

Некоторые особенности решения уравнений гидродинамики для уединенных волн в открытом водном канале

© А.Н. Волобуев

Самарский государственный медицинский университет,
443086 Самара, Россия
e-mail: volobuev47@yandex.ru

Поступило в Редакцию 15 марта 2022 г.

В окончательной редакции 13 мая 2022 г.

Принято к публикации 18 мая 2022 г.

Рассмотрена возможность использования особой формы уравнения импульса для решения задачи возникновения уединенных волн (солитонов) в открытом водном канале. Показано, что используемое уравнение импульса позволяет учесть роль сил поверхностного натяжения и гравитационных сил в формировании волн. С использованием разложения уравнения неразрывности по методу Рэлея получена система дифференциальных уравнений, одно из которых является нелинейным. Рассмотрено применение метода Даламбера бегущих волн для решения нелинейного дифференциального уравнения в гидродинамической задаче распространения уединенных волн в открытом водном канале. Показано, что в отличие от теории Даламбера для линейных гиперболических уравнений, где начальные условия полностью определяют форму возникающих волн, для нелинейных уравнений форма волн определяется характером нелинейности уравнений. При этом в процессе решения сумма функций, описывающих линейные волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, в методе Даламбера для нелинейных волн заменяется суммой нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: солитон, открытый водный канал, поверхностное натяжение, силы гравитации, нелинейное дифференциальное уравнение, метод Даламбера.

DOI: 10.21883/JTF.2022.09.52920.56-22

Введение

Со времен первого наблюдения уединенных волн в водном канале Д.С. Расселом в 1834 г., который на лошади сопровождал уединенную волну, в теории описания таких волн возникло множество различных подходов [1–3], в том числе для различных внешних условий [4–6]. Например, моделирование уединенных волн или солитонов в [1] позволило описать волны, распространяющиеся как слева направо, так и справа налево. Однако если волна распространяется слева направо, то абсолютно справедливо, что ее описание следует из динамического уравнения импульса, но если волна распространяется справа налево ее описание в [1] следует из кинематического уравнения неразрывности, что вызывает вопросы. Дело в том, что подъем жидкости в уединенной волне определяется гидростатическим давлением в основании уединенной волны. В уравнении неразрывности нет никакого силового параметра, поэтому это уравнение с физической точки зрения не может описать уединенную волну. По нашему мнению, обе противоположно распространяющиеся волны должны появляться исходя из уравнения импульса. Это возможно, если более корректно записать исходное уравнение импульса.

Исследуемые уединенные волны носят название солитонов, так как их взаимодействие напоминает взаимодействие частиц. Они могут отражаться от твердой границы подобно частицам. При взаимодействии друг с

другом солитоны расходятся, сохраняя неизменной свою структуру. Такое сохранение структуры определяется балансом нелинейных эффектов и дисперсии на переднем и заднем фронтах солитонов.

Вывод уравнения для солитона на поверхности водного канала постоянной глубины, так называемого уравнения Кортевега–де Фриза, обычно начинается с анализа линейных волн на воде [3]. Полученное трансцендентное дисперсионное соотношение заменяется на полиномиальное третьего порядка, которое совместно с уравнениями гидродинамики приводит к уравнению Кортевега–де Фриза.

В настоящей работе используется несколько иной вывод солитонных уравнений на основе асимптотического анализа исходной системы уравнений гидродинамики.

1. Роль сил поверхностного натяжения и сил гравитации в возникновении волн на водной поверхности канала

При решении задач гидродинамики идеальной жидкости с открытыми или упругими границами часто более корректно использовать уравнение импульса в виде [7,8]:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial X} + W \frac{\partial W}{\partial X} = -\frac{\partial(PS)}{\rho S \partial X}, \quad (1)$$

где ρ — плотность жидкости, V и W — продольная и поперечная (вертикальная) составляющие скорости

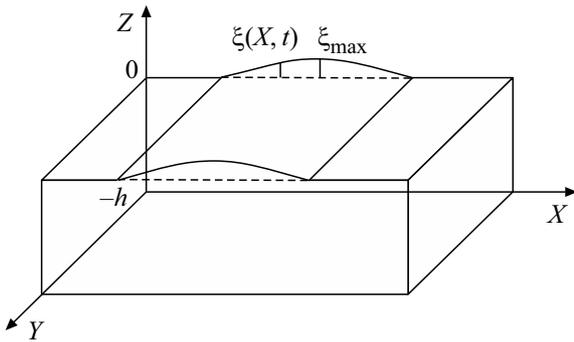


Рис. 1. Формирование уединенной волны (солитона) в водном канале.

жидкости, X — продольная координата, t — время, S — поперечное сечение потока. Давление в жидкости P .

В частности, будем рассматривать течение жидкости в открытом водном канале (рис. 1).

Изменение параметров потока наблюдается только по осям X и Z . Течение жидкости по оси Y отсутствует. Примем, что ширина канала вдоль оси Y равна единице.

Принято также, что вихрей в потоке не образуется, течение потенциальное [9], т. е. $\text{rot } \mathbf{V} = 0$, где \mathbf{V} — вектор скорости, следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\partial W}{\partial X}.$$

1.1. Поверхностное натяжение жидкости в уединенной волне

Преобразуем уравнение (1) к виду

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial X} + \rho W \frac{\partial W}{\partial X} = -\frac{\partial(P S)}{S \partial X} = -\frac{\partial P}{\partial X} - P \frac{\partial X}{S \partial X}. \quad (2)$$

Предположим, что на поверхности жидкости возникает уединенная волна, основную роль в которой играют силы поверхностного натяжения и силы гравитации.

