

08

Особенности вакуумного резонансного туннелирования на одноямном и двухъямном барьерных потенциалах

© М.В. Давидович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия
e-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 16 сентября 2021 г.
В окончательной редакции 27 апреля 2022 г.
Принято к публикации 1 июня 2022 г.

Рассмотрены особенности одномерного вакуумного туннелирования и вычисления туннельного тока в барьерных квантовых структурах с одной и двумя ямами. Структуры образованы несколькими электродами: катодом, анодом и двумя сетками. Методом многократных изображений построены профили потенциалов. Найдены уравнения для собственных и метастабильных уровней структуры с произвольным профилем потенциала. Для полного резонансного туннелирования метастабильные уровни должны попадать в область распределения электронов по кинетической энергии на катоде, что в одноямных структурах имеет место при отсутствии анодного напряжения или при малом анодном напряжении по сравнению с напряжением на сетке. Существенное напряжение на аноде приводит к несимметричной структуре и к неполному резонансному туннелированию. В этом случае двухъямная структура с двойной сеткой позволяет получать для ряда энергий полное резонансное туннелирование и на порядки увеличить туннельный ток.

Ключевые слова: резонансное туннелирование, автоэлектронная эмиссия, вакуумный нанотриод, потенциальный барьер, квантовая яма.

DOI: 10.21883/JTF.2022.09.52931.257-21

Введение

Одноямные барьерные потенциалы (рис. 1) возникают в ряде одномерных задач квантового туннелирования, дифракции плоских электромагнитных волн на слоистых структурах, в моделях квантовых резонансно-туннельных диодов (РТД), резонансно-туннельных транзисторов (РТТ) и квантово-каскадных лазеров [1–6], а также в задачах о вакуумных нанотриодах [7–9]. Вакуумные туннельные нанотриоды являются весьма интересными объектами исследования для вакуумной микроэлектроники [7,8], поскольку не требуют для работы накала, а эмиссионная структура может быть весьма компактной и при этом создавать весьма большие необходимые для работы приборов токи. При малой пролетной длине до сотен нм, меньшей, чем длина свободного пробега электронов низких энергий в воздухе (порядка $1 \mu\text{m}$), и напряжениях порядка 10–20 В они могут работать как активные ТГц-устройства и без вакуума, поскольку не возникает ионизация.

В твердотельных гетероструктурах выполнение многоямных и многобарьерных профилей основано на методах допирования и создания квантовых сверхрешеток различными методами нанесения наноразмерных слоев с разными свойствами, например типа GaAs/AlAs. Анализ квантовых сверхрешеток требует, вообще говоря, квантового многочастичного подхода, как и строгий подход к задачам туннелирования [10–14]. Здесь, например, можно использовать методы неравновесных функций Грина–Келдыша совместно с методами теории функци-

онала плотности. Часто при анализе РТД и аналогичных им структур из физических соображений задают прямоугольный одноямный двухбарьерный или двухъямный трехбарьерный профиль квантового потенциала, для которого при наличии переменного электрического потенциала решается нестационарное уравнение Шредингера (УШ) и определяется ток [2–6]. Для упрощения модельный потенциал барьеров даже задают дельта-функциями [2]. При моделировании твердотельных РТТ часто используют модельные прямоугольные потенциалы, вершины которых при приложении анодного напряжения приобретают скосы [1]. В более строгих подходах описано совместное самосогласованное решение нестационарного одночастичного УШ с уравнением Пуассона (УП) [1,6]. В случае наличия вакуумных зазоров методы теории функционала плотности пригодны для расстояний до долей нм [12–14]. В вакуумных плоских наноструктурах с размерами электродов от единиц до десятков нм можно использовать достаточно простую теорию классических сверхрешеток. Важно, чтобы полная длина структуры была меньше длины свободного пробега электронов. Тогда квантовый потенциал можно построить на основе метода теории многократных изображений. Такой подход изначально использовался при анализе вакуумных автоэмиссионных источников, начиная с теории Фаулера–Нордгейма.

Вакуумные автоэмиссионные источники без сеток для получения большой плотности тока требуют весьма больших полей (существенно больше величины 10^{10} V/m). При таких полях имеет место разогрев катода,

обратная бомбардировка, взрывная эмиссия, сильное поперечное воздействие на поверхность [15–17]. При этом барьер полностью не исчезает, коэффициент его прозрачности D^+ все еще существенно меньше единицы, а интегральная плотность тока J существенно меньше предельных значений порядка 10^{15} А/м² (для вакуумного туннелирования из металлов). Эта предельная величина имеет вид [15–17] $J = em_e E_F^2 / (4\pi^2 \hbar^2)$ и недостижима, поскольку получается из условия $D^+(E_k) = 1$, т.е. полной прозрачности при всех кинетических энергиях $0 \leq E_k \leq E_F$ (здесь E_F — энергия Ферми). Считая анод достаточно удаленным, можно получить потенциал барьера у катода, связанный с напряжением электрического поля E_x на его поверхности, в виде [15,16]:

$$V(x) = -e^2/[16\pi\epsilon_0(x + \delta)] - eE_x. \quad (1)$$

Здесь $E = -E_x$. Далее под барьером в широком смысле будем понимать любое входящее в УШ распределение квантового потенциала $V(x)$, которое может включать в себя квантовые ямы, разделенные барьерами (горбами). В узком смысле под барьером понимаем такой горб. Указанную функцию также будем называть профилем потенциала или потенциальной диаграммой. На катоде глубина потенциала должна равняться работе выхода W_c , т.е. $V(0) = -e^2/[16\pi\epsilon_0\delta] = -W_c$. Отсюда имеем связь введенного параметра δ с работой выхода катода. Величине $\delta = 0.1$ нм соответствует работа выхода $W_c = 3.6$ эВ. Максимум функции V отрицательный и зависит от напряженности поля. Высоту таких максимумов от уровня Ферми электрода будем обозначать W . Это работа выхода, которую надо совершить с данного электрода в присутствии других электродов. Так, с учетом анода приведенную формулу (1) можно модифицировать

$$V(x) \approx -e^2/[16\pi\epsilon_0(x + \delta)] - eU_a x/d - e^2/[16\pi\epsilon_0(d - x + \delta)].$$

Она приближенная (точная формула будет дана ниже), а ее точность максимальна либо у катода, либо у анода, и тем больше, чем больше d — расстояние катод–анод. При малых x и больших d последним членом можно пренебречь и получить (1), где $E_x = -U_a/d$. Вблизи анода пренебречь можно первым членом. В центре формула теряет точность, поскольку учитывает всего два изображения, тогда как (1) — одно. Поскольку формула (1) для потенциала получена методом изображений, сила которых не действует на межатомных расстояниях из-за дискретной атомной природы катода, параметр δ характеризует тот размер, после которого возникает указанная сила изображений, притягивающая электрон к катоду. Если поле отсутствует, потенциал возрастает и равен нулю на бесконечности. Это свободное состояние электрона, удаленного с катода. Присутствие тянущего электрон поля создает барьер

конечной протяженности. Можно найти точку отрицательного максимума барьера, который уменьшается с ростом поля. При этом барьер сужается. Барьер исчезнет, когда он станет бесконечно узким, а точка максимума попадет на катод (при этом точки поворота совпадут с поверхностью катода $x = 0$). Очевидно, это будет при поле $E_c = e/(16\pi\epsilon_0\delta^2) = W/(\delta e) = 16\pi\epsilon_0 W^2/e^3$. При $\delta = 0.1$ нм это $E_c = 3.6 \cdot 10^{10}$ В/м. При таком критическом поле барьер превращается в скос в яму (с учетом конечного расположения анода глубина ямы конечная). Для такой структуры можно посчитать прозрачность на уровне Ферми. Она оказывается существенно меньше единицы в силу квантовых волновых эффектов. Однако плотность набегающих на барьер с энергией Ферми электронов равна нулю [15]. Ненулевая плотность имеет место для более низких энергий, но для них прозрачность становится экспоненциально малой. Действительно, исчезновение барьера при V_F и критическом поле позволяет приближенно считать его треугольным для энергий ниже энергии Ферми с точками поворота $x_1 = 0$, $x_2(E) = (eE_c)^{-1}(E_F - E)$. Здесь кинетическая энергия отсчитывается от дна зоны проводимости. Прозрачность такого барьера в квазиклассическом приближении вычисляется точно и дается формулой [18]:

$$D^+(E) = D_0(E) \exp\left(-\frac{4\sqrt{\mu}(E_F - E)^{3/2}}{3\hbar e E_c}\right).$$

Здесь и далее $\mu = 2m_e$ означает удвоенную массу электрона. Дальнейшее увеличение поля просто делает склон круче. Хотя при этом плотность тока и возрастает, это тупиковый путь для кардинального ее увеличения. Он приводит к неустойчивостям и к взрывной эмиссии, разрушающей катод. Поэтому требуется подход к увеличению плотности тока при напряженностях поля, ниже критического, когда барьер мал, но еще существует.

Цель настоящей работы — теоретическое исследование возможности получения плотностей полевой эмиссии существенно более 10^{10} А/м² в трех- и четырех-электродных структурах с резонансным туннелированием (РТ). РТ позволяет получить значения $D^+(E_k) = 1$ при некоторых кинетических энергиях E_k набегающих на барьер электронов [1,6,19] и тем самым приблизиться к предельно достижимой плотности тока при средних значениях нормальной компоненты электрического поля $E_x < 10^{10}$ В/м. Анализ туннелирования через одноямные барьерные профили квантового потенциала $V(x)$ (рис. 1) важен для создания таких сильноточных автоэмиссионных источников с тянущей сеткой и анодом. Однако для получения более сильноточных автоэмиссионных источников интересны двухямные и многоямные барьерные структуры. Такие вакуумные структуры требуют использования четырех и более электродов с размерами порядка нанометров. При контакте нескольких сеточных электродов с катодом возникает гетероструктура, которую следует рассматривать как квантовую сверхрешетку

