требованиями к сконцентрированному у вершины полю (которые и выделяют указанные зависимости однозначным образом):

а) Снаружи острия потенциал поля должен уменьшаться при удалении от его поверхности, быть конечным и максимальным на вершине острия.

б) Внутри металла острия потенциал должен быть конечным в начале координат. Кроме того, электрический потенциал должен быть непрерывен при переходе через границу.

Тогда потенциал зарядов острия  $\tilde{\Phi}$  в координатах  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  в среде с  $\epsilon_f$ , после подстановки выражений  $\tilde{\alpha} = \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}$  и  $\tilde{\beta} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} / \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}}$  в (68), можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \tag{69}$$

где

$$\mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = J_0 \left( \lambda_j \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}} \right) \times K_0 \left( \lambda_j \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}} \right).$$

Аналогично потенциал индуцированных зарядов в плоскослоистой структуре  $\tilde{\Phi}_{ind}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  можно представить, учитывая (58), в виде

$$\Phi_{ind}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \mathfrak{P}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}). \tag{70}$$

где

$$\mathfrak{P}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \mathfrak{F}_j(\tilde{x} - u, \tilde{y} - v, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) dudv.$$

Подставляя (69) и (70) в (64), получим полный потенциал в среде с  $\varepsilon_f$  в виде

$$\Phi_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j (\mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \mathfrak{P}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})). \quad (71)$$

Аналогично из (68) в металле острия потенциал можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}_m(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N B_j \mathfrak{H}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (72)$$

где

$$\mathfrak{H}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = J_0 \left( \lambda_j \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}} \right) \times I_0 \left( \lambda_j \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \sqrt{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} - \tilde{z}} \right).$$

На границе острия (при  $\tilde{y} = 0, \tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$ ) единичные векторы нормали и касательной представляются формулами

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_{\tilde{x}} \left( \tilde{x} / \sqrt{1 + \tilde{x}^2} \right) + \mathbf{e}_{\tilde{z}} \left( 1 / \sqrt{1 + \tilde{x}^2} \right);$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e}_{\tilde{x}} \left( 1 / \sqrt{1 + \tilde{x}^2} \right) + \mathbf{e}_{\tilde{z}} \left( -\tilde{x} / \sqrt{1 + \tilde{x}^2} \right).$$

Тогда граничные условия для нормальных и тангенциальных полей на поверхности острия можно записать

$$-\varepsilon_f \partial \tilde{\Phi}_{tot} / \partial \mathbf{n} \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2}} + \varepsilon_m \partial \tilde{\Phi}_m / \partial \mathbf{n} \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2}} = 0$$

и

$$-\partial \tilde{\Phi}_{tot} / \partial \boldsymbol{\tau} \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2}} + \partial \tilde{\Phi}_m / \partial \boldsymbol{\tau} \Big|_{\substack{\tilde{y}=0 \\ \tilde{z}=1/2-\tilde{x}^2/2}} = 0. \quad (73)$$

Если подставить в (73) выражения (71), (72), то получим линейные уравнения относительно  $A_j, B_j$ , которые можно представить в виде

$$-\varepsilon_f \sum_{j=1}^N a_j(\tilde{x}) A_j + \varepsilon_m \sum_{j=1}^N b_j(\tilde{x}) B_j = 0$$

и

$$\sum_{j=1}^N c_j(\tilde{x}) A_j + \sum_{j=1}^N d_j(\tilde{x}) B_j = 0. \quad (74)$$

Ради экономии места, мы не будем здесь выписывать функции  $a_j(\tilde{x}), b_j(\tilde{x}), c_j(\tilde{x})$  и  $d_j(\tilde{x})$  в явном виде, которые получаются при указанной тривиальной подстановке.

В данной работе уравнения (74) решались методом коллокаций [24]. Указанные уравнения записывались в  $(N - 1)$  точках кривой  $\tilde{z} = 1/2 - \tilde{x}^2/2$  при  $\tilde{y} = 0$  и  $\tilde{x} > 0$  на поверхности острия. В результате были получены  $(2N - 2)$  линейных алгебраических уравнений с  $2N$  неизвестными коэффициентами  $A_j$  и  $B_j$ . Для получения однозначного решения были добавлены еще два уравнения: были приравнены единице потенциалы на вершине острия, снаружи  $\tilde{\Phi}_{tot}(0, 0, 1/2) = 1$  и внутри  $\tilde{\Phi}_m(0, 0, 1/2) = 1$ . В результате решения полученной системы из  $2N$  уравнений находись  $A_j$  и  $B_j$ , и по ним распределения потенциала и электрического поля во всем пространстве. При этом получалось нормированное (на единицу на вершине острия) распределение  $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ .

Зная все  $A_j$ , можно найти  $\tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ . Тогда по формулам (59) и (60) можно найти потенциалы как в пленке, так и в свободном полупространстве следующим образом:

$$\tilde{\Phi}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \left( \frac{2\varepsilon_f}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p} \mathfrak{G}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \frac{2\varepsilon_f(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2(\tilde{z}_b + \tilde{h}) - \tilde{z}) - \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \mathfrak{G}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2(\tilde{z}_b + \tilde{h}) - \tilde{z}) \right), \quad (75)$$

$$\tilde{\Phi}_4(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \left( \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_p}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \mathfrak{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \mathfrak{G}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \right), \quad (76)$$

где  $\mathfrak{G}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r(u, v) \mathfrak{F}_j(\tilde{x} - u, \tilde{y} - v, \tilde{z})$  В итоге, формулы (71), (75) и (76) решают задачу нахождения потенциала снаружи острия и во всей слоистой структуре по известным значениям  $A_j$ .

### Обобщение метода зеркальных отражений на случай плоскостлой структуры с произвольным количеством пленок

Если проанализировать полученное в предыдущем разделе обобщение метода зеркальных отражений для

системы зарядов, расположенных у границы одной пленки, то важным моментом в обобщении было представление решения уравнения (27) для одного заряда в виде (31), т.е. в виде

$$\hat{\varphi}_1^- = \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} + \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{2\gamma(z_b - z_q)} \mathfrak{R}(\gamma, h),$$

где  $\mathfrak{R}(\gamma, h) = (\epsilon_f - \epsilon_p)/(\epsilon_p + \epsilon_f) + \chi(\gamma, h)$ , а функция  $\chi(\gamma, h)$  определяется для плоскостойкой структуры состоящей из одной пленки аналитической формулой (49) и зависит от толщины пленки и от всех диэлектрических проницаемостей задачи.

Функция  $\mathfrak{R}(\gamma, h)$  определяет потенциал  $\varphi_{ind}(x, y, z)$  индуцированных зарядов, причем отражение от границы пленки  $z = z_b$  определяется слагаемым  $(\epsilon_f - \epsilon_p)/(\epsilon_p + \epsilon_f)$ , а влияние параметров пленки и полупространства за ней определяется функцией  $\chi(\gamma, h)$  (см. (48)).

Обратим внимание, что  $\chi(\gamma, h)$  возникает из задачи нахождения поля от точечного заряда, расположенного у одной пленки плоскостойкой структуры. Если в плоскостойкой структуре будет несколько пленок, то можно показать, что решение  $\hat{\varphi}_1^-$  уравнения типа (27) для точечного заряда будет иметь такой же вид

$$\hat{\varphi}_1^- = \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} + \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} e^{-2\gamma(z_b - z_q)} \left( \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} + \chi(\gamma) \right),$$

но функция  $\chi(\gamma)$  будет зависеть от  $\gamma$  и всех параметров сред и толщин пленок. Для двух пленок можно получить аналитические формулы для  $\chi(\gamma)$ , но они получаются громоздкими для использования. Можно доказать вышеприведенное утверждение по индукции, а также убедиться численно, что  $\chi(\gamma)$  — быстро убывающая функция, обратное преобразование Фурье которой существует и интегралы быстро сходятся.