Рассмотрим сначала роль сил поверхностного натяжения.

Равновесие избыточного давления в жидкости под поверхностью и сил поверхностного натяжения подчиняется закону

$$(P - P_0) l d = 2(\sigma - \sigma_0) \delta l, \quad (3)$$

где l — длина участка волны вдоль оси Y , σ — механические напряжения за счет сил поверхностного натяжения в верхнем слое жидкости толщиной δ , σ_0 — механические напряжения в верхнем слое жидкости при атмосферном давлении P_0 .

Следовательно, избыточное давление под поверхностью жидкости равно

$$P - P_0 = \frac{2(\sigma - \sigma_0) \delta}{d}.$$

Полученное соотношение носит название формулы Лапласа. Однако формула Лапласа принципиально неточная. Термодинамический анализ показывает, что более точная формула [10]:

$$\ln \frac{P}{P_0} = \frac{2(\sigma - \sigma_0) \delta}{D d}, \quad (4)$$

где величина D характеризует не только взаимодействие молекул, приводящих к эффекту поверхностного натяжения в жидкости, но и зависит от геометрии волны и толщины поверхностного слоя.

Разлагая экспоненту в (4) в ряд, получаем

$$P - P_0 = P_0 \frac{2(\sigma - \sigma_0) \delta}{D d} + \frac{1}{2} P_0 \left(\frac{2(\sigma - \sigma_0) \delta}{D d} \right)^2. \quad (5)$$

Из первого слагаемого в правой части, как первого приближения (формула Лапласа), следует $P_0 = D$.

Небольшая сжимаемость жидкости, как и твердого тела, подчиняется закону Гука

$$P - P_0 = -E \frac{\Delta V}{V_0}, \quad (6)$$

где ΔV — изменение объема жидкости, V_0 — первоначальный объем, E — модуль объемной упругости жидкости (для воды $E = 2 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$). Знак минус, так как увеличение давления $P - P_0 > 0$, приводит к уменьшению объема жидкости, $\Delta V < 0$ [11].

Учитывая (6), используем закон Гука для связи изменения давления под поверхностью жидкости в волне и увеличения площади потока в волне (рис. 2) в виде аналогичном уравнению для упругого трубопровода [12]

$$\partial P = -D \frac{\partial S}{S}, \quad (7)$$

где величина $D = E \frac{\delta}{d}$.

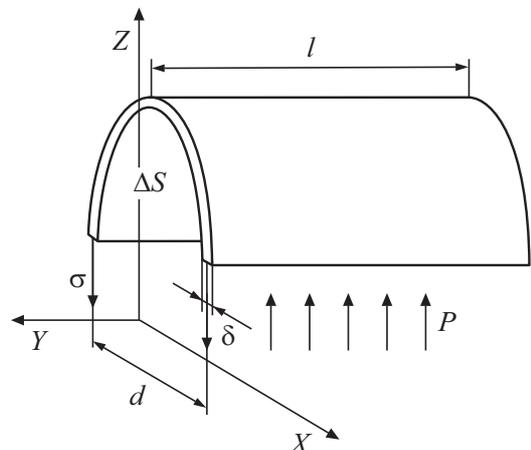


Рис. 2. Участок поверхностного слоя уединенной волны в канале.

В этом случае уравнение (2) преобразуется к виду

$$\rho \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{\rho W^2}{2} + P - \frac{P^2}{2D} \right) = 0. \quad (8)$$

Если течение жидкости стационарное, т.е. $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$, то уравнение (8) можно проинтегрировать

$$\frac{\rho V^2}{2} + \frac{\rho W^2}{2} + P - \frac{P^2}{2D} = \text{const}. \quad (9)$$

Проанализируем более подробно причину возникновения последнего слагаемого в (9). Покажем, что оно является следствием закона Гука в форме (7), который для удобства преобразований запишем в виде

$$P - P_0 = D \frac{\Delta S}{S},$$

где использован знак плюс, так как с увеличением давления P растет и площадь ΔS .

Учитывая закон Гука в виде

$$\sigma - \sigma_0 = E\varepsilon = \frac{E\Delta d}{d},$$

где $\varepsilon = \frac{\Delta d}{d}$ — относительная деформация длины основания волны d (рис. 2), форму которой приблизительно считаем круговой, получаем уравнение (5) в виде

$$P - P_0 = \frac{2E\Delta d\delta}{d^2} + \frac{1}{2D} \left(\frac{2E\Delta d\delta}{d^2} \right)^2. \quad (10)$$

Найдем связь между относительным изменением площади потока в волне $\frac{\Delta S}{S}$ и относительным изменением длины основания волны $\frac{\Delta d}{d}$. Учитывая связь между площадью сечения и диаметром круга $S = \frac{\pi d^2}{4}$, находим производную

$$\frac{dS}{d(d)} \approx \frac{\Delta S}{\Delta d} = \frac{\pi d}{2},$$

следовательно,

$$\frac{\Delta S}{S} = 2 \frac{\Delta d}{d}.$$

Поэтому для давления, избыточного над P_0 , получаем

$$P - P_0 = \frac{E\delta}{d} \frac{\Delta S}{S} + \frac{1}{2D} \left(\frac{E\delta}{d} \frac{\Delta S}{S} \right)^2 = D \frac{\Delta S}{S} + \frac{1}{2D} \left(D \frac{\Delta S}{S} \right)^2 = D \frac{\Delta S}{S} + \frac{(P - P_0)^2}{2D} \quad (11)$$

или

$$P - P_0 - \frac{(P - P_0)^2}{2D} = D \frac{\Delta S}{S}.$$

Полученный результат (при $P_0 = 0$) показывает, что если использовать закон Гука в виде (7), то более правильно вместо давления P использовать величину $P - \frac{P^2}{2D}$, как это принято в формуле (9).