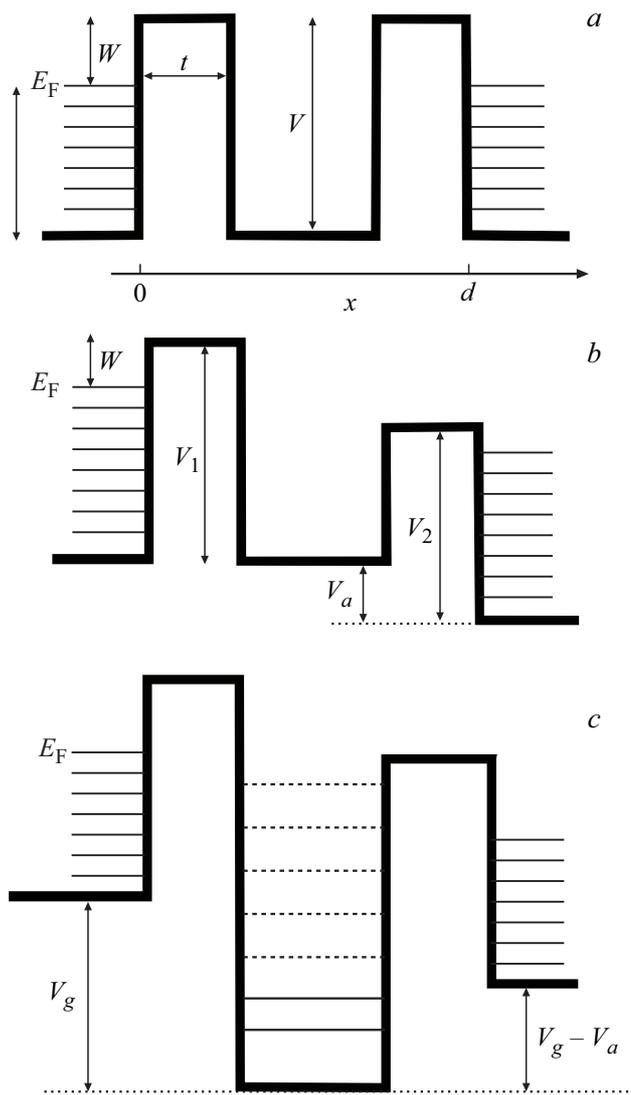


Рис. 1. Модельный вид одноянного барьерного потенциала в вакуумном нанотриоде. Пояснения по условиям, при которых потенциал имеет вид *a, b* или *c*, а также по обозначениям — в тексте.

ку, поскольку образуется единый эмиттер. Полупроводниковые квантовые гетероструктуры для определения распределения квантового потенциала требуют квантового рассмотрения [10–14], например, на основе метода теории функционала плотности (МТФП) [11]. Мы рассматриваем вакуумные гетероструктуры с наноразмерными вакуумными промежутками и хорошо проводящими электродами, для которых квантовый потенциал может быть получен классическим электростатическим подходом на основе метода изображений. Это с учетом достаточной протяженности структур оправдано в том числе и тем, что к электродам приложены достаточно большие потенциалы порядка десятков вольт, что существенно превышает вклад от возможных квантовых эффектов. Такой несравненно более простой по сравнению с МТФП подход позволяет найти весьма точное распре-

деление потенциала. Метод изображений, в частности, позволяет найти простые профили барьеров у одного из электродов [15,16]. Далее для двух электродов мы используем метод многократных изображений. Потенциал многоэлектродных структур строится последовательно с учетом его непрерывности. Все размеры далее мы приводим в нм, кинетические и потенциальные энергии в eV , а потенциалы электродов в V .

1. Простые модели для прямоугольных барьеров

В одномерном случае в автоэмиссионной электронике обычно решается стационарное УШ $(-\hbar^2\mu\partial_x^2 + V(x) - E_k)\psi(x) = 0$, в котором $\mu = 2m_e, m_e$ — масса электрона, $\hat{p}_x = \hbar\partial_x = k\hbar = \sqrt{\mu(E_k - V(x))}$ — его импульс, а волновая функция представляется суперпозицией плоских волн $\psi(x) = a \exp(\pm ikx)$. Неоднородный потенциал приводит к наличию волн обоих направлений в каждой точке, при этом в области барьеров $E_k < V(x)$ импульс становится мнимым. В потенциальном поле можно ввести силу $F(x) = -\partial_x V(x) = -eE_x(x) = e\partial_x U(x)$, где $U(x) = -V(x)/e$ — электростатический потенциал, $e = 1.6022 \cdot 10^{-19} C$ — заряд электрона. При вакуумном туннелировании потенциальный барьер и электростатический потенциал определяются методом многократных изображений относительно поверхностей электродов [20–22]. В полупроводниковых туннельных структурах профили в виде барьеров и ям создаются легированием и обычно моделируются прямоугольными областями. Приложение анодного напряжения искажает эти области и приводит к появлению наклонов на вершинах барьеров и на дне ямы [1–6]. Учет потенциала электронного пучка как решение уравнения Пуассона также приводит к изменению $V(x)$. Такое решение целесообразно при большой плотности пучка. В вакуумных структурах потенциал сетки постоянен, сетка экранирует поле, поэтому дно ямы ровное. Пример точного вычисления профилей барьеров методом изображений дан на рис. 2. Для них далее получено строгое решение УШ. Далее для этого использован метод матриц передачи (переноса). При одномерном туннелировании можно использовать и метод рядов. Как видно, профили барьеров близки к трапецеидальным с трапецией в виде треугольника на прямоугольном основании. Увеличение напряжений на электродах все более приближает профили барьеров к треугольным. Для аналитического исследования удобно заменять сложные барьеры прямоугольными, например, подбирая их высоту так, чтобы сохранялась площадь. При туннелировании одной частицы удобна нормировка волновой функции на дельта-функцию [19,23]. В задачах же эмиссионной электроники обычно имеется падающий поток частиц, описываемый волновой функцией $\psi^+(x) = a(x) \exp(ik_0x)$, поэтому можно ввести плотность тока $J^+(x)$ через плотность потока веро-

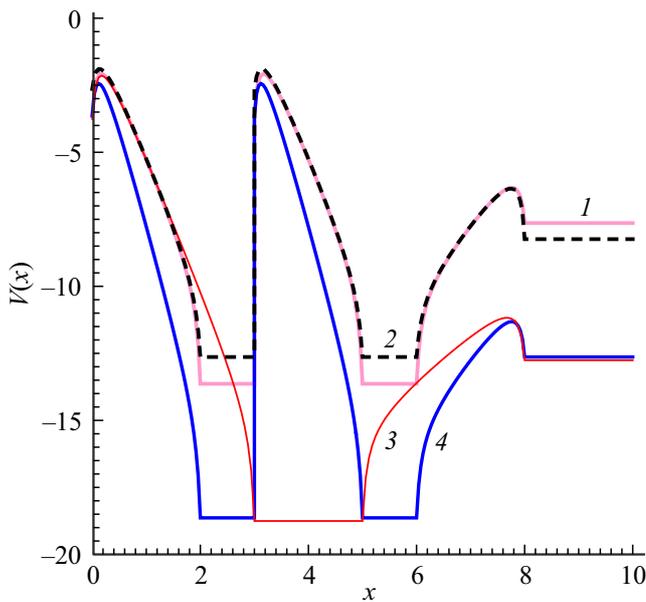


Рис. 2. Профили сложных барьеров (eV) в двухъямных (кривые 1, 2, 4) и однойямной (кривая 3) структурах с двумя сетками под одинаковым потенциалом. Параметры структур (eV): $V_g = 10, V_a = 5$ (кривые 1, 2); $V_g = 15, V_a = 10$ (кривые 3, 4); $W_k = 3, W_g = 4$ (кривые 1, 3, 4); $W_k = 3.6, W_g = 3$ (кривая 2); $t_1 = t_2 = t_3 = 2$ nm, $t_g = 1$ nm (кривые 1, 2, 4); $t_1 = t_2 = 3$ nm, $t_g = 2$ nm (кривая 3); $W_a = 4.5$.

ятности [1–6,18]. Вне барьерной структуры $V(x) = 0$, $k_0 = \sqrt{\mu E_k}/\hbar$, $a = a_0 = \text{const}$, и удобна нормировка на падающий поток с единичной плотностью частиц $\rho^+(x) = |\psi^+(x)|^2 = a_0^2 = 1, x < 0$ [1–6,15–17,21–23]. Поскольку от структуры есть отраженная волна, полная плотность слева от барьера есть

$$\rho(x) = |\exp(ik_0x) + R \exp(-ik_0x)|^2 = 1 + |R|^2 + 2|R| \cos(2k_0x - \varphi_R).$$

Здесь введены фаза φ_R и модуль $|R|$ коэффициента отражения. При РТ коэффициент отражения равен нулю. Наличие большой плотности электронов в области структуры (вне металлических электродов) требует решения там уравнения Пуассона $\partial_x^2 \Phi(x) = e\rho(x)/\epsilon_0$. Для такого решения следует использовать нулевые граничные условия на катоде и аноде, а результат решения следует налагать на электрический потенциал: $\tilde{U}(x) = U(x) + \Phi(x)$, что изменяет профиль барьерной структуры.

Рассмотрим туннелирование через симметричный барьер рис. 1, а. В силу симметрии, туннелирования с катода и анода одинаковы, поэтому полный ток равен нулю. Ток с катода возникает при положительном напряжении $U_a = -V_a/e$ на аноде, когда структура барьера становится несимметричной (рис. 1, б, в). Набегающую на барьер волновую функцию потока электронов обозначим как $\psi_0^+(x) = a_0 \exp(ik_0x)$, а прошедший на анод поток как $\psi_a^+(x) = a_0 T \exp(ik_a(x-d))$, где

$k_a = \sqrt{\mu(E_k + V_a)}/\hbar$. Туннелирование через барьер — квантовый эффект, и прошедшие барьеры электроны не теряют энергию, однако перед попаданием на анод они движутся классически и ускоряются. Избыточную энергию eU_a они передают фононам кристалла анода на малой длине свободного пробега, приобретая распределение энергии по Ферми на аноде. Для падающих на поверхность анода из его глубины электронов прозрачность барьера при существенном напряжении U_a экспоненциально меньше $D^-(E_k) \ll D^+(E_k)$, и обратным током можно пренебречь уже при анодных напряжениях порядка нескольких V. Здесь кинетическая энергия электронов как на катоде, так и на аноде отсчитывается от дна их зоны проводимости соответственно $V_0 = -W - E_F$ и $V_{0a} = -W - E_F - eU_a$. Введем импедансы $z_0 = 1/k_0, z_n = 1/k_n, z_g = 1/k_g, z_a = 1/k_a$ (отметим, что в работе [19] за импедансы взяты обратные им величины) и обозначим $\theta_n = \tan(k_n t_n), \theta_g = \tan(k_g t_g)$. Здесь t_n — ширины барьеров, которые могут в общем случае быть разными, а t_g — ширина ямы, соответствующая области сетки. Для симметричного случая $t_{1,2} = t$ из условия отсутствия коэффициента отражения $R = 0$ или равенства входного нормированного импеданса единице следует $\theta_g \theta = 2Z/(1 + Z^2)$, или с обозначением $Z = z/z_0 = k_0/k = -i\eta$ — трансцендентное уравнение

$$\tan(t_g \hbar^{-1} \sqrt{\mu E_n}) \tanh(t \hbar^{-1} \sqrt{\mu(V - E_n)}) = \frac{2\sqrt{V/E_n - 1}}{2 - V/E_n}. \quad (2)$$

