

01

Характеристическая функция самоподобного случайного процесса

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

E-mail: koverda@itp.uran.ru

Поступило в Редакцию 8 апреля 2022 г.

В окончательной редакции 8 апреля 2022 г.

Принято к публикации 23 мая 2022 г.

Предложено стохастическое дифференциальное уравнение для характеристической функции, у которой обратная функция описывает самоподобный случайный процесс со степенным поведением спектров мощности в широком диапазоне частот и степенной функцией распределения амплитуд. Гауссовские „хвосты“ для характеристического распределения дают возможность оценивать ее устойчивость по формулам классической статистики с использованием максимума энтропии Гиббса–Шеннона и, следовательно, устойчивость случайного процесса, задаваемого обратной функцией.

Ключевые слова: самоподобные случайные процессы, стохастические уравнения, спектр мощности, $1/f$ -шум, максимум энтропии.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.14.52861.19221

Случайные процессы с большими флуктуациями обладают свойством самоподобия и характеризуются степенными зависимостями спектральной плотности и амплитудных распределений. В большинстве работ описание самоподобных случайных процессов основывается на дробном интегрировании белого шума: дробное уравнение диффузии, диффузия на фрактальных структурах [1–4]. Получаемые при таком моделировании случайные процессы, как правило, нестационарны. При анализе устойчивости сложных физических систем со степенными распределениями обнаруживается, что статистическая энтропия Гиббса–Шеннона не обеспечивает согласия с принципом максимума энтропии [5–7]. В настоящей работе предложен другой подход для описания самоподобных случайных процессов с большими флуктуациями на основе системы нелинейных стохастических уравнений, как в [8,9], который значительно сокращает и упрощает вычислительную процедуру по сравнению с дробным интегрированием. Система стохастических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\varphi\psi^2 + \psi + \xi_1(t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\psi\varphi^2 + 2\varphi + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где φ и ψ — динамические переменные, ξ_1 и ξ_2 — гауссовские δ -коррелированные шумы с нулевым средним и амплитудами σ_1 и σ_2 соответственно. Система уравнений (1) описывает взаимодействие больших и малых флуктуаций в критической области при возникновении широкополосного шума с низкочастотными энергетическими выбросами. Второе уравнение системы (1) является управляющим, а первое — подчиненным. Решение второго уравнения этой системы описывает эволюцию флуктуаций, которые подчиняются

классической статистике, имеют гауссовское распределение и экспоненциальную релаксацию (переменная ψ). Решение первого уравнения дает случайную функцию больших флуктуаций со степенным распределением и замедленной релаксацией (переменная φ). Гауссовское поведение „хвостов“ управляющей переменной дает возможность оценивать устойчивость случайного процесса по формулам классической статистики с использованием принципа максимума энтропии Гиббса–Шеннона.

При критическом значении интенсивности шума ($\sigma_1 = \sigma_2 \approx 1$) в системе (1) спектр мощности переменной φ принимает вид $S_\varphi \sim 1/f$. Спектр переменной ψ при высоких частотах имеет вид $S_\psi = 1/f^2$. В численных расчетах при бесконечно малом временном шаге Δt случайный процесс с $1/f$ -спектром является нестационарным [9]. С увеличением шага Δt процесс становится стационарным, и в спектрах мощности появляется горизонтальная полка в области низких частот. Чем меньше шаг интегрирования, тем шире частотный диапазон стационарного поведения [9]. Таким образом, система (1), записанная в конечных разностях, применима для стационарных случайных процессов с конечной высокой частотой.

Из численных расчетов известно, что спектр обратной по отношению к $\psi(t)$ случайной функции $1/\psi(t)$ обратно пропорционален первой степени частоты $S_{1/\psi} \sim 1/f$ и совпадает со спектром S_φ переменной φ . Знание свойств численных решений системы (1) позволяет получить на ее основе управляющее стохастическое уравнение для классической переменной ψ , а переменную φ определить как обратную к ψ величину [10]:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\psi(t)} + \theta(t), \quad (2)$$

где $\theta(t)$ — некоторая случайная функция с дисперсией σ_θ^2 . Подстановка уравнения (2) во второе выражение

системы (1) позволяет переписать уравнение для $\psi(t)$:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\psi} - \theta^2\psi + \xi(t). \quad (3)$$