Следовательно, корректность формулы (1) для описания волны в канале, возникающей за счет сил поверхностного натяжения, доказана.

1.2. Силы гравитации в уединенной волне

Рассмотрим роль гравитационных сил в образовании волны.

Уравнение импульса запишем в традиционном виде [3] с использованием раздельной записи сил давления и гравитационных сил

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - g\mathbf{j}, \quad (12)$$

где g — ускорение свободного падения, \mathbf{j} — единичный вектор, направленный вниз вдоль оси Z .

Исследуем соотношение между уравнениями (1) и (12). Последнее слагаемое в левой части (1), в частности на дне канала, можно преобразовать

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho S} \frac{\partial PS}{\partial X} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{P}{\rho S} \frac{\partial S}{\partial X} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{P}{\rho(h + \xi)} \frac{\partial(h + \xi)}{\partial X} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\rho g(h + \xi)}{\rho(h + \xi)} \frac{\partial(h + \xi)}{\partial X} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + g \frac{\partial(h + \xi)}{\partial X}. \end{aligned} \quad (13)$$

В (13) использована формула для поперечного сечения потока жидкости в канале $S = h + \xi$ (ширина канала принята равной единице), где h — глубина канала при невозмущенной поверхности воды в канале, ξ — текущая высота уединенной волны над невозмущенной поверхностью воды (рис. 1). Предполагается, что течение инерционное и давление на дне канала с учетом нулевого значения на поверхности $P = \rho g(h + \xi)$. Давление в рассматриваемой задаче носит гравитационный характер.

Заменяя реальный ход кривой $\xi(X)$ двумя прямолинейными участками с модулем коэффициентов наклона j по формуле $h + \xi \approx h \pm |j|X$, приходим к виду правой части уравнения (12) в его алгебраической форме.

Таким образом, уравнение импульса в форме (1) может описывать возникновение волн на поверхности канала как за счет сил поверхностного натяжения, так и за счет гравитационных сил.

2. Вывод системы дифференциальных уравнений для волн в открытом канале

При дальнейшем анализе частично будем следовать [1].

Можно предположить, что при возникновении возмущения в каком-либо месте канала возникнут две нелинейные волны, распространяющиеся в противоположных направлениях от места возмущения, так называемые солитоны Кортевега и де Фриза [1–3].

Найдем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют сразу обе разнонаправленные волны. До сих пор известное уравнение Кортевега и де Фриза (в рамках односолитонного решения) описывает только

уединенную волну, распространяющуюся слева направо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} = 0, \tag{14}$$

где $u(X, t)$ — скорость жидкости в волне.

Первичную систему уравнений гидродинамики запишем в виде уравнения импульса и уравнения неразрывности. С физической точки зрения, для простоты основным эффектом при возникновении волн будем считать силы гравитации.

Уравнение импульса используем в виде (1).

Уравнение неразрывности используем в виде

$$\nabla^2 \varphi = 0, \tag{15}$$

где φ — в данном случае потенциал скорости, связанный с компонентами скорости формулами

$$V = \frac{\partial \varphi}{\partial X} \quad \text{и} \quad W = \frac{\partial \varphi}{\partial Z}.$$

2.1. Разложение потенциала скорости в ряд

Метод разложения потенциала в ряд по малому параметру впервые был предложен Рэлеем [13].

Для удобства дальнейших преобразований используем безразмерные переменные. С этой целью введем масштабы параметров уравнений (1) и (15):

$$X = M_X X^*, \quad Z = M_Z Z^*, \quad \xi = M_\xi \xi^*, \quad P = M_P P^*,$$

$$\varphi = M_\varphi \varphi^*, \quad t = M_t t^*, \quad V = M_V V^*, \quad W = M_W W^*, \tag{16}$$

где M_i — масштабы величин, а сами безразмерные величины отмечены звездочками.

Для записи конкретных значений масштабов величин и, учитывая относительно малое значение амплитуды уединенной волны ξ_{\max} относительно глубины канала h , введем малый параметр $\varepsilon = \frac{\xi_{\max}}{h} \ll 1$.

Первоначально нам понадобятся только выражения для некоторых масштабов. Примем

$$M_\xi = \varepsilon h = \xi_{\max}, \quad M_X = \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad M_Z = h, \quad M_P = \varepsilon \rho g h. \tag{17}$$

Преобразуем уравнение неразрывности (4) в безразмерную форму.