Наличие корней $E_n > 0$ уравнения(2) означает РТ через симметричный барьер при совпадении кинетической энергии с уровнем: $E_k = E_n$. Такие уровни возможны, если $V/2 < E_n < V$. Для широкого барьера с верхним уровнем $E_n \approx V$ гиперболический тангенс заменяем единицей, а тангенс его аргументом при малой правой части, т.е. имеем

$$E_n \approx 2V \sqrt{\frac{\hbar^4}{t_g^4 V^2 \mu^2} + \frac{\hbar^2}{t_g^2 V \mu} - \frac{2\hbar^2}{t_g^2 \mu}}.$$

Уровни для структуры (рис. 1, а) являются метастабильными, поскольку волновая функция „просачивается“ через барьеры. Такие комплексные квазиуровни, как нетрудно видеть, определяются из комплексных уравнений

$$k_0 t_g = \pm 2 \arctan\left(\frac{Z + iZ^2 \theta}{\theta - iZ}\right)^{\pm 1} + 2n\pi = \pm 2 \arctan\left(\frac{-ik_0/\kappa + (k_0/\kappa)^2 \tanh(t\kappa)}{i \tanh(t\kappa) - k_0/\kappa}\right)^{\pm 1} + 2n\pi \quad (3)$$

и являются метастабильными. Это означает конечное время жизни уровня: электрон с него излучается и уходит на бесконечность, а ширина уровня определяется величиной $-\text{Im}(E_n)$. Знаки в (3) соответствуют разным

условиям симметрии волновой функции [24]. Для широких барьеров $\tanh(t\kappa) \approx 1$, и, пренебрегая в (3) малыми членами, получим $k_0 t_g = \mp 2 \arctan(k_0/\kappa)^{\pm 1} + 2n\pi$, что совпадает с результатами из [24]. Для бесконечно глубокой ямы (бесконечно высоких и широких барьеров) при верхнем знаке имеем $E_n = (2n\pi/t_g)^2 \mu^{-1} \hbar^2$, а при нижнем знаке $E_n = ((2n+1)\pi/t_g)^2 \mu^{-1} \hbar^2$, $n = 1, 2, \dots$, т.е. эти знаки соответствуют четной и нечетной волновым функциям относительно центра ямы. Характеристическое уравнение для несимметричной ямы (рис. 1, c) получается аналогично путем трансформирования импеданса на аноде $z_a = 1/k_a = \hbar/\sqrt{\mu(E+V_a)}$ к катоду и приравнению трансформированного импеданса импедансу катода $z_0 = 1/k_0$. Соответствующие формулы не приводим из-за громоздкого вида. В этом случае кроме метастабильных уровней при $V_g > V_a$ могут возникать собственные стабильные уровни энергии (на рис. 1, c показаны сплошными прямыми).

Заметим, что УШ есть, по сути, уравнение Гельмгольца, и квантовое туннелирование эквивалентно электромагнитному рассеянию плоской волны на диэлектрической структуре с диэлектрической проницаемостью (ДП) $\varepsilon(x) = \sqrt{1-V(x)/E_k}$ [23]. Случай $V = 0$ соответствует движению волны с частотой $\omega = E_k/\hbar$ в вакууме. Случай $E_k < V(x)$ (рассеяние на яме или над барьером) соответствует движению через бесстолкновительную плазму с $\varepsilon(x) < 0$ при $\omega < \omega_p$, а случай $E_k > V(x)$ — движению через слой диэлектрика с $\varepsilon(x) > 0$. Отметим также, что имеет место полная аналогия задач рассеяния и определения квантовых уровней для барьерных структур с дифракцией плоских волн и с существованием плазмонов в плоско-слоистых оптических структурах. В частности, рис. 1, a соответствует структура в виде диэлектрической пластины с ДП $\varepsilon > 1$ с обкладками из двух плазменных слоев с ДП $\varepsilon < 0$. В случае наложения условия $R = 0$ получаем характеристическое уравнение для комплексных резонансных частот ω_n такого открытого резонатора. Увеличение толщины плазменных слоев приводит к превращению метастабильных уровней в стабильные собственные уровни. При этом области РТ при широких плазменных слоях сужаются до спектральных линий. Рис. 1, c соответствует структура типа вакуум, плазменный слой с отрицательной ДП, диэлектрический слой с ДП $\varepsilon_1 > 1$, плазменный слой с ДП $\varepsilon < 1$, диэлектрическая подложка (полупространство) с ДП $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$. В случае туннелирования фотонов через плазменные слои важным является соотношение между их частотой и плазменными частотами слоев ω_{pm} . Для структуры рис. 1, c удобно отсчитывать энергию от дна ямы. Тогда задача для диэлектрического резонатора соответствует резонансам в диэлектрической пластине, обложенной плазменными слоями между двумя плазменными полупространствами. Собственным частотам соответствует случай $\omega_n < \omega_{pm}$, т.е. они ниже всех плазменных частот. Для более высоких частот $\omega_n > \omega_{pm}$ резонатор становится открытым, а уровни — квази-

собственными (метастабильными). При дифракции на структуре наблюдается резонансное прохождение фотонов с энергией, совпадающей с $\hbar \operatorname{Re}(\omega_n)$. При дифракции плоских электромагнитных волн возможны случаи падения под углом, при котором важна поляризация волн (p или s). Тогда волны можно классифицировать как $E(TM)$ или $H(TE)$. Отличие состоит только в нормированных волновых сопротивлениях: $z_n^e = \sqrt{\varepsilon_n - k_{\perp}^2/k_0^2/\varepsilon_n}$ и $z_n^h = 1/\sqrt{\varepsilon_n - k_{\perp}^2/k_0^2}$, которые при нормальном падении ($k_{\perp} = 0$) совпадают. Условие $R = 0$ для случая падения под углом есть условие существования поверхностных волн (плазмонов) в слоистой структуре [25]. В модельных задачах плазмоники диссипация не учитывалась. Ее учет приведет к тому, что все резонансные частоты при туннелировании и рассеянии фотонов станут комплексными.

Хотя при квантовом туннелировании электроны убегают из глубины катода на границу под всевозможными углами, обычно определяется плотность электронов, имеющих значение нормальной компоненты скорости $v = v_x$ в заданных пределах $dn(v_x) = (4\pi^2 \hbar)^{-3} m_e^3 v_x (v_F^2 - v_x^2) dv_x$ [15]. При РТ условие $R = 0$ также приводит к возникновению электронных волн вдоль поверхностей, если предположить поперечную неограниченность структуры. Однако эти волны движутся под всевозможными углами. При обычном туннелировании поперечные компоненты скорости малы, поскольку туннелирование идет в основном для больших нормальных компонент скорости. Поэтому при РТ следует ожидать увеличение разброса электронов по поперечным скоростям в выходном пучке.

2. Моделирование квантового потенциала и туннелирования в сложных многоямных барьерных структурах

Рассмотренные выше модельные задачи позволяют качественно оценивать туннелирование. Реальные энергетические диаграммы $V(x)$ барьерных структур получаются с использованием метода многократных изображений [20–22]. Профили потенциала с одной и двумя ямами для структуры катод–сетка–анод и катод–сетка–сетка–анод приведены на рис. 2. Для их вычисления использован подход, изложенный в [22] и учитывающий работы выхода из электродов (катода, анода и сеток). Далее индексы c, g, a соответствуют катоду, сетке и аноду. Работа выхода с катода определяется как $W_c = e^2/(16\pi\epsilon_0\delta)$. Аналогично определяются работы выхода сеток и анода через параметры δ_g и δ_a . Эти малые размеры (порядка Å) соответствуют расстояниям, на которых перестают действовать силы изображений из-за атомной структуры вещества. Они хорошо коррелируют с радиусами ионов кристаллической решетки в случае, когда один атом отдает один

Таблица 1. Параметры некоторых металлов и величина δ

Металл	Работа выхода, eV	Потенциал ионизации, eV	Радиус атома, ковалентный радиус, nm	Радиус иона, nm	δ , nm
Ba	2.52	5.21	0.222, 0.198	0.134 (+2e)	0.143
Be	3.92	9.32	0.112, 0.090	0.034 (+2e)	0.091
Cs	1.81	3.89	0.267, 0.235	0.167 (+1e)	0.199
Ka	2.25	4.34	0.235, 0.203	0.133 (+1e)	0.160
Na	2.28	5.14	0.190, 0.154	0.097 (+1e)	0.158
Li	2.49	5.39	0.145, 0.134	0.076 (+1e)	0.145
Cu	4.53	7.72	0.128, 0.117	0.077 (+1)	0.079
Mo	4.2	7.10	139, 130	0.070 (+4)	0.085
W	4.54	7.98	137, 170	0.070 (+4)	0.079

электрон в зону проводимости. В общем случае они изменяются от указанного радиуса до ковалентного радиуса. В табл. 1 приведены соответствующие данные. Приведенные на рис. 2 значения работ выхода катода несколько ниже, чем для обычно используемых металлов. Они могут соответствовать нанесению на медную или вольфрамовую поверхность тонкой (порядка nm) оксидной или диэлектрической пленки, например, в виде наноалмазных кластеров [22]. Нанесение магнетронным напылением алмазо-графитовых пленок с толщиной в несколько nm позволяет в разы снизить работу выхода и получить низкопороговую эмиссию. Однако для РТ это неважно, поскольку результат слабо зависит от материала катода в силу того, что использован весьма большой потенциал на сетке. Взятая работа выхода анода может соответствовать Cu или W. Сетки целесообразно выполнять из многослойного графена (графита) [26].