Таким образом, при фиксированных толщинах и диэлектрических параметрах задачи функция  $\chi$  зависит только от  $\gamma$  и ее всегда можно найти численно по найденному  $\hat{\varphi}_1^-$  (из (27)) следующим образом:

$$\chi(\gamma) = \frac{2\gamma\epsilon_f}{q} e^{2\gamma(z_b - z_q)} \left( \hat{\varphi}_1^-(\gamma) - \frac{q}{2\gamma\epsilon_f} \right) - \left( \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \right).$$

Функцию эту можно аппроксимировать одномерным сплайном от  $\gamma$ , вычислив значения  $\chi(\gamma)$  в конечном числе точек  $\gamma$ . Тогда обратное преобразование Фурье этой функции  $r(u, v) = (2\pi)^{-2} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \chi(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, h) e^{i(\xi u + \eta v)} d\xi d\eta$

будет иметь простой вид  $r(u, v) = r(\sqrt{u^2 + v^2})$  и также представляться одномерным сплайном. Тогда для одного точечного заряда рядом с многослойной плоскостойкой структурой  $\varphi_1(x, y, z)$  и  $\varphi_{ind}(x, y, z)$  будут иметь тот же вид (53) и (51), но с другой функцией  $r(u, v) = r(\sqrt{u^2 + v^2})$ , представленной

одномерным сплайном. Подчеркнем, что функция  $r(u, v)$  определяется из задачи для точечного заряда.

Если известен потенциал системы зарядов в свободном пространстве без учета плоскостойкой структуры  $\Phi_s(x, y, z)$ , выражающийся по формуле (56), то также будет справедливо представление (57) для полного потенциала  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  с учетом произвольной плоскостойкой структуры в свободной области полупространства перед ней.

Как найти теперь потенциалы внутри плоскостойкой многопленочной структуры, ведь формулы (75) и (76) годятся только для одной пленки? Ответ следующий: зная  $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , можно найти на границе пленки  $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_b)$  и  $\tilde{D}_{tot,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_b) = -\epsilon_f \partial \tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) / \partial \tilde{z} |_{\tilde{z}=\tilde{z}_b}$ , а значит, можно найти на этой границе фурье-образы этих функций:

$$\mathfrak{T}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_b) e^{-i\xi\tilde{x} - i\eta\tilde{y}} d\tilde{x} d\tilde{y},$$

$$\mathfrak{D}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{D}_{tot,x}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_b) e^{-i\xi\tilde{x} - i\eta\tilde{y}} d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

В силу симметрии задачи  $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_b) = \tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{\rho}, \tilde{z}_b)$ ,  $\tilde{D}_{tot,z}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}_b) = \tilde{D}_{tot,z}(\tilde{\rho}, \tilde{z}_b)$ ,  $\mathfrak{T}(\xi, \eta) = \mathfrak{T}(\gamma)$ ,  $\mathfrak{D}(\xi, \eta) = \mathfrak{D}(\gamma)$ , где  $\tilde{\rho} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$ ,  $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ . Тогда из (6) и граничных условий (8) получим

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{T}(\gamma) \\ \mathfrak{D}(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma\tilde{h}_1} \\ \epsilon_3\gamma & -\epsilon_3\gamma e^{-\gamma\tilde{h}_1} \end{pmatrix} \times \tilde{\mathcal{F}}_3$$

или

$$\tilde{\mathcal{F}}_3 = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_3^+ \\ \hat{\varphi}_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma\tilde{h}_1} \\ \epsilon_3\gamma & -\epsilon_3\gamma e^{-\gamma\tilde{h}_1} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \mathfrak{T}(\gamma) \\ \mathfrak{D}(\gamma) \end{pmatrix}, \quad (77)$$