Используя

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2},$$

запишем

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial X^{*2}} \frac{M_\varphi}{(h/\sqrt{\varepsilon})^2} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial Z^{*2}} \frac{M_\varphi}{h^2} = 0,$$

следовательно:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial Z^{*2}} = 0. \tag{18}$$

Разложим потенциал скорости в ряд

$$\varphi^* = \sum_{n=0}^{\infty} (Z^* + 1)^n \varphi_n^*(X^*, t^*), \tag{19}$$

где $\varphi_n^*(X^*, t^*)$ — безразмерная функция, зависящая только от безразмерной продольной координаты X^* и безразмерного времени t^* .

Подставим разложение потенциала (19) в безразмерное уравнение неразрывности в виде (18):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\varepsilon (Z^* + 1)^n \frac{\partial^2 \varphi_n^*}{\partial X^{*2}} + n(n-1)(Z^* + 1)^{n-2} \varphi_n^* \right) = 0. \tag{20}$$

Приравняем коэффициенты при $(Z^* + 1)^n$ к нулю, для чего во втором слагаемом в скобках заменяем n на $n + 2$. В результате найдем рекуррентную формулу

$$\varphi_{n+2}^* = - \frac{\varepsilon}{(n+1)(n+2)} \frac{\partial^2 \varphi_n^*}{\partial X^{*2}}. \tag{21}$$

Таким образом, разложение потенциала (19) с учетом (21) запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi^* = & \varphi_0^* + (Z^* + 1)\varphi_1^* - \frac{\varepsilon}{2!}(Z^* + 1)^2 \frac{\partial^2 \varphi_0^*}{\partial X^{*2}} \\ & - \frac{\varepsilon}{3!}(Z^* + 1)^3 \frac{\partial^2 \varphi_1^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\varepsilon^2}{4!}(Z^* + 1)^4 \frac{\partial^4 \varphi_0^*}{\partial X^{*4}} \\ & + \frac{\varepsilon^2}{5!}(Z^* + 1)^5 \frac{\partial^4 \varphi_1^*}{\partial X^{*4}} - \dots, \end{aligned} \tag{22}$$

где φ_0^* — безразмерный потенциал скорости на дне канала при $Z^* = -1$.

На дне канала при $Z^* = -1$ вертикальная скорость жидкости $W = \frac{\partial \varphi}{\partial Z} = 0$. Следовательно, исходя из (22), $(\frac{\partial \varphi^*}{\partial Z^*}) = \varphi_1^* = 0$. Поэтому, согласно рекуррентной формуле (21), $\varphi_{2n+1}^* = 0$. Но $\varphi_n^*(X^*, t^*) \neq f(Z^*)$, поэтому $\varphi_{2n+1}^* = 0$ при любом Z^* , а не только при $Z^* = -1$.

Следовательно, разложение (22) можно переписать в виде

$$\varphi^* = \varphi_0^* - \frac{\varepsilon}{2!}(Z^* + 1)^2 \frac{\partial^2 \varphi_0^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\varepsilon^2}{4!}(Z^* + 1)^4 \frac{\partial^4 \varphi_0^*}{\partial X^{*4}} - \dots \tag{23}$$

На поверхности воды вне уединенной волны $Z^* = 0$, следовательно:

$$\varphi^* = \varphi_0^* - \frac{\varepsilon}{2!} \frac{\partial^2 \varphi_0^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\varepsilon^2}{4!} \frac{\partial^4 \varphi_0^*}{\partial X^{*4}} - \frac{\varepsilon^3}{6!} \frac{\partial^6 \varphi_0^*}{\partial X^{*6}} + \dots \tag{24}$$

Учитывая небольшую амплитуду уединенной волны, формулу (24) можно использовать и на поверхности уединенной волны.

2.2. Получение системы дифференциальных уравнений

Уравнение импульса (1) можно преобразовать, используя формулу для поперечного сечения потока жидкости в канале $S = h + \xi = h(1 + \varepsilon \xi^*)$ (ширина канала

принята равной единице):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial X} + W \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{1}{\rho(1 + \varepsilon\xi^*)} \frac{\partial P(1 + \varepsilon\xi^*)}{\partial X} = 0. \tag{25}$$

Переходя в (25) к безразмерным переменным с использованием масштабов (16), (17),

$$M_V = \frac{M_\varphi}{M_X}, \quad M_W = \frac{M_\varphi}{M_Z}$$

и komponyя масштабы, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \varepsilon V^* \frac{M_\varphi M_t}{M_Z^2} \frac{\partial V^*}{\partial X^*} + W^* \frac{M_\varphi M_t}{M_Z^2} \frac{\partial W^*}{M_Z \partial X^*} \\ = - \frac{1}{\rho(1 + \varepsilon\xi^*)} \frac{M_P M_t \partial P^*(1 + \varepsilon\xi^*)}{M_\varphi \partial X^*}. \end{aligned} \tag{26}$$

Примем соотношение масштабов, не противоречащее (17), в виде

$$\frac{M_\varphi M_t}{M_Z^2} = \frac{M_P M_t}{\rho M_\varphi} = 1. \tag{27}$$

В результате получим безразмерное уравнение импульса

$$\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \varepsilon V^* \frac{\partial V^*}{\partial X^*} + W^* \frac{\partial W^*}{\partial X^*} = - \frac{1}{(1 + \varepsilon\xi^*)} \frac{\partial P^*(1 + \varepsilon\xi^*)}{\partial X^*}. \tag{28}$$

В дальнейшем в уравнениях будем отбрасывать все малые слагаемые, пропорциональные ε^2 и более высоким степеням ε .