Работу по перемещению электрона в точку x определим как $W(x, \delta, \delta_a, d) - W(0, \delta, \delta_a, d)$. Полагая ее не зависящей от расстояний δ и δ_a , имеющих порядок радиуса иона кристаллической решетки вблизи границ катода и анода, получим функцию $W(x, \delta, \delta_a, d)$. Она имеет вид [22]:

$$W = -\frac{e^2}{16\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{x + \delta} \left(1 + \frac{2xd}{(d - x + \delta_a)(d + x)} \right) - \frac{2}{d} + \frac{2x^2}{d^3} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - (x/d)^2)n} \right\}, \quad (4)$$

учитывает бесконечную серию изображений относительно катода и анода и дает потенциальную энергию электрона в точке x . На катоде

$$W(0, \delta, \delta_a, d) = -e^2(16\pi\epsilon_0)^{-1} \{ \delta^{-1} - 2d^{-1} \}.$$

При большом расстоянии d имеем

$$W(0, \delta, \delta_a, d) = -e^2(16\pi\epsilon_0\delta)^{-1} = -W_0.$$

На аноде при большом расстоянии

$$W(d, \delta, \delta_a, d) = -e^2(16\pi\epsilon_0\delta_a)^{-1} = -W_a.$$

В случае совпадения работ выхода с катода и анода $W = W_a$ следует положить $\delta_a = \delta$. Заметим, что в работе [20] (формула (31)) приведена функция типа (4) (при $\delta = \delta_a = 0$), названная „потенциал изображений“, но отличающаяся от (4) множителем 2. Это действительно потенциал идеальных изображений. Но при получении потенциальной функции следует вычислять работу по перемещению электрона. Смещение электрона на dx приводит к смещению всех его изображений относительно него на величины $\pm 2dx$, т.е. сила определяется как половина производной указанного потенциала со знаком минус. Это доказывает, что (4) есть потенциал электрона. Из табл. 1 видно, что для ряда металлов величина δ весьма близка к радиусу иона, в некоторых случаях близка к ковалентному радиусу, а в общем случае находится между ними, т.е. она не превышает половины постоянной кристаллической решетки. Фактически в (4) мы отсчитываем поверхность катода от поверхности, образованной электронными оболочками первого слоя ионов или близкой к ней (а не от центров атомов). В монографии [15] изложена следующая модель. Имеется двойной электрический (дипольный) слой, образованный облаком вылетающих из металла, но не прошедших барьер электронов. Считается, что поле этого слоя постоянно, слой имеет толщину, не превышающую постоянную решетки, сила изображений начинает действовать от его внешней границы, а постоянная сила внутри слоя плавно переходит в силу изображений. Это дает результат в два раза больший, чем (4) (по крайней мере, для одного изображения). Чтобы связать формулу с работой выхода, надо в два раза увеличить δ . Модель в [15] имеет ряд недостатков. Первая — постоянство поля в двойном слое. На самом деле поле сильно неоднородное, как и плотность облака. Второе — сила изображений не действует внутри облака. Третье — размер облака постоянен. Отметим, что плотность электронов перед барьером (в начальной его части) можно найти, если барьер известен. Имеется ряд работ [27–33], в которых рассчитывался ход потенциальной кривой вблизи катода и его влияние на эмиссию, в том числе с учетом квантовых подходов, обменного взаимодействия и двойного слоя. Показано с использованием метода Хартри–Фока [28], что для разных энергий начальный участок барьера различен. Обменные взаимодействия и образование двойного электрического слоя могут приводить к немонотонности хода потенциала [29,31–33]. Эти эффекты, однако, невелики в структурах с глубокими потенциальными ямами. В работе [30] на основе потенциала Зейтца устранялся разрыв потенциальной кривой с приведением ее к виду (1). Введение параметра δ , по видимому, самый простой и действенный метод учета потенциала вблизи электродов. Вдали от электродов важен учет пространственного заряда.

Рассмотрим ряд примеров определения δ . Экспериментально определяемая работа выхода меди лежит в пределах 4.53–5.10, что соответствует $0.0706 \leq \delta \leq 0.0795$. Для меди радиус атома $r_a = 0.128$, ковалентный радиус — 0.117, радиус иона (+1e) — $r_i = 0.077$, а энергия ионизации (+e) 7.72 примерно в полтора раза больше работы выхода. Для меди δ примерно равно радиусу иона и чуть меньше ковалентного радиуса. Для серебра экспериментально определяемая работа выхода 4.52–4.74, чему соответствует область $0.0759 \leq \delta \leq 0.0796$. Для серебра радиус атома 0.144, ковалентный радиус — 0.134, радиус иона +2e равен 0.089, радиус иона +e равен 0.126, энергия ионизации — 7.57. Здесь параметр δ меньше радиуса иона +e и близок к радиусу иона +2e. Работа выхода калия — 2.28, чему соответствует $\delta = 0.157$. Для калия радиус атома — 0.235, ковалентный радиус — 0.203, радиус иона — 0.133, энергия ионизации — 4.34. Здесь δ несколько больше радиуса иона. Аналогичный результат имеет место для других щелочных металлов. Для большого ряда металлов δ находится в области между радиусом иона и ковалентным радиусом, т.е. меньше полупериода кристаллической решетки. При таком расстоянии электрон сильно связан с одним атомом решетки, взаимодействует с его электронной оболочкой, и дальнейшее сближение не приводит к притягивающей силе, тогда как энергия удаления электрона из кристалла близка к работе выхода. Поскольку при таком удалении электрона на величину x положительно заряженное электронное облако смещается на величину $-x$, сила изображений действует на расстоянии $2x$ [15–17], чем и объясняется величина W_0 . Она в два раза меньше, чем энергия ионизации атома радиуса δ с зарядом +e. Принимая, что параметр δ примерно равен радиусу иона +e, получаем $W_0 \approx V_i r_a / (2r_i)$, где V_i — потенциал ионизации атома. Такая формула хорошо коррелирует с потенциалами ионизаций металлов, а простое введение параметра δ учитывает дискретность среды.

В приведенных примерах (рис. 2,3) использованы совпадающие работы выхода с катода W_0 и анода W_a и различающиеся для сеток W_g . Влияние работы выхода сеток невелико, поскольку может быть скорректировано приложенным к ним напряжением. В областях сеток, катода и анода потенциал постоянен, а между ними появляются барьеры. Следует отметить, что высота барьера зависит не только от работ выхода, потенциалов, но и от его протяженности, а именно уменьшается при сближении электродов. В случае, когда потенциал сетки больше потенциала анода, ей соответствует яма, при этом возможно РТ (рис. 3,4).

Расчет туннелирования произведен матричным методом с использованием матриц передачи (переноса)

$$\hat{T}_j = \begin{bmatrix} \cos(k_j \Delta x_j) & -ik_j^{-1} \sin(k_j \Delta x_j) \\ -ik_j \sin(k_j \Delta x_j) & \cos(k_j \Delta x_j) \end{bmatrix},$$

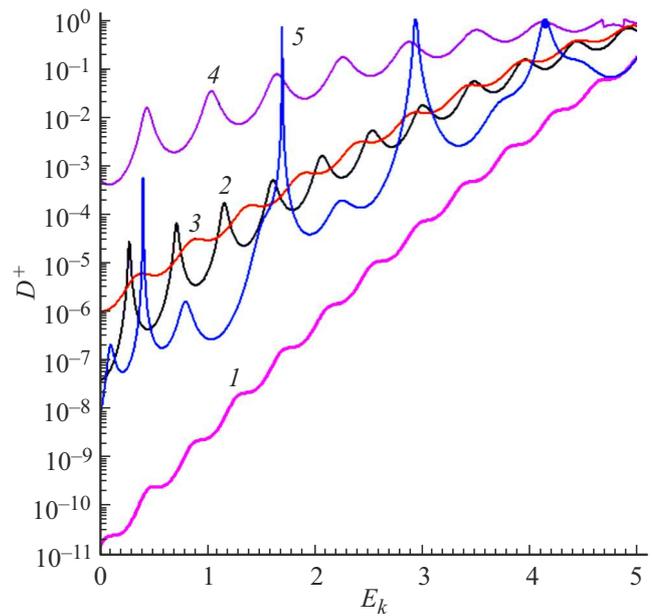


Рис. 3. Коэффициент туннелирования с катода в зависимости от кинетической энергии электронов (eV) в одноянных структурах (кривые 1–4) и двухъянной структуре (кривая 5) одинаковой длины 8 nm. Параметры структур (в eV): $W_k = 3$, $W_g = 4$, $W_a = 4.5$; $V_a = 5$ (кривые 1, 4, 5); $V_a = 10$ (кривые 2, 3); $V_g = 25$ (кривые 1, 2, 5); $V_g = 25$ (кривая 3); $V_g = 45$ (кривая 4).

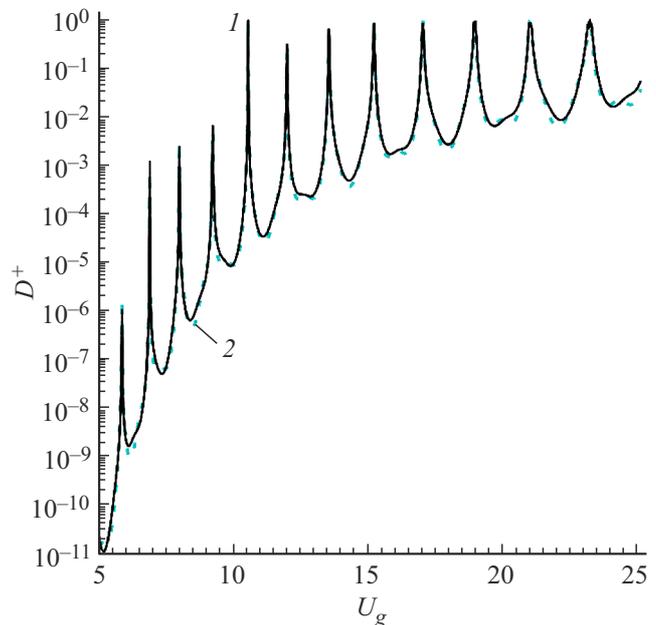


Рис. 4. Коэффициент туннелирования при $E = E_F$ для структуры $t_1 = t_2 = t_3 = 2$, $t_g = 1$, $\delta = 0.1$, $\delta_g = 0.15$ (nm) в зависимости от потенциала сетки U_g (V): кривая 1 — $U_a = 8$ V; кривая 2 — $U_a = 5$ V.

в которых $k_j = \sqrt{\mu(E_k - V_j - V_0)}/\hbar$ для надбарьерных областей и $k_j = i\sqrt{\mu(V_j + V_0 - E_k)}/\hbar$ для подбарьерных областей. Профиль потенциала описывается кусочно-

постоянной (ступенчатой) функцией со значениями потенциала V_j :

$$V(x) = \sum_{j=1}^N V_j u_j(x).$$

Функции $u_j(x)$ равны единице на соответствующей ступеньке и нулю вне их. Поскольку $V_j < 0$, для уровня $V_j = -V_0$, соответствующего дну зоны проводимости, все кинетические энергии надбарьерные, а для уровней выше уровня Ферми $V_j > -V_F$ все движения подбарьерные.