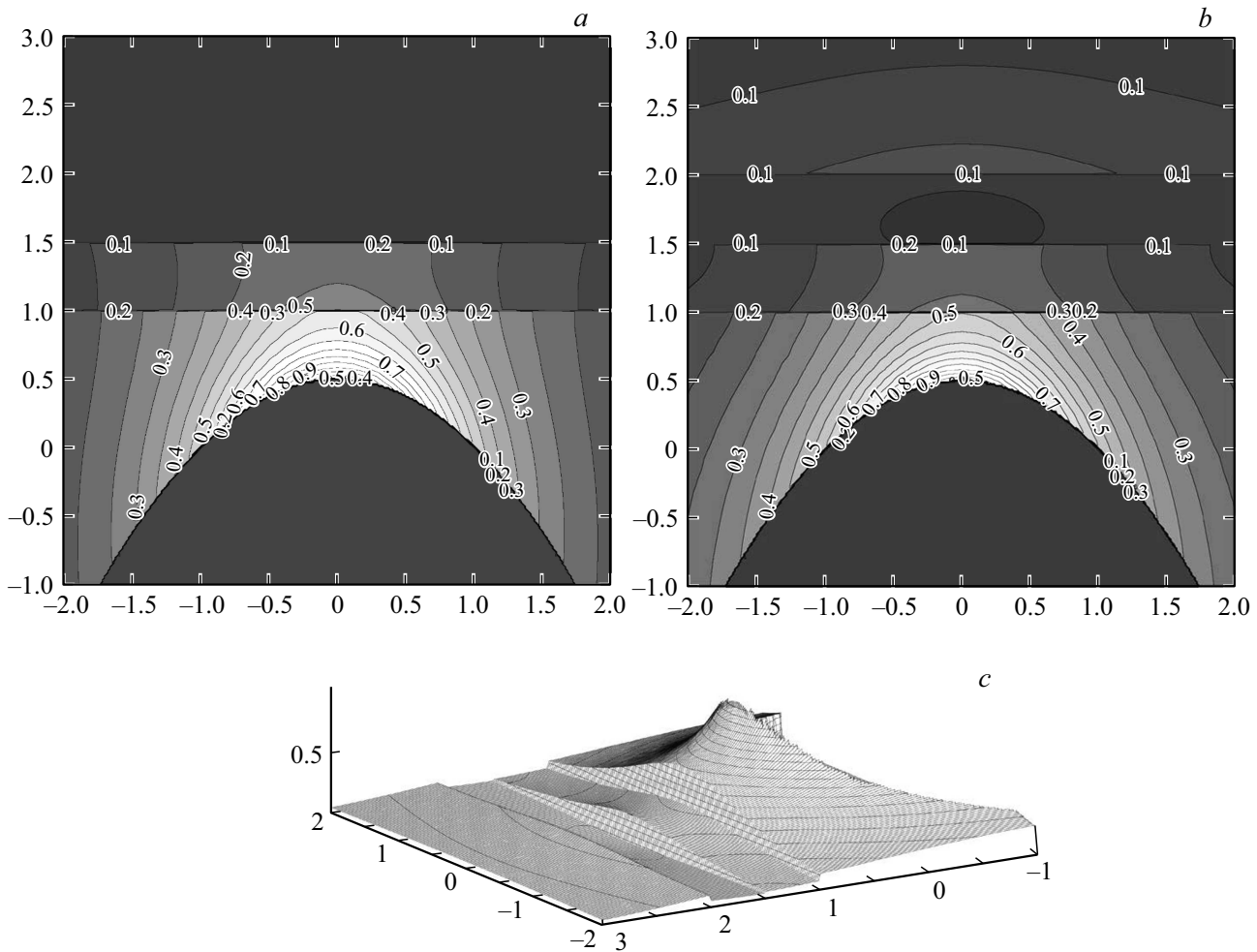
где  $\tilde{h}_1$  — толщина первой пленки,  $\epsilon_3$  — ее диэлектрическая проницаемость.

По полученным из (77) функциям  $\hat{\varphi}_3^+(\gamma)$  и  $\hat{\varphi}_3^-(\gamma)$  и из выражения (4) найдем потенциал в первой пленке (с толщиной  $\tilde{h}_1$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_3^+(\gamma) e^{-\gamma(\tilde{z} - \tilde{z}_b)} e^{i(\xi\tilde{x} + \eta\tilde{y})} d\xi d\eta \\ &+ (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_3^-(\gamma) e^{\gamma(\tilde{z} - (\tilde{z} + \tilde{h}_1))} e^{i(\xi\tilde{x} + \eta\tilde{y})} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

В следующей пленке с толщиной  $\tilde{h}_2$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_4$  поле вычислим из уравнения (9), связывающего  $\tilde{\mathcal{F}}_3$  и  $\tilde{\mathcal{F}}_4$ , т.е.  $\tilde{\mathcal{F}}_4 = \mathbf{L}_4^{-1} \times \mathbf{R}_3 \times \tilde{\mathcal{F}}_3$





**Рис. 7.** Распределение амплитуды электрического поля, нормированного на единицу в максимуме (на вершине острия): (a) при толщине пленки  $\tilde{h} = 0.5$ , диэлектрической проницаемости острия, пленки и полупространства за пленкой соответственно  $-11.6 + i1.2$ , 2 и  $-11.6 + i1.2$ ; (b) и (c) то же для двух пленок толщиной  $\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 = 0.5$  и диэлектрическими проницаемостями острия, первой пленки, второй пленки и полупространства за пленкой  $-11.6 + i1.2$ , 2, 011.6 + i1.2 и 4.