Рассмотрим сумму

$$\varepsilon V^{*2} + W^{*2} = \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial X^*} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial Z^*} \right)^2 = \varepsilon \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial X^*} \right)^2,$$

так как, согласно (12):

$$\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial Z^*} \right)^2 \sim \varepsilon^2.$$

Поэтому уравнение (28) можно переписать в виде

$$(1 + \varepsilon\xi^*) \left(\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \varepsilon V^* \frac{\partial V^*}{\partial X^*} \right) + \frac{\partial P^*}{\partial X^*} + \varepsilon \frac{\partial P^* \xi^*}{\partial X^*} = O(\varepsilon^2). \tag{29}$$

Предполагаем, что уединенные волны на поверхности воды определяются только гравитационными силами. В этом случае давление на уровне невозмущенной жидкости при $Z = 0$ равно $P = \rho g \xi$. В безразмерной форме это соотношение имеет вид $P^* = \xi^*$. Подставляя его в (29), находим

$$\frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \varepsilon V^* \frac{\partial V^*}{\partial X^*} + \varepsilon \xi^* \frac{\partial V^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \xi^*}{\partial X^*} + \varepsilon \frac{\partial \xi^{*2}}{\partial X^*} = O(\varepsilon^2). \tag{30}$$

Далее используем разложение (24) в виде

$$\varphi^* = \varphi_0^* - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0^*}{\partial X^{*2}} + O(\varepsilon^2). \tag{31}$$

Перейдем в (31) к безразмерной продольной скорости на уровне дна канала $V_0 = \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial X^*}$ (звездочку в данном случае не используем)

$$V^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial X^*} = V_0 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial X^{*2}} + O(\varepsilon^2). \tag{32}$$

Изменение продольной скорости по высоте жидкости в канале можно, согласно (23), найти по формуле

$$V^* = \frac{\partial \varphi^*}{\partial X^*} = V_0 - \frac{\varepsilon}{2} (Z^* + 1)^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial X^{*2}} + O(\varepsilon^2). \tag{33}$$

В дальнейшем в уравнениях используем безразмерную скорость жидкости на уровне дна канала V_0 .

Подставляя (32) в (30) и перекомпоновывая слагаемые как сумму главного и первого порядка по малому параметру ε , найдем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V_0}{\partial t^*} + \frac{\partial \xi^*}{\partial X^*} \right) + \varepsilon \left(\xi^* \frac{\partial V_0}{\partial t^*} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial X^*} + \frac{\partial \xi^{*2}}{\partial X^*} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V_0}{\partial t^* \partial X^{*2}} \right) = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{34}$$

Первое линейное слагаемое в главном порядке (34) определяется скоростью движения жидкости (ее ускорением), второе слагаемое определяется быстротой изменения фронтов уединенной волны. В связи с большим различием скоростей движения жидкости и распространения уединенной волны, в главном порядке для анализа введем так называемое „медленное время“ $\tau = \frac{\varepsilon}{2} t^*$. Делая замену в главном порядке (34)

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} [1],$$

запишем (34) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi^*}{\partial X^*} \right) + \varepsilon \left(\frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + \xi^* \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial X^*} + \frac{\partial \xi^{*2}}{\partial X^*} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau \partial X^{*2}} \right) = O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{35}$$

Далее покажем, что записанное с точностью до малого параметра ε нелинейное дифференциальное уравнение во второй скобке (35):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + \xi^* \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + V_0 \frac{\partial V_0}{\partial X^*} + \frac{\partial \xi^{*2}}{\partial X^*} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau \partial X^{*2}} = 0 \tag{36}$$

может быть решено методом Даламбера. При этом решение будет удовлетворять линейному уравнению, полученному в первой скобке (35):

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau} + \frac{\partial \xi^*}{\partial X^*} = 0. \tag{37}$$

3. Решение нелинейного дифференциального уравнения методом Даламбера

Решение системы уравнений (36) и (37) будем искать, вводя новые аргументы:

$$r = X^* - t^*, \quad l = X^* + t^*. \quad (38)$$

Относительно этих аргументов функции в системе уравнений (36) и (37) ищем с помощью введения вспомогательных функций $f(r, \tau)$ и $g(l, \tau)$:

$$\xi^* = \beta[f(r, \tau) + g(l, \tau)], \quad V_0 = \beta[f(r, \tau) - g(l, \tau)], \quad (39)$$

где постоянный коэффициент β определим позже.

В новых переменных линейное уравнение (37) тождественно выполняется

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial t^*} + \frac{\partial \xi^*}{\partial X^*} &= \beta \frac{\partial(f-g)}{\partial t^*} + \beta \frac{\partial(f+g)}{\partial X^*} \\ &= \beta \left(\frac{\partial f}{\partial t^*} + \frac{\partial f}{\partial X^*} - \frac{\partial g}{\partial t^*} + \frac{\partial g}{\partial X^*} \right) \\ &= \beta \left(\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t^*} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial X^*} - \frac{\partial g}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t^*} + \frac{\partial g}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial X^*} \right) \\ &= \beta \left(-\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial g}{\partial l} + \frac{\partial g}{\partial l} \right) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Подставим (39) в уравнение (36):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\beta \frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\beta \frac{\partial g}{\partial \tau} - \beta^2(f+g) \frac{\partial f}{\partial r} - \beta^2(f+g) \frac{\partial g}{\partial l} \\ + \beta^2(f-g) \frac{\partial f}{\partial r} - \beta^2(f-g) \frac{\partial g}{\partial l} + 2\beta^2(f+g) \frac{\partial f}{\partial r} \\ + 2\beta^2(f+g) \frac{\partial g}{\partial l} + \frac{1}{2}\beta \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} + \frac{1}{2}\beta \frac{\partial^3 g}{\partial l^3} = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Проводя простые преобразования, найдем

$$\frac{1}{2}\beta \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{\partial g}{\partial \tau} + 4\beta f \frac{\partial f}{\partial r} + 4\beta g \frac{\partial g}{\partial l} + \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 g}{\partial l^3} \right) = 0. \quad (42)$$