Программа решения УШ заключалась в построении полной матрицы $\hat{T} - \hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_N$ путем перемножения матриц областей и в вычислении коэффициента прохождения из системы уравнений $1 + R = (T_{11} + ik_a T_{12})T$, $1 - R = (-iT_{21}/k_0 + T_{22}k_a/k_0)T$. Складывая их, получаем результат

$$T = 2/[T_{11} + T_{22}(k_a/k_0) + i(T_{12}k_a - T_{21}/k_0)],$$

$$R = 1 + (iT_{21}k_0 - T_{22}k_a/k_0)T.$$

Система уравнений получена из представления волновой функции на катоде в виде

$$\psi(x) = A(\exp(ik_0x) + R \exp(-ik_0x)),$$

а на аноде — в виде $\psi(x) = AT \exp(ik_a(x-d))$. Здесь использованы обозначения $k_0 = \sqrt{\mu E}/\hbar$ на катоде и $k_a = \sqrt{\mu(E + eU_a)}/\hbar$ на аноде, т.е. эти величины пропорциональны импульсам электронов на катоде и аноде (до релаксации импульса). Обычно туннелирование считается процессом без потери энергии и импульса, т.е. в точке поворота импульс есть $k_0\hbar$. Однако после туннелирования импульс электрона на аноде увеличивается за счет ускорения из-за надбарьерного движения. Действительно, в этой области на электрон с действительным импульсом действует ускоряющая сила, т.е. движение квазиклассическое. Поэтому на границе катода волновую функцию следует взять в указанном выше виде. После попадания на анод на длине свободного пробега избыточный импульс релаксирует до величины $k_0\hbar$. При этом электрон отдает энергию eU_a фононам решетки анода. Поскольку также

$$Z = (1 + R)/(1 - R) \\ = (T_{11} + ik_a T_{12})/(-iT_{21}/k_0 + T_{22}k_a/k_0),$$

можно найти коэффициент отражения от барьера другим способом: $R = (Z - 1)/(Z + 1)$. При этом $|R|^2 + k_a/k_0 |T|^2$, а Z и R зависят не только от формы барьера, но и от напряжения на аноде. Заметим, что если не учитывать ускорение электрона и взять на аноде волновую функцию в виде $\psi = AT \exp(ik_0(x-d))$, то получим результат $|R|^2 + |T|^2 = 1$. Входящие в него коэффициент отражения и коэффициент прохождения другие и соответствуют области движения до последней точки поворота. Поскольку релаксация импульса

и разогрев анода происходят при $x > d$, эти эффекты не влияют на волновую функцию $AT \exp(ik_a(x-d))$, определяющую прошедший поток частиц. Вычисляемый коэффициент туннелирования или прозрачности барьера $D^+(E) = |T|^2$ зависит от кинетической энергии электрона в области катода E (индекс k будем опускать). Квазиклассический ВКБ подход рассматривает только подбарьерные движения в областях между точками поворота и не пригоден для сложных структур с квантовыми ямами. Кроме того, в нем для вычисления интегралов обычно барьер считается широким, а отраженной эванесцентной волной пренебрегают [18]. Это объясняет, почему формулу Фаулера–Нордгейма нельзя применять даже в структуре катод–анод с одним горбом и одной ямой при большом анодном напряжении, когда горб практически исчезает и остается одна яма.

В вычислениях использовано соответственно 101 и 152 ступеньки для одноямных и двухъямных барьеров, т.е. каждый барьер аппроксимировался 50 ступеньками, тогда как для каждой ямы достаточно одной. Вычисляемый коэффициент прозрачности (туннелирования) барьера $D^+(E_k) = |T|^2$ зависит от кинетической энергии электрона в области катода E_k . Прозрачность эмиссионной структуры носит резонансный характер: некоторые максимумы меньше единицы, но для некоторых конфигураций (рис. 3, кривая 5) при нескольких значениях энергий могут достигать единицы. Пики имеют разные ширины, а вариация между максимумами и минимумами может достигать нескольких порядков. Прозрачности тем выше, чем меньше совокупная ширина горбов. Частота максимумов тем больше, чем шире структура, и при прочих равных условиях пропорциональна совокупной ширине квантовых ям. На рис. 4 дана зависимость прозрачности на уровне Ферми от сеточного напряжения для двухъямного потенциала. Такой же резонансный характер она носит и для более низких энергий.

Расчет полного туннельного тока требует учета распределения электронов по скоростям (энергиям), т.е. интегрирования величины $D^+(E)n(E)dE$ от нуля до энергии Ферми. При этом оптимальный профиль должен иметь достаточно много метастабильных отрицательных уровней V_n несколько ниже уровня Ферми катода $V_c = V_F = -W$ и выше дна зоны проводимости катода V_0 , причем с не слишком малой шириной спектральных линий. Соответствующая уровню кинетическая энергия равна $E_{kn} = V_0 - V_n$. Дну зоны проводимости анода соответствует более глубокий уровень $V_{0a} = -W - E_F - eU_a$, уровню Ферми на аноде — $V_a = -W - eU_a$, а яме на сетке — уровень $V_g = -W_g - eU_g$. Здесь взят случай одинаковых работ выхода катода и анода, а для сетки она равна W_g . Мы не рассматриваем зонную структуру сетки. В зоне проводимости тонкой сетки много дискретных уровней ниже V_g . Выше этого уровня при $U_g > U_a$ могут существовать стабильные уровни, выше которых лежат метастабильные уровни. Чем больше таких близко расположенных уровней с перекрывающимися спектральными линиями и чем ближе они к уровню

Ферми, тем больший интегральный ток от структуры можно получить. Следовательно, задача увеличения тока эмиссии сводится к построению такой барьерной структуры и к определению ее метастабильных уровней. Ее можно сформулировать так. Пусть $\hat{T}(E_n)$ — матрица передачи. С учетом соотношения $k_{an}^2 = k_{0n}^2 + \mu e U_a / \hbar^2$ имеем

$$k_{0n} = \frac{\sqrt{\mu(E_n - V_c)}}{\hbar} = \frac{iT_{21} - k_{an}T_{22}}{T_{11} + ik_{an}T_{12}}. \quad (5)$$

Учитывая $1 = T_{11} + ik_{an}T_{12}$, $k_0 = iT_{21} - k_{an}T_{22}$, $\det(\hat{T}) = 1$, имеем $T_{22} = 1 - (k_{0n}/k_{an})(1 - T_{11})$. Уровень метастабильный, если $V_a < \text{Re}(E_n)$, и стабильный, если $E_n < V_a$.

Характеристическое уравнение (5) определяет все комплексные уровни E_n . Если уровень действительный и отрицательный, то он определяется из действительного уравнения $T_{22} = 1 - (k_{0n}/k_{an})(1 - T_{11})$. Приведенные уравнения трансцендентные, поскольку матрица зависит от энергии уровня. Они позволяют определять и метастабильные уровни, которые соответствуют зоне проводимости катода. Именно они интересны для РТ. Удобна следующая методика определения комплексных корней. Находим действительные корни уравнения (5) при оперировании с его реальной частью. Далее эти действительные корни используем как начальные приближения в итерационной процедуре согласно формуле (5). Такая процедура требует расчета на каждом шаге матрицы передачи с комплексной энергией.

3. Сравнение одноямных и двухъямных барьеров

На рис. 3 приведены расчеты прозрачности $D^+(E)$ для одноямного и двухъямного потенциалов, а на рис. 4 — зависимость $D^+(U_g)$ при $E_k = E_F$ для двухъямного потенциала, при этом глубина ям изменяется. Прозрачность слабо зависит от анодного напряжения. Двухъямный потенциал создается двойной сеткой, электроды которой разделены вакуумным промежутком или заполненным диэлектриком зазором, но находятся при одинаковом электрическом потенциале. Удобно задавать $U_g > U_a$. Наличие второй ямы приводит к удвоению уровней [19] и к увеличению полного тока (рис. 5). Наличие квазипериодической гетероструктуры может привести к возникновению зон, содержащих много близко расположенных уровней. Однако использование таких структур ограничено тем обстоятельством, что их общая длина должна быть существенно меньше длины свободного пробега в материале сетки, т.е. вылетевший из катода электрон не должен потерять импульс за счет рассеяния на фононах. Поскольку при комнатной температуре длина свободного пробега в металлах порядка десятков нм, ограничение на длину составляет несколько нм. При такой длине сеточной структуры использовать больше двух электродов уже сложно. Использование

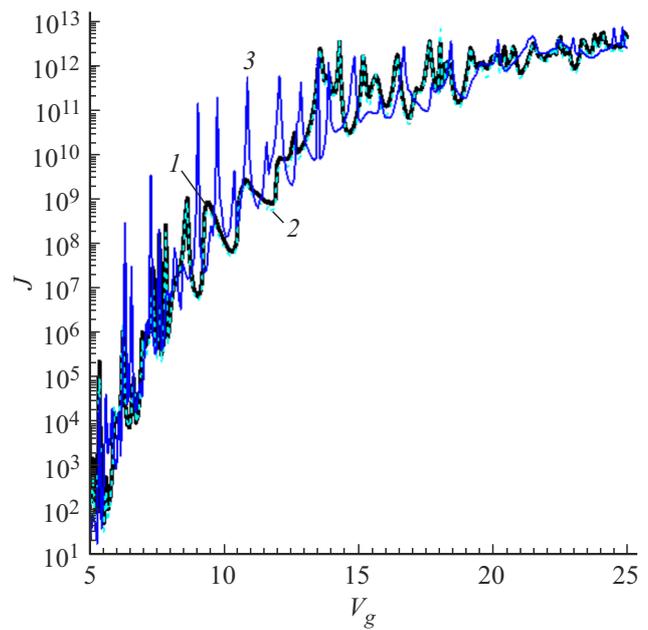


Рис. 5. Вольт-сеточные характеристики для структуры рис. 2, кривая 2 при разных U_a (В): 11 (кривая 1); 9 (кривая 2); 5 (кривая 3).

Таблица 2. Метастабильные уровни энергии для структуры рис. 3, кривая 5

Номер уровня	E'_n , eV	E'' , eV
1	4.1921	0.2012
2	2.8932	0.1213
3	1.7055	0.0347

же сверхнизких температур сильно усложняет конструкцию полевого эмиттера. В одноямной несимметричной структуре совпадающие с кинетическими энергиями квазиуровни не возникают, и полного резонансного туннелирования нет. Возникновение резонансных пиков обусловлено взаимодействием с низколежащими уровнями (неполным погашением отраженной волны парциальными отражениями от неоднородностей). Сильно изрезанный характер сеточной ВАХ можно объяснить тем, что изменение уровня дна смещает резонансные уровни, и максимумы с минимумами возникают при других близких значениях потенциала. Анодные ВАХ также демонстрируют колебания, но их размах не более нескольких раз, а период порядка 2–3 В.