или

$$\hat{\mathcal{F}}_4 = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_4^+ \\ \hat{\varphi}_4^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma \tilde{h}_2} \\ \varepsilon_4 \gamma & -\varepsilon_4 \gamma e^{-\gamma \tilde{h}_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e^{-\gamma \tilde{h}_1} & 1 \\ \varepsilon_3 \gamma e^{-\gamma \tilde{h}_1} & -\varepsilon_3 \gamma \end{pmatrix} \times \hat{\mathcal{F}}_3, \tag{78}$$

здесь  $\tilde{h}_1$  и  $\tilde{h}_2$  — толщины первой и второй пленки в нормированных координатах. Тогда, вычислив из (78) функции  $\hat{\varphi}_4^+$  и  $\hat{\varphi}_4^-$ , получим потенциал во второй пленке:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_4(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_4^+(\gamma) e^{-\gamma(\tilde{z}-\tilde{z}_3)} e^{i(\xi\tilde{x}+\eta\tilde{y})} d\xi d\eta \\ & + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_4^-(\gamma) e^{\gamma(\tilde{z}-\tilde{z}_4)} e^{i(\xi\tilde{x}+\eta\tilde{y})} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Продолжая таким же образом, можно найти полные потенциалы от заряженного острия во всех пленках задачи и в полупространстве за ними. Для определенности рассмотрим задачу с двумя пленками. Запишем граничное условие на последней границе второй пленки и полупространства:  $\mathbf{L}_5 \times \hat{\mathcal{F}}_5 = \mathbf{R}_4 \times \hat{\mathcal{F}}_4$ , где

$$\mathbf{L}_5 = \mathbf{T}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_5 \gamma & -\varepsilon_5 \gamma \end{pmatrix},$$

откуда  $\hat{\mathcal{F}}_5 = \mathbf{L}_5^{-1} \times \mathbf{R}_4 \times \hat{\mathcal{F}}_4$  или

$$\hat{\mathcal{F}}_5 = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_5^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_5^{-1} \times \mathbf{T}_4^{-1} \times \mathbf{T}_3^{-1} \times \begin{pmatrix} \mathfrak{I}(\gamma) \\ \mathfrak{D}(\gamma) \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{T}_3^{-1} = \mathbf{R}_3 \times (\mathbf{L}_3)^{-1}$ ,  $\mathbf{T}_4^{-1} = \mathbf{R}_4 \times (\mathbf{L}_4)^{-1}$ , а  $\mathbf{R}_3, \mathbf{L}_3, \mathbf{R}_4, \mathbf{L}_4$  выражаются формулами (7). Вычислив  $\hat{\varphi}_5^+$ , получим

потенциал в свободном полупространстве

$$\tilde{\Phi}_5(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_5^+(\gamma) e^{-\gamma(\tilde{z}-\tilde{z}_4)} e^{i(\xi\tilde{x}+\eta\tilde{y})} d\xi d\eta.$$

## Исследование фокального распределения ЭМ поля у вершины nanoострия, расположенного рядом с плоскослоистой структурой

Были проведены численные расчеты распределения амплитуды сфокусированного поля для золотого острия, расположенного вблизи плоскослоистой структуры, которое возникает при схождении (вдоль поверхности острия к вершине) плазмонно-поляритонной ТМ-волны. Частота сфокусированной волны соответствует длине волны в вакууме  $\lambda_0 = 633 \text{ nm}$ . Диэлектрическая проницаемость золота на этой частоте принималась равной  $\varepsilon_m = -11.6 + i1.2$  [25]. Параболоидальное острие находилось в среде с  $\varepsilon_f = 1$  рядом с плоскослоистой структурой, состоящей из одной пленки с толщиной, равной  $\tilde{h} = 0.5$  (в нормированных на радиус кривизны острия единицах). Диэлектрическая проницаемость пленки равна  $\varepsilon_p = 2$ , а полупространство за пленкой заполнено золотом  $\varepsilon_d = \varepsilon_m$ . Границы пленки определялись уравнениями  $\tilde{z} = \tilde{z}_2 = \tilde{z}_b = 1$  и  $\tilde{z} = \tilde{z}_3 = \tilde{z}_b + \tilde{h} = 1.5$  (рис. 4, 6). Вершина металлического острия располагалась на расстоянии  $\Delta\tilde{z} = 0.5$  от поверхности пленки. Система уравнений (74) решалась методом коллокаций в отдельных точках границы вблизи вершины острия, как было описано выше.