Соотношение (42) можно считать уравнением для функций f и g . Для того чтобы это уравнение представляло собой сумму двух стандартных уравнений Кортевега и де Фриза [1], выберем $\beta = \frac{3}{2}$:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \tau} + 6f \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \right) + \left(-\frac{\partial g}{\partial \tau} + 6g \frac{\partial g}{\partial l} + \frac{\partial^3 g}{\partial l^3} \right) = 0. \quad (43)$$

Уравнение (43) описывает две уединенные волны Кортевега и де Фриза для вспомогательных функций f и g . Первая скобка описывает волну, распространяющуюся слева направо, вторая скобка — волну справа налево. Таким образом, эти волны распространяются в противоположных направлениях, постепенно удаляясь друг от друга, что характерно для формулы Даламбера [14].

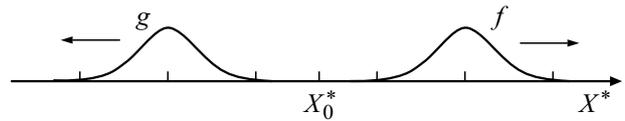


Рис. 3. Возникновение двух противоположно направленных волн в водном канале.

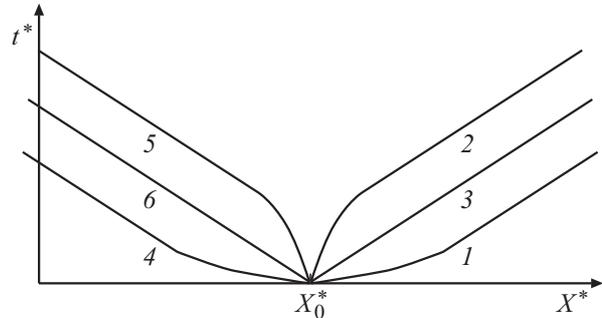


Рис. 4. Характеристики двух противоположно направленных волн в водном канале.

Теория Даламбера относится к линейным гиперболическим уравнениям. Один из основных выводов этой теории состоит в том, что начальные условия полностью определяют форму возникающих волн [14]. Для нелинейных уравнений (43) это не справедливо, так как форма волн-солитонов неизменна и определяется характером нелинейности уравнений.

Предположим, что исходно волны возникают за счет линейного по оси Y возмущения (рис. 2) на поверхности воды в виде $\delta(X_0^*)$ — функции Дирака в плоскости XZ .

Характеристиками волны f после установления форм волн служат прямые $X^* - c^* t^* = \text{const}$, а волны g — прямые $X^* + c^* t^* = \text{const}$, где c^* — безразмерная скорость волн. Однако оба семейства этих характеристик должны начинаться в точке X_0^* (рис. 3). Поэтому все характеристики до установления форм волн не могут быть прямыми линиями (рис. 4).

Характеристики 1 и 2 отражают передний и задний фронты волны f , распространяющейся слева направо, а характеристики 4 и 5 соответственно волны g , распространяющейся справа налево. Прямолинейные характеристики 3 и 6 отражают распространение максимумов волн.

На рис. 3 показаны положения волн f и g после установления форм волн. Введение аргументов (38) приводит к уравнению (43), отражающему сформированные волны f и g . На нелинейных участках характеристик (рис. 4) такие аргументы вводить нельзя. Однако на этих участках, в переходном процессе установления формы волн, точное решение системы уравнений (35) и (37) вряд ли возможно.

Волны f и g связаны с первоначальными функциями по формулам, следующим из (39):

$$f = \frac{\xi^* + V_0}{2\beta} \quad \text{и} \quad g = \frac{\xi^* - V_0}{2\beta}. \quad (44)$$

Если волна, распространяющаяся слева направо — прямая волна f и волна справа налево — обратная волна g равны между собой, то $f = g = \frac{\xi^*}{2\beta}$. Если обратная волна отсутствует ($g = 0$), то $\xi^* = V_0$, т.е. волны подъема воды в канале и скорости воды подобны. В общем случае $f \geq g$.

Через некоторое время после возникновения волны f и g перестанут влиять друг на друга, поэтому их можно рассматривать отдельно. Рассмотрим волну, движущуюся слева направо, при этом волну, распространяющуюся справа налево, полагаем отсутствующей, $g = 0$. В этом случае решение системы уравнений (36) и (37) будет иметь вид $\xi^* = V_0 = \beta f(r, \tau)$, где функция $f(r, \tau)$ удовлетворяет уравнению Кортевега и де Фриза:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + 6f \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} = 0. \quad (45)$$

Одноволновое (односолитонное) решение уравнения (45) хорошо известно [1]:

$$f = \frac{2k^{*2}}{\text{ch}^2(k^*(r - 4k^{*2}\tau - r_0))} = \frac{2k^{*2}}{\text{ch}^2[k^*(X^* - (1 + 2\epsilon k^{*2})t^* - r_0)]}, \quad (46)$$

где k^* — безразмерное волновое число, $2k^{*2}$ — амплитуда уединенной волны, $c^* = (1 + 2\epsilon k^{*2})$ — скорость уединенной волны, r_0 — постоянная величина. При записи (46) учтено $r = X^* - t^*$ и $\tau = \frac{\epsilon}{2} t^*$.