В табл. 2 приведены результаты вычисления комплексных уровней $E_n = E'_n - iE''$ для двухъямной структуры. Видно, что значения E'_n хорошо коррелируют с энергиями E_k , при которых имеют место максимумы прозрачности барьера (рис. 3). Следует отметить, что метастабильные уровни играют главную роль в переходных процессах [1–6,19,34], что важно для импульсных

источников и приборов в импульсном режиме. Рассмотренные двухъямные структуры позволяют достичь полного РТ, тогда как в одноямных структурах и в структурах с $U_g < U_a$ достигается неполное РТ [22]. На рис. 5 приведены результаты вычисления полного тока $J = J^+ - J^-$ для одноямной и двухъямной структур по формуле [15,16]:

$$J^\pm = \frac{em_e}{2\pi^2\hbar^2} \int_0^{E_F} D^\pm(E)(E_F - E)dE. \quad (6)$$

При использованных анодных напряжениях обратный ток ничтожно мал и $J \approx J^+$. Интеграл (6) вычислялся численно методом средних с использованием 300 точек. Реально низкие энергии практически не вносят в него вклад. Результаты показывают сильную изрезанность ВАХ с размахом до нескольких порядков и периодами до долей вольта. Для рис. 3, 4 бралась энергия Ферми на катоде $E_F = 5$ eV, для рис. 5 — $E_F = 10$ eV.

На основе формулы (6) можно оценить ток при РТ. Пусть имеются значения энергий E_n РТ и областей Δ_n около них, где можно считать $D^+ = 1$ (для Δ_n можно взять полуширину резонансов). В силу экспоненциальной малости D^+ , в остальной области считаем $D^+ = 0$. Тогда (6) интегрируется, и получаем

$$J^\pm = \frac{em_e}{2\pi^2\hbar^3} \sum_{n=1}^N (E_F - E_n)\Delta_n. \quad (7)$$

Формула (7) отвечает на вопрос о максимальном токе: он тем больше, чем больше уровней РТ и чем они шире, при этом они должны располагаться существенно ниже уровня Ферми.

4. Корректировка профиля потенциала на основе решения уравнения Пуассона

Большая плотность тока приводит к существенной плотности нескомпенсированного отрицательного заряда в пространстве катод–анод, что может изменить распределение потенциала V . Введем матрицы $\hat{t}_N = \hat{T}_N$, $\hat{t}_{N-1} = \hat{T}_{N-1}$, $\hat{T}_N, \dots, \hat{t}_1 = \hat{T}_1, \hat{T}_2, \dots, \hat{T}_N = \hat{T}$. Они связывают амплитуды прямых и обратных волн $\psi_j(x) = a_j^+ \exp(ik_jx) + a_j^- \exp(-ik_jx)$:

$$a_j^+ + a_j^- = (t_j^{11} + ik_{atj}^{12})T,$$

$$a_j^+ - a_j^- = (-it_j^{21}/k_j + t_j^{22}k_a/k_j)T,$$

откуда имеем

$$a_j^+ = [t_j^{11} + t_j^{22}k_a/k_j + ik_{atj}^{12} - it_j^{21}/k_j]T/2,$$

$$a_j^- = [t_j^{11} - t_j^{22}k_a/k_j + ik_{atj}^{12} + it_j^{21}/k_j]T/2,$$

$j = 1, 2, \dots, N$. Определяя эти амплитуды, вычисляем плотности $\rho_j = \rho(x_j) = |\psi_j(x_j)|^2$. От дискретных значений плотности перейдем к непрерывным. В области структуры имеем разложение

$$\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n \cos(2n\pi x/d) + \beta_n \sin(2n\pi x/d)] \quad (8)$$

с коэффициентами

$$\alpha_0 = \frac{2}{d} \sum_{j=1}^N \rho_j \Delta_j, \quad \beta_0 = 0,$$

а при $n = 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{d} \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{x_j - \Delta_n/2}^{x_j + \Delta_n/2} \cos\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) dx = \frac{2}{n\pi} \sum_{j=1}^N \rho_j \\ &\quad \times \sin\left(\frac{2n\pi\Delta_j}{d}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{d}\right), \\ \beta_n &= \frac{2}{d} \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{x_j - \Delta_n/2}^{x_j + \Delta_n/2} \sin\left(\frac{2n\pi x}{d}\right) dx = \frac{2}{n\pi} \sum_{j=1}^N \rho_j \\ &\quad \times \sin\left(\frac{2n\pi x_j}{d}\right) \sin\left(\frac{2n\pi\Delta_j}{d}\right). \end{aligned}$$

Величина (8) определяет плотность частиц в потоке, а величина $-e\rho(x)$ есть плотность заряда, входящая в УП $\partial_x^2 \Phi(x) = e\rho(x)/\epsilon_0$. Для решения УП можно использовать дискретные разностные методы, но мы применим метод рядов, представив потенциал в виде

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [f_n \cos(2n\pi x/d) + g_n \sin(2n\pi x/d)]. \quad (9)$$

Соответственно имеем

$$f_n = \frac{e\alpha_n}{\epsilon_0(2n\pi/d)^2}, \quad g_n = \frac{e\beta_n}{\epsilon_0(2n\pi/d)^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Потенциал (9) — периодический. Для определения последнего неизвестного коэффициента f_0 следует наложить граничное условие $\Phi(0) = \Phi(d) = 0$, откуда имеем

$$\begin{aligned} f_0 &= -\sum_{n=1}^{\infty} f_n = -\frac{ed^2}{2\pi^2\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^N \rho_j \\ &\quad \times \sin\left(\frac{2n\pi\Delta_j}{d}\right) \cos\left(\frac{2n\pi x_j}{d}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Входящие ряды сходятся достаточно хорошо, так что в (10) достаточно использовать несколько десятков членов. В (9) достаточно использовать порядка сотни членов.

Рассмотрим однобарьерную структуру с высотой барьера V_0 от нулевого уровня кинетической энергии и глубиной ямы $V_1 > 0$. Слева от барьера волновая функция имеет вид

$$\psi(x) = A[\exp(ik_0x) + R \exp(-ik_0x)],$$

а справа от него —

$$\psi(x) = AT \exp(ik_1x).$$

Здесь $k_0 = \sqrt{\mu E_k}/\hbar$, $k_1 = \sqrt{\mu(E_k + V_1)}/\hbar$, A определяет поток частиц. В области барьера

$$\psi(x) = A[a^+ \exp(ikx) + a^- \exp(-ikx)].$$

В этой волновой функции $k = \sqrt{\mu(E_k - V_0)}/\hbar = i\kappa$, т.е.

$$\psi(x) = A[a^+ \exp(-\kappa x) + a^- \exp(\kappa x)].$$

Считаем, что $E_k < E_F < V_0$. Сшивая волновые функции и их производные, получаем уравнения $1 + R = a^+ + a^-$, $1 - R = i\kappa(a^+ - a^-)/k_0$, $a^+ \exp(-\kappa d) + a^- \exp(\kappa d) = T$, $-a^+ \exp(-\kappa d) + a^- \exp(\kappa d) = ik_1 T/\kappa$. Эти уравнения имеют простые решения:

$$a^+ = T(1 - ik_1/\kappa) \exp(\kappa d)/2,$$

$$a^- = T(1 + ik_1/\kappa) \exp(-\kappa d)/2,$$

$$T(\kappa) = \frac{2}{\cosh(\kappa d)(1 + k_1/k_0) - i(k_1/\kappa - \kappa/k_0) \sinh(\kappa d)}. \quad (11)$$

Обозначим $T = |T|^2 \exp(i\varphi)$, $\varphi_0 = \arctan(k_1/\kappa)$. Тогда плотность частиц

$$\rho(x) = |\psi|^2 = A^2 \tilde{\rho}(x)$$

есть

$$\tilde{\rho}(x) = |a^+|^2 \exp(-2\kappa x) + |a^-|^2 \exp(2\kappa x) + 2|a^+|^2 \cos(2\varphi_0)$$

или

$$\tilde{\rho}(x, E) = |T(E)|^2 [1 + (k_1/\kappa)^2] \times [\cosh(2\kappa(x - d)) + \exp(2\kappa d) \cos(2\varphi_0)]/2. \quad (12)$$

Здесь $\kappa = \sqrt{\mu(V_0 - E)}/\hbar$, поэтому (12) можно считать функцией энергии. Формула (12) получена для односкоростного потока с энергией E и единичной плотностью частиц в потоке. Действительно, использована волновая функция $A \exp(ik_0x)$. При $A = 1$ такая нормировка для плоской волны дает единичную плотность вероятности и плотность падающего потока вероятности $j^+ = k_0 \hbar/m_e = v$, равную его скорости. Соответственно в потоке на длине v в одну секунду содержится одна частица, т.е. через плоскость x каждую секунду проходит частица со скоростью v . Такую нормировку удобно трактовать как на единичную плотность частиц в односкоростном потоке [23]. Если A^2 имеет размерность

„число частиц на единицу длины“, то $J = -eAv$ имеет размерность тока, а если A^2 имеет размерность „число частиц на единицу объема“, то $J = -eAv$ имеет размерность плотности тока.

При туннелировании из металла следует учитывать распределение электронов по энергиям. Волновую функцию надо брать в виде волнового пакета

$$\Psi(x) = \Psi^+(x) + \Psi^-(x) = \int_0^{k_F} A(k) \times [\exp(ikx) + R(k) \exp(-ikx)] dk.$$

Он многоскоростной. Амплитуду считаем действительной. Падающий электронный поток на интервал скоростей $dv = (\hbar/m_e)dk$ имеет объемную плотность частиц (m^{-3}) [15]:

$$dn = \frac{m_e^3}{4\pi^2 \hbar^3} (v_F^2 - v^2) dv = \frac{(k_F^2 - k^2)}{4\pi^2} dk.$$

Очевидно, должно быть

$$|\Psi^+(x)|^2 = \int_0^{k_F} A^2(k) dk = \int_0^{k_F} \frac{(k_F^2 - k^2)}{4\pi^2} dk = \frac{k_F^3}{6\pi^2} = \frac{(\mu E_F)^{3/2}}{6\pi^2 \hbar^3}. \quad (13)$$

Мы получили, что (13) равно $N/2$, где N — концентрация свободных электронов, т.е. формула учитывает ту половину электронов, которая движется к границе катода. В отсутствии напряжений они полностью отражаются, т.е. в обоих направлениях движется ровно N электронов. Теперь полную плотность частиц можно записать как

$$P(x) = \frac{m_e^3}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^{v_F} (v_F^2 - v^2) \tilde{\rho}(x, v) dv = \frac{m_e^{3/2}}{2^{3/2} \pi^2 \hbar^3} \int_0^{v_F} (E_F^2 - E^2) \tilde{\rho}(x, E) E^{-1/2} dE. \quad (14)$$

Выражение (12) следует рассматривать в первом интеграле (14) как функцию скорости при замене $E = m_e v^2/2$. С учетом (11) и (12) интеграл (14), полученный для прямоугольного барьера, уже необходимо вычислять численно.