На рис. 7, а показано нормированное на единицу в максимуме распределение амплитуды полного электрического поля в плоскости  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  при указанных выше параметрах. Видно, что поле имеет наибольшее значение в свободном пространстве (в области с  $\varepsilon_f$ , рис. 6) вблизи вершины. Поле в пленке с  $\varepsilon_p = 2$  меньше, а в металле острия и полупространстве подложки значительно меньше максимального. Это связано с естественной экранировкой электрического поля в диэлектрике и металле, возникающее за счет возникновения индуцированных зарядов. Чем больше диэлектрическая проницаемость, тем сильнее экранировка. Важное свойство полученного распределения поля: его характерный размер в нормированных координатах одинаков и по порядку величины равен радиусу вершины острия. То есть при наноразмерах вершины и фокальное распределение поля в пленке диэлектрика фоторезиста будет наноразмерным. Полученное решение теоретически строго доказывает принципиальную возможность нанолитографии, основанной на полимеризации фоторезиста в фокусе описанного возбужденного металлического острия, причем с наноразмерной точностью.

Была рассмотрена задача с двумя пленками. Параболоидальное острие, как в предыдущих расчетах,

находилось в среде с  $\varepsilon_f = 1$  рядом с плоскослоистой структурой, состоящей из двух пленок. Первая пленка, как в предыдущем примере, имела толщину  $\tilde{h}_1 = 0.5$  и диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_3 = \varepsilon_p = 2$ . Вторая пленка имела толщину  $\tilde{h}_2 = 0.5$  и диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_4 = \varepsilon_m$  (золотая пленка). Полупространство за второй пленкой имела диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_5 = \varepsilon_d = 4$ . Границы пленок определялись уравнениями  $\tilde{z} = \tilde{z}_2 = \tilde{z}_b = 1$ ,  $\tilde{z} = \tilde{z}_3 = \tilde{z}_b + \tilde{h}_1 = 1.5$ , и  $\tilde{z} = \tilde{z}_4 = \tilde{z}_b + \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 = 2$ . Вершина металлического острия располагалась, как в предыдущей задаче, на расстоянии  $\Delta\tilde{z} = 0.5$  от поверхности пленки. Система уравнений решалась методом, изложенным в предыдущем разделе для двух пленок. На рис. 7, б, в показаны результаты расчетов нормированного (на единицу в максимуме на вершине острия) распределения амплитуды поля в плоскости  $(\tilde{x}, \tilde{z})$ . Из рисунков видно, что качественно выводы, сделанные для предыдущей задачи, сохраняются. Поле плохо проникает в металл с большой по модулю диэлектрической проницаемостью. Важно, что поле имеет значительный уровень в диэлектрической пленке с проницаемостью  $\varepsilon_p = 2$ , которая моделирует слой фоторезиста. Тонкая пленка металла помогает локализовать поле в диэлектрической пленке и может использоваться во вспомогательных, технологических целях, для более острой фокусировки поля в фоторезисте.

## Заключение

В работе предложена оригинальная матричная техника нахождения фундаментального решения оператора Лапласа для плоскослоистых сред на примере электростатической задачи. Предложено обобщение метода зеркальных отражений для плоскослоистых сред в формулировке, позволяющей использовать преимущество предложенной матричной техники. Главными чертами развитого метода являются логическая простота и возможность обобщения решения на многослойные структуры и в пределе на градиентные пленки.

Применение метода для нахождения фокального распределения электрического поля в окрестности нановершины металлического микроострия, расположенного рядом с одной пленкой фоторезиста, позволяет описать проникновение поля в пленку и, таким образом, решать практические задачи нанолитографии. Впервые решенная задача нахождения распределения поля у вершины металлического острия, расположенного вблизи двух пленок (диэлектрической и металлической), продемонстрировала прикладные возможности предложенных подходов.