Безразмерная скорость уединенной волны

$$c^* = \frac{d\omega^*}{dk^*} = 1 + 2\epsilon k^{*2}, \quad (47)$$

где ω^* — безразмерная циклическая частота волны. С учетом условия, что при $k^* = 0$ величина $\omega^* = 0$, интегрируя (47), находим дисперсионное соотношение для волны в виде

$$\omega^* = k^* + \frac{2}{3} \epsilon k^{*3}. \quad (48)$$

Для построения графика уединенной волны по формуле (46) перейдем к размерным переменным. Для величины подъема уровня жидкости в уединенной волне над невозмущенной поверхностью (рис. 1) запишем

$$\xi^* = \frac{\xi}{\xi_{\max}} = \beta f(r, \tau) = \frac{3k^{*2}}{\text{ch}^2[k^*(X^* - c^*t^* - r_0)]}. \quad (49)$$

Из формулы (49) следует $3k^{*2} = 1$ и $k^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$, что указывает на определяющее влияние нелинейности (а не начальных условий, как в линейных волнах) на формирование формы волны.

Безразмерную скорость волны можно найти в виде

$$c^* = 1 + 2\epsilon k^{*2} = 1 + \frac{2}{3} \frac{\xi_{\max}}{h}. \quad (50)$$

Для нахождения масштаба времени получим из (27) масштаб функции тока

$$M_\varphi = \sqrt{\frac{M_Z^2 M_P}{\rho}} = \sqrt{\frac{h^2 \epsilon g h \rho}{\rho}} = h \sqrt{\xi_{\max} g}. \quad (51)$$

Следовательно, в соответствии с (27) масштаб времени равен

$$M_t = \frac{M_Z^2}{M_\varphi} = \frac{h}{\sqrt{g \xi_{\max}}}. \quad (52)$$

Используя (50), масштабы

$$M_X = \frac{h}{\sqrt{\xi_{\max}/h}}$$

(17) и (52) для формулы (49) найдем выражение

$$\xi = \frac{\xi_{\max}}{\text{ch}^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{X}{M_X} - \left(1 + \frac{2}{3}\frac{\xi_{\max}}{h}\right)\frac{t}{M_t}\right) - \delta\right)} = \frac{\xi_{\max}}{\text{ch}^2\left(\sqrt{\frac{\xi_{\max}}{3h^3}}\left(X - t\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\xi_{\max}}{h}\right)\sqrt{gh}\right) - \delta\right)}, \quad (53)$$

где постоянная часть фазы $\delta = k^* r_0$.

Аналогично находим скорость жидкости в уединенной волне. Используя масштаб продольной скорости

$$M_V = \frac{M_\varphi}{M_X} = \frac{\xi_{\max} \sqrt{gh}}{h} = V_{0\max},$$

задающий связь между максимальным подъемом жидкости в волне ξ_{\max} и максимальной скоростью жидкости в ней на уровне дна канала $V_{0\max}$, найдем

$$V_0 = \frac{V_{0\max}}{\text{ch}^2\left(\sqrt{\frac{\xi_{\max}}{3h^3}}\left(X - t\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\xi_{\max}}{h}\right)\sqrt{gh}\right) - \delta\right)}. \quad (54)$$

Полученная формула для скорости жидкости на уровне дна канала полностью аналогична формуле (53) подъема жидкости в уединенной волне. В формуле (54) использованы размерные скорости жидкости. Таким образом, в формировании уединенной волны участвуют все слои жидкости в канале, а не только поверхностный слой.

На рис. 5 показан график подъема жидкости в уединенной волне, построенный для условного момента времени $t = 0$ и для следующих параметров модели: $h = 5$ м, $\xi_{\max} = 0.2$ м, $g = 9.8$ м/с².

При этом максимальная скорость жидкости в уединенной волне на дне канала

$$V_{0\max} = \frac{\xi_{\max} \sqrt{gh}}{h} = 0.28 \text{ м/с},$$

а скорость уединенной волны

$$c = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\xi_{\max}}{h}\right) \sqrt{gh} = 7.93 \text{ м/с} = 28.5 \text{ км/ч}.$$

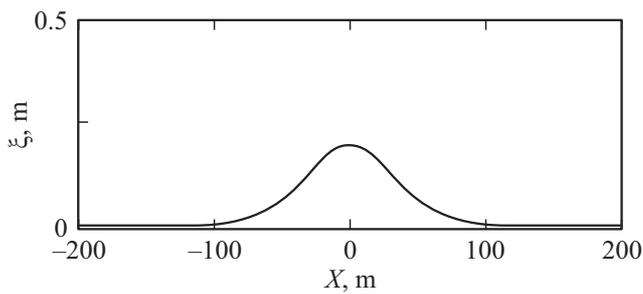


Рис. 5. График подъема жидкости в уединенной волне (солитоне).