Из вида функции (12) можно заключить, что начальной части барьера плотность невелика и возрастает к его концу. Возрастание плотности означает снижение электростатического потенциала и повышение квантового. Это приводит к скосу плоской вершины барьера вверх. Реальный потенциал в диодной структуре при большом анодном напряжении близок к треугольному, поэтому влияние пространственного заряда приведет к превращению почти треугольного барьера в более прямоугольный. Поднимется и его вершина в целом.

Считая, что V_0 и V_1 определяются потенциалом анода, указанные эффекты можно компенсировать повышением его потенциала. В случае многоямного потенциала, образованного несколькими электродами, эти эффекты легко компенсируются изменением потенциалов электродов сеток.

В работе [27] рассмотрен эффект пространственного заряда при решении УП со следующими граничными условиями: $\Phi(0) = 0$, $\Phi(d) = U_a$, $\Phi'(0) = U_a/d$. Считая, что в диодной структуре электроны покидают катод в основном со скоростью Ферми, а на длине x приобретают скорость $v = \sqrt{v_F^2 + 2e\Phi(x)/m_e}$, получаем при постоянном токе плотность

$$\rho(x) = \frac{J/e}{\sqrt{v_F^2 + 2e\Phi(x)/m_e}}.$$

При резонансном туннелировании скорость вылета меньше, а плотность больше. Полученное в работе [27] выражение связи U_a и J имеет вид (в системе СИ)

$$\frac{U_a}{d} = \frac{U_a}{d} \left[1 - J \frac{4}{3} \left(\frac{m_e}{2e} \right)^{1/2} \frac{d^2}{\varepsilon_0 U_a^3} \right].$$

Для $J = 10^{10}$ А/м², $d = 10$ нм, $U_a = 20$ В второй член в квадратной скобке равен 0.085, а сама скобка равна 0.915, т.е. этот случай соответствует уменьшению поля на катоде менее 10%. Это ограничивает ток, но, как видно из формулы, уменьшение поля можно компенсировать увеличением анодного напряжения.

При решении уравнения Пуассона мы использовали формулу разложения в ряд Фурье и метод рядов Фурье для определения ее коэффициентов. Она подразумевает периодическое продолжение потенциала, что при граничном условии $\Phi(0) = \Phi(d)$ вполне естественно, но его нужно накладывать. Можно использовать формулу нечетного продолжения

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x/d). \quad (15)$$

Она уже удовлетворяет нулевым граничным условиям. Для определения коэффициентов можно использовать представление (8). Но его лучше взять в виде

$$\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cos(n\pi x/d).$$

Тогда коэффициенты даются выражениями

$$u_n = -\frac{ed^2}{\pi^3 \varepsilon_0 n^2} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m v_{nm},$$

$$\gamma_n = \frac{2}{d(1 + \delta_{n0})} \sum_{j=1}^N \rho_j \int_{x_j - \Delta_j/2}^{x_j + \Delta_j/2} \cos\left(\frac{n\pi x}{d}\right) dx$$

$$= \frac{4}{n\pi(1 + \delta_{n0})} \sum_{j=1}^N \rho_j \sin\left(\frac{n\pi \Delta_j}{2d}\right) \cos\left(\frac{n\pi x_j}{d}\right).$$

Здесь $v_{nm} = 0$, если n и m одной четности и $v_{nm} = 4n/(m^2 - n^2)$, если n и m разной четности.

Рассмотрим вопрос: можно ли использовать полученные выше статические формулы для коррекции потенциала. Пусть теперь через структуру течет туннельный ток с плотностью J . Туннелирование — процесс без потери энергии. Если набегаящий на барьер электрон имеет скорость v_0 , то эту же скорость он имеет на выходе барьера. Далее при надбарьерном движении он, вообще, говоря, ускоряется и приобретает скорость $v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2eU(x)/m_e}$. При рассматриваемых напряжениях она порядка или немного больше скорости Ферми. Ток определяется как $J = -e\rho v$. Так как $\text{div} J = 0$, нет изменения пространственного заряда во времени, т.е. он не накапливается. Но он есть: $-e\rho = J/v$. Взяв среднюю скорость в виде $\bar{v}(x) = \sqrt{2eU_a/m_e}$, аппроксимируя потенциал в (15) одним первым членом и усредняя, получим подъем барьера в центре на:

$$\Phi(d/2) = \frac{d^2 J}{2\pi \varepsilon_0 \sqrt{2eU_a/m_e}}.$$

Взяв вполне технически достижимые токи с плотностью $J = 10^{10}$ А/м², $U_a = 9.1$ В, $d = 10$ нм, получим $\Phi(d/2) = 0.010$ В. Тем самым плотность $J = 10^{12}$ А/м² вполне достижима. В стационарном односкоростном пучке силы на электроны не действуют. Точнее говоря, они не действуют на продольные движения, и пучок движется как целое. Пространственный заряд важен, когда в разных частях возникают многоскоростные продольные движения. Если пучок поперечно-ограниченный, то действуют расталкивающие поперечные силы. В релятивистском пучке из-за пинч-эффекта и они почти не действуют. Когда же силы пространственного заряда весьма важны? Очевидно, это будет в нестационарном пучке $J(x, t)$. Приведенные стационарные решения следует модифицировать. Пусть нестационарный пучок возникает в момент $t = 0$ (в этот момент подается напряжение на электроды). Мы запишем представление плотности тока в виде

$$J(x, t) = \sum_{n=0}^N b_n(t) \cos(n\pi x/d). \quad (16)$$

В каждый момент оно определяется из решения УШ с заданным на этот момент потенциалом. Поле между катодом и анодом определяется вектор-потенциалом с одной компонентой, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\partial_x^2 A_x - c^{-2} \partial_t^2 A_x = -J(x, t). \quad (17)$$

Для вектор-потенциала примем разложение

$$A_x(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) \cos(n\pi x/d). \quad (18)$$

Тогда для коэффициентов разложения получаем дифференциальные уравнения

$$a_n''(t) + (n\pi c/d)^2 a_n(t) = c^2 b_n(t). \quad (19)$$

Из них при заданных правых частях можно определить $a_n(t)$, найти вектор-потенциал и найти скалярный потенциал из уравнения

$$\partial_x A_x(x, t) + \varepsilon_0 \partial_t \Phi(x, t) = 0. \quad (20)$$

Интегрируя, для скалярного потенциала имеем

$$\Phi(x, t) = \varepsilon_0^{-1} \sum_{n=0}^N \frac{n\pi}{d} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \int_0^t a_n(t') dt'. \quad (21)$$

Он равен нулю в начальный момент, а на границах удовлетворяет нулевым граничным условиям $\Phi(0, t) = \Phi(d, t) = 0$. Скалярный потенциал также можно искать из волнового уравнения

$$\partial_x^2 \Phi(x, t) - c^{-2} \partial_t^2 \Phi(x, t) = -\frac{e\rho(x, t)}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^t \partial_x J(x, t') dt'. \quad (22)$$

Дифференциальные уравнения (19) решаем методом Фурье. С обозначением частот $\omega_n = n\pi c/d$ это дает

$$a_n(t) = \frac{c^2}{\omega_n} \int_0^t b_n(t') \sin(\omega_n(t-t')) dt'. \quad (23)$$

Действительно,

$$a'_n(t) = c^2 \int_0^t b_n(t') \cos(\omega_n(t-t')) dt',$$

$$a''_n(t) = -c^2 \omega_n \int_0^t b_n(t') \sin(\omega_n(t-t')) dt' + c^2 b_n(t),$$

что удовлетворяет уравнению (19). Таким образом, получаем потенциал

$$\begin{aligned} \Phi(x, t) &= \frac{c}{\varepsilon_0} \sum_{n=0}^N \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right) \int_0^t \int_0^{t'} b_n(t'') dt'' dt' \\ &= \sum_{n=0}^N u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

К этому потенциалу следует добавить переменный потенциал на электродах. В частности, можно считать, что $U_a(t) = U_{0a} + u_a(t)$, $U_g(t) = U_{0g} + u_g(t)$, $u_a(0) = u_g(0) = 0$. Для модифицированного потенциала решаем нестационарное УШ, откуда находим новое значение плотности тока. Процесс продолжаем до сходимости, после чего изменяем время, т.е. потенциалы на электродах, и повторяем все для нового момента времени. Процесс решения нестационарного УШ рассмотрен в работе [6]. Поскольку оно релятивистски нековариантное, изменение волновой функции в некоторой области

приводит к распространению этого возмущения в следующий бесконечно малый момент времени на всю бесконечную область, что соответствует неограниченной скорости распространения возмущений. Однако на большом удалении эти возмущения бесконечно малы, поскольку пропагаторная Функция Грина (ФГ) похожа на функцию Гаусса. Уравнения в [6] имеют тип Липпмана–Швингера и требуют построения полной ФГ. Такую ФГ в области $0 < x < d$ нетрудно построить при задании потоков частиц слева и справа. Тогда основная задача состоит в определении волн, расходящихся от структуры. Приведенные выше уравнения (16)–(24), по сути, есть уравнения возбуждения резонатора Фабри–Перро. Они релятивистски ковариантные. Использовать их совместно с уравнением Дирака не имеет смысла, поскольку при рассмотренных напряжениях поток не релятивистский, и скорости невелики. Учет спина привел бы к необходимости многочастичного рассмотрения, а необходимость введения только вектор-потенциала усложняет описание барьеров.