## Список литературы

- [1] F. De Angelis, G. Das, P. Candeloro et al. Nature Nanotech., 5, 67 (2010). DOI: 10.1038/nnano.2009.348

- [2] H.G. Frey, F. Keilmann, A. Kriele, R. Guckenberger. Appl. Phys. Lett., **81**, 5030 (2002). DOI: 10.1063/1.1530736
- [3] I. Stockman. Phys. Rev. Lett., **93**, 137404 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.137404
- [4] А.Б. Петрин. Теплофизика высоких температур, **50** (1), 18 (2012). [A.V. Petrin. High Temp., **50**, 15 (2012). DOI: 10.1134/S0018151X12010129].
- [5] A. Giugni, M. Allione, B. Torre et al. J. Opt., **16** (11), 114003 (2014). DOI: 10.1088/2040-8978/16/11/114003
- [6] A. Giugni, B. Torre, A. Toma et al. Nature Nanotech., **8** (11), 845 (2013). DOI: 10.1038/nnano.2013.207
- [7] А.Б. Петрин. Успехи прикладной физики, **3** (3), 236 (2015).
- [8] А. Б. Петрин. Квант. электрон., **45** (7), 658 (2015). [A.V. Petrin. Quantum Electronics, **45** (7), 658 (2015). DOI: 10.1070/QE2015v045n07ABEH015713].
- [9] W.C. Chew. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media* (IEEE Press, New York, 1995).
- [10] А.Г. Кюркчан, С.А. Маненков. Радиотехника и электроника, **65** (7), 644 (2020). DOI: 10.31857/S0033849420060200
- [11] А.Б. Петрин. Опт. и спектр., **128** (11), 1676 (2020). DOI: 10.21883/OS.2020.11.50171.168-20 [A.V. Petrin. Opt. Spectrosc., **128**, 1809 (2020). DOI: 10.1134/S0030400X20110193].
- [12] А.Б. Петрин. Опт. и спектр., **128** (12), 1874 (2020). DOI: 10.21883/OS.2022.09.53308.3636-22
- [13] А.Б. Петрин. ЖЭТФ, **159** (1), 35 (2021). DOI: 10.31857/S004445102101003X [A. V. Petrin. J. Exp. Theor. Phys., **132**, 27 (2021). DOI: 10.1134/S1063776120120055].
- [14] R.W.P. King, G.S. Smith. *Antennas in Matter* (M.I.T. Press, Cambridge MA, 1981).
- [15] R.W.P. King. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., **36** (6), 1080 (1988). DOI: 10.1109/22.3635
- [16] А.Б. Петрин. Опт. и спектр., **129** (1), 55 (2021). DOI: 10.21883/OS.2021.01.50440.240-20 [A.V. Petrin. Opt. Spectrosc., **129**, 72 (2021). DOI: 10.1134/S0030400X21010161].
- [17] Д.В. Сивухин. *Общий курс физики, III „Электричество“* (Наука, Москва, 1977).
- [18] А.Б. Петрин. Успехи прикладной физики, **4** (4), 326 (2016).
- [19] А.Б. Петрин. Теплофизика высоких температур, **57** (1), 20 (2019). DOI: 10.1134/S0040364419010198 [A.V. Petrin. High Temperature, **57** (1), 17 (2019). DOI: 10.1134/S0018151X1901019X].
- [20] А.Б. Петрин. Квант. электрон., **45** (7), 658 (2015). [A.V. Petrin. Quantum Electronics, **45** (7), 658 (2015). DOI: 10.1070/QE2015v045n07ABEH015713].
- [21] А.Б. Петрин. Прикладная физика, № 1, 11 (2016).
- [22] А. Анго. *Математика для электро- и радиоинженеров* (Наука, Москва, 1967).
- [23] А.Ф. Никифоров, В.Б. Уваров. *Специальные функции математической физики* (Наука. Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1984).
- [24] *Численные методы теории дифракции (Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 29): Сб. статей. Пер. с англ.*, (Мир, Москва, 1982).
- [25] Л. Новотный, Б. Хехт. *Основы нанооптики, под ред. В.В. Самарцева.* (Физматлит, Москва, 2009).