Поэтому Д.С. Рассел мог сопровождать на лошади уединенную волну в водном канале.

Скорость жидкости на поверхности канала можно найти по формуле (32), а распределение скорости жидкости по высоте канала — по формуле (33), но это не является целью настоящей работы. Отметим только, что эти скорости меньше, чем скорость жидкости на уровне дна канала.

Заключение

Нахождение уравнения для уединенных волн (солитонов Кортевега и де Фриза) в открытом водном канале является известной задачей гидродинамики. До сих пор вывод уравнения, например в [3], осуществлялся по следующей схеме. На основе стандартного уравнения импульса и линеаризованных граничных условий на свободной поверхности жидкости ищется дисперсионное соотношение, которое имеет трансцендентный (гиперболический тангенс) характер. Затем это дисперсионное соотношение разлагается в полиномиальный ряд до третьей степени волнового числа включительно. Полученное дисперсионное соотношение приводит к уравнению Кортевега—де Фриза. По нашему мнению, более логичным представляется вывод уравнения Кортевега—де Фриза безотносительно дисперсионного соотношения, которое должно являться результатом решения этого уравнения.

В работе рассмотрено использование уравнения импульса в форме (1) с особой формой записи силового слагаемого. Показано, что такая форма уравнения импульса позволяет учесть как действие сил поверхностного натяжения, так и действие гравитационных сил в формировании волн на поверхности открытого канала. Кроме того, при решении уравнения импульса в форме (1) возникают сразу две уединенные волны, распространяющиеся в противоположных направлениях.

Предлагаемый метод решения уравнений гидродинамики состоит в следующем. Во-первых, находится разложение в ряд по малому параметру потенциала скорости в уравнении неразрывности. В качестве малого параметра используется относительная (относительно глубины канала) высота уединенной волны. Во-вторых,

полученное разложение подставляется в уравнение импульса. Затем в уравнении импульса удерживаются только линейные относительно малого параметра слагаемые. В результате возникает нелинейное уравнение относительно скорости жидкости, которое решается методом, подобным методу Даламбера для линейных гиперболических волн.

Используемый метод решения позволил получить две уединенные волны Кортевега—де Фриза, распространяющиеся в противоположных направлениях: волны, распространяющейся слева направо и волны, распространяющейся справа налево. Причем в отличие от линейных волн, получаемых в методе Даламбера, где они сразу за счет начальных условий возникают в явном виде, в случае полученного нелинейного уравнения наблюдается формирование двух волн Кортевега—де Фриза, которые не связаны с начальными условиями.

Дальнейший анализ двух полученных нелинейных волновых уравнений Кортевега—де Фриза позволил найти все характеристики этих волн: скорость их распространения, форму волн, скорость жидкости в волнах, дисперсионное соотношение и т. д.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] М. Абловиц, Х. Сигур. *Солитоны, метод обратной задачи* (Мир, М., 1987) [M.J. Ablowitz, H. Segur. *Solitons and the Inverse Scattering Transform* (SIAM, Philadelphia, 1981)]
- [2] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (Мир, М., 1988) [R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, G.D. Gibbon, H.C. Morris. *Solitons and Nonlinear Wave Equations* (Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, London, NY., 1984)]
- [3] Дж. Уизем. *Линейные и нелинейные волны* (Мир, М., 1977) [G.B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves* (Jon Wiley & Sons, London, NY., 1974)]
- [4] А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров. Письма в ЖЭТФ, **81** (6), 318 (2005). [A.I. Dyachenko, V.E. Zakharov. *JETP Lett.*, **81** (6), 318 (2005).]
- [5] О.Е. Куркина, А.А. Куркин, Е.А. Рувинская, Е.Н. Пелиновский, Т. Соомере. Письма в ЖЭТФ, **95** (2), 98 (2012). [O.E. Kurkina, A.A. Kurkin, E.A. Ruvinskaja, E.N. Pelinovsky, T. Soomere. *JETP Lett.*, **95** (2), 91 (2012).]
- [6] Т.Г. Елизарова, М.А. Истомина, Н.К. Шелковников. Математическое моделирование, **24** (4), 107 (2012). [T.G. Elizarova, M.A. Istomina, N.K. Shelkovnikov. *Mathem. Models and Computer Simulations*, **24** (4), 107 (2012).]
- [7] Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. *Сборник задач по математической физике* (Наука, М., 1980), с. 161.
- [8] А.Н. Волобуев. Математическое моделирование, **31** (6), 43 (2019). DOI: 10.1134/S0234087919060030 [A.N. Volobuev. *Mathem. Models and Computer Simulations*, **12** (1), 53 (2020).]

- [9] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика* (Наука, М., 1986), т. 6.
- [10] В.Г. Левич. *Курс теоретической физики* (Физматгиз, М., 1962), т. 1, с. 583.
- [11] А.Н. Волобуев. *Основы медицинской и биологической физики* (ООО „Самарский дом печати“, Самара, 2011), с. 86.
- [12] Т. Педли. *Гидродинамика крупных кровеносных сосудов* (Мир, М., 1983) [T.J. Pedley. *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels* (Cambridge University Press, London–NY.–Rochelle–Melbourne–Sydney, 1980)]
- [13] Lord Rayleigh (J.W. Strutt). *Philos. Mag. Ser.*, **5**(1), 257 (1876).
- [14] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1972), с. 50.