5. Эффекты, связанные с большой плотностью тока

Экспериментально на простых структурах катод–анод показана возможность получения плотностей до 10^{15} А/м² [17], т.е. практически до предельных. При достижении предельных токов имеется ряд негативных эффектов. Туннельный ток протекает через структуру и замыкается с анода через источник питания на катод. Мы считаем, что сеточный ток отсутствует. В подавляющем большинстве работ по полевой эмиссии из металлов электроны в последних рассматриваются как свободные с дисперсией $E = p^2/(2m_e)$. Это связано с весьма широкой зоной проводимости порядка $E_F + W_0$, что обычно больше 10 эВ, при этом электрон, ускоряющийся от уровня Ферми, может приобретать энергию до нескольких эВ без существенного искажения дисперсии. Внутреннее поле, ускоряющее электрон, есть $E_J = J/\sigma$. Подставляя проводимость меди, получаем при $J = 10^{13}$ А/м² значение $E_J = 1.75 \cdot 10^6$ В/м, что при длине свободного пробега 40 нм приведет к приобретенной энергии 0.07 эВ. Поэтому эффекты, связанные с непараболичностью дисперсии, т.е. со сложным законом дисперсии и структурой поверхности Ферми, можно не учитывать. Таким образом, основной эффект сильного тока состоит в изменении конфигурации потенциалов, которое может быть скорректировано увеличением потенциалов на электродах. Эффекты изменения потенциалов были рассмотрены, например, в работах [35,36].

Самый негативный эффект при резонансном туннелировании — это разогрев катода из-за эффекта Ноттингама и из-за джоулева тепла. Первый — весьма сильный, поскольку области прозрачности могут быть существенно ниже уровня Ферми. Кроме того, он почти поверхностный, поскольку тепло выделяется примерно

на границе катод–вакуум на длине свободного пробега. Длина свободного пробега связана с релаксацией импульса, а выделение тепла за счет перехода электрона с уровня Ферми на образованную из-за туннелирования дырку происходит на длине свободного пробега по энергиям, который может достигать 100 nm. Возможное решение этой проблемы — низкие и сверхнизкие температуры, а также сверхчистые материалы катода. В этом случае длина свободного пробега возрастает на порядки, т.е. эффект становится объемным, но он есть даже при сверхнизких температурах. Кроме того, возрастание длины свободного пробега позволяет делать более протяженные многоэлектродные структуры. Наноразмерную структуру вполне можно считать плоской, если ее поперечные размеры на 2–3 порядка больше. Такую структуру целесообразно располагать на массивной металлической основе с еще большими поперечными размерами — термостате. Для эмиссионной электроники важны стабильные источники. Термостабильный режим для заданного тока вполне можно рассчитать, подбирая длину и разность температур поверхности катода и термостата.

Заключение

Таким образом, в работе показана возможность достижения при средних электрических полях порядка нескольких V/nm в одноямных и двухъямных резонансно- туннельных структурах плотностей тока на 1–2 порядка превышающих достижимые в существенно более сильных полях. Предложены конкретные триодные наноструктуры полевой эмиссионной электроники, в которых реализуются указанные профили квантового потенциала и эмиссионные токи. Работа структур основана на возникновении метастабильных уровней в области энергий ниже энергии Ферми на катоде, а их создание требует использования нанотехнологий для выполнения электродов катода, сеток и анода на расстояниях порядка 10 nm. Более перспективны двухъямные структуры со двоямой сеткой. Использование сеток в микроструктурных эмиттерах является решенной задачей даже для неплоских структур [37]. В плоских наноструктурных эмиттерах на сетках должен обеспечиваться постоянный потенциал, а сама сетка быть весьма прочной. Перспективными материалами для сеток могут являться многослойный графен и структуры типа поленицы из углеродных нанотрубок с металлическим типом проводимости. Такие структуры можно крепить лазерной сваркой. Они весьма прочные и обладают высокой теплопроводностью. При размере сеток в несколько nm рассеянием электронов можно пренебречь.

Благодарности

Автор выражает благодарность О.Е. Глуховой и Р.К. Яфарову за обсуждение ряда вопросов.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-19-00226.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] К.С. Гришаков, В.Ф. Елесин. ФТП, **50** (8), 1113 (2016). [K.S. Grishakov, V.F. Elesin. Semiconductors, **50** (8), 1092 (2016). DOI: 10.1134/S1063782616080121]
- [2] В.Ф. Елесин. ЖЭТФ, **145** (6), 1078 (2014). [V.F. Elesin. JETP, **118** (6), 951 (2014). DOI: 10.1134/S1063776114060041]
- [3] В.Ф. Елесин, Б.В. Копаев. ЖЭТФ, **123** (6), 1308 (2003). [V.F. Elesin, B.V. Kopaev. JETP, **96** (6), 1149 (2003). DOI: 10.1134/1.1591227]
- [4] В.Ф. Елесин, И.Ю. Катеев, М.А. Ремнев. ФТП, **43** (2), 269 (2009). [V.F. Elesin, I.Yu. Kateev, M.A. Remnev. Semiconductors, **43**, 257 (2009). DOI: 10.1134/S1063782609020250]
- [5] В.Ф. Елесин, И.Ю. Катеев. ФТП, **39** (9), 1106 (2005). [V.F. Elesin, I.Yu. Kateev. Semiconductors, **39** (9), 1071 (2005). DOI: 10.1134/1.2042601]
- [6] М.В. Давидович. Письма в ЖЭТФ, **110** (6), 414 (2019). DOI: 10.1134/S0370274X19190068 [M.V. Davidovich. JETP Lett., **110** (7), 472 (2019). DOI: 10.1134/S0021364019190068]
- [7] Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнев, Д.В. Соколов. *Лекции по сверхвысокочастотной вакуумной микроэлектронике* (ГосУНЦ „Колледж“, Саратов, 1996)
- [8] C. Bower, D. Shalóm, W. Zhu, D.I. López, G.P. Kochanski, P.L. Gammel, S. Jin. IEEE Trans. ED, **49** (8), 1478 (2002). DOI: 10.1109/TED.2002.801247
- [9] R. Riccitelli, F. Brunetti, C. Paoloni, G. Ulisse, A. Di Carlo, V. Krozer. *IEEE International Vacuum Electronics Conference* (Monterey, IEEE Publisher, USA, 2008), с. 382–383. DOI: 10.1109/IVELEC.2008.4556544
- [10] J.W. Gadzuk. Surf. Sci., **15**, 466 (1969). DOI: 10.1016/0039-6028(69)90135-6
- [11] М.Б. Партенский. УФН, **128** (5), 69 (1979). DOI: 10.3367/UFNr.0128.197905c.0069 [M.B. Partenskii. Sov. Phys. Usp., **22**, 330 (1979). DOI: 10.1070/PU1979v022n05ABEH005498]
- [12] C. Berthod, T. Giamarchi. Phys. Rev. B, **84**, 155414 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevB.84.155414
- [13] T.N. Todorov, G.A.D. Briggs, A.P. Sutton. J. Phys. Condens. Matter, **5**, 2389 (1993).
- [14] W. Wang, Z. Lia. J. Appl. Phys., **109** (11), 114308 (2011). DOI: 10.1063/1.3587186
- [15] Д.И. Проскуровский. *Эмиссионная электроника* (Изд-во ТГУ, Томск, 2010)
- [16] G.N. Fursey. *Field Emission in Vacuum Micro-Electronics* (Kluwer Academic Plenum Publishers, Springer, NY., 2005)
- [17] Г.Н. Фуросей. *Автоэлектронная эмиссия* (Лань, СПб, 2012)
- [18] А.С. Давыдов. *Квантовая механика* (Наука, М., 1973)

- [19] Е.А. Нелин. УФН, **177** (3), 309 (2007). DOI: 10.3367/UFNr.0177.200703d.0307 [E.A. Nelin. Phys. Usp., **50**, 293 (2007). DOI: 10.1070/PU2007v050n03ABEH006091]
- [20] J.G. Simmons. J. Appl. Phys., **34**(6), 1793 (1963). DOI: 10.1063/1.1702682
- [21] М.В. Давидович, Р.К. Яфаров. ЖТФ, **88** (2), 283 (2018). DOI: 10.21883/JTF.2018.02.45422.2375 [M.V. Davidovich, R.K. Yafarov. Tech. Phys., **63** (2), 274. DOI: 10.1134/S106378421802010X]
- [22] М.В. Давидович, Р.К. Яфаров. ЖТФ, **89** (8), 1282 (2019). DOI: 10.21883/JTF.2019.08.47905.402-18 [M.V. Davidovich, R.K. Yafarov. Tech. Phys., **64** (8), 1210. DOI: 10.1134/S106378421908005X]
- [23] М.В. Давидович. ЖЭТФ, **157** (1), 44 (2020). [M.V. Davidovich. J. Exp. Theor. Phys., **130**, 35 (2020). DOI: 10.1134/S1063776119120161]
- [24] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (ГИФМЛ, М., 1963)
- [25] М.В. Давидович. Квант. электрон., **47** (6), 567 (2017). [M.V. Davidovich. Quant. Electron., **47** (6), 567 (2017). DOI: 10.1070/QEL16272]
- [26] M.V. Davidovich, I.S. Nefedov, O.E. Glukhova, M.M. Slepchenkov. J. Appl. Phys., **130**, 204301 (2021). DOI: 10.1063/5.0067763
- [27] T.E. Stern, B.S. Gossling, R.H. Fowler. Proc. R. Soc. Lond., A **124**, 699 (1929). DOI: 10.1098/rspa.1929.0147
- [28] J. Bardeen. Phys. Rev., **49** (9), 656 (1936). DOI: 10.1103/PhysRev.49.653
- [29] T.L. Juretschke, Phys. Rev., **93** (5), 1140 (1953). DOI: 10.1103/PhysRev.92.1140
- [30] Г.Ф. Васильев. Радиотехника и электроника, **5** (11), 1857 (1960).
- [31] T.L. Loucks, P.H. Catler. J. Phys. Chem. Sol., **25** (1), 105 (1964). DOI: 10.1016/0022-3697(64)90166-0
- [32] P.H. Cutler, J.J. Gibbons. Phys. Rev., **111** (2), 394 (1958). DOI: 10.1103/PhysRev.111.394
- [33] G.G. Belford, A. Kuppermann, T.E. Phipps. Phys. Rev., **128** (2), 524 (1962). DOI: 10.1103/PhysRev.128.524
- [34] А.И. Базь, Я.Б. Зельдович, А.М. Переломов. *Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (Наука, М., 1971)
- [35] Ф.И. Ицкович. ЖЭТФ, **50** (5), 1425 (1966). [F.I. Itskovich. ZETF, **50** (5), 1425 (1966).]
- [36] Ф.И. Ицкович. ЖЭТФ, **52** (6), 1720 (1967). [F.I. Itskovich. ZETF **52** (6), 1720 (1967).]
- [37] N.S. Xua, S. Ejaz Huq. Mater. Sci. Engineer. R Reports, **48** (2), 47 (2005). DOI: 10.1016/j.mser.2004.12.001