Численные расчеты показывают, что случайная функция $\theta(t)$ близка к белому шуму, поэтому можно принять следующее приближение: среднеквадратичное отклонение $\langle \theta^2 \rangle = \sigma_\theta^2$. Заменяем квадрат функции θ^2 в (3) на величину σ_θ^2 . Получим стохастическое уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\psi} - \sigma_\theta^2\psi + \xi(t). \quad (4)$$

Уравнение (4) описывает случайные блуждания в силовом поле с потенциалом

$$U = -\ln|\psi| + \sigma_\theta^2\psi^2, \quad (5)$$

который имеет логарифмический вид при малых ψ и параболический при больших ψ . Спектр функции $\psi(t)$ имеет вид $S_\psi \sim 1/f^2$. Моделирование белого шума осуществлялось последовательностью гауссовских случайных чисел. Среднеквадратичное отклонение $\sigma_\theta^2 = \langle \theta^2 \rangle = \sigma^2\Delta t$ зависит от разбиения Δt [11]. Функцию $\varphi(t)$ определим как $\varphi = \psi/(\varepsilon + \psi^2)$, где ε — малая константа, исключающая расходяемость обратной функции $1/\psi$ при приближении $\psi(t)$ к нулю в численных расчетах случайного процесса. Таким образом, можно записать систему уравнений

$$\varphi = \frac{\psi}{\varepsilon + \psi^2} + \xi(t),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\psi} - \sigma^2\Delta t\psi + \xi(t). \quad (6)$$

Первое уравнение описывает функцию, обратную к характеристической, с добавлением белого шума $\xi(t)$. Спектр мощности функции $\varphi(t)$ имеет вид $S_\varphi \sim 1/f$. Для другого наклона частотной зависимости спектра $S_\varphi \sim 1/f^\alpha$ обратная функция будет в другой степени и с другой величиной белого шума. Например, для колмогоровской турбулентности $S_\varphi \sim 1/f^{5/3}$ [12,13] следует положить $\varphi = \psi/(\varepsilon + \psi^2)^{0.7}$ и $\xi(t) = 0$. Уравнения (6) независимы, управляющим уравнением является второе. Управляющему уравнению в (6) соответствует уравнение Фоккера–Планка, стационарное решение которого имеет вид

$$P(\psi) \sim \exp\left(-\frac{U(\psi)}{\sigma^2}\right) = \exp\left(-\frac{\ln|\psi|}{\sigma^2}\right)\exp\left(-\frac{\sigma_\theta^2\psi^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= \psi^{\sigma^{-2}} \exp(-\psi^2\Delta t). \quad (7)$$

Функция распределения от обратной величины $\varphi = 1/\psi$ будет определяться выражением

$$P(\varphi) \sim \frac{1}{\varphi^{\sigma^{-2}+2}} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\varphi^2}\right). \quad (8)$$

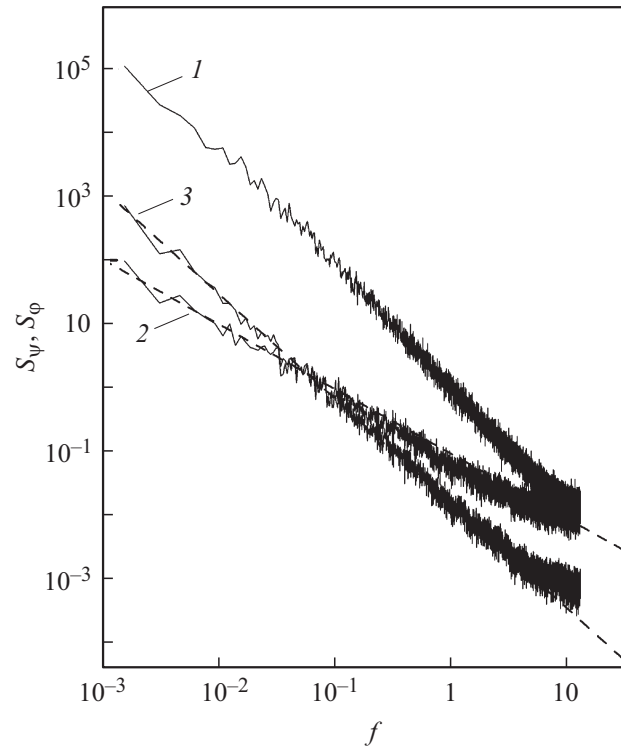


Рис. 1. Спектры мощности характеристической функции $S_\psi \sim 1/f^2$ (1) и самоподобных случайных процессов $S_\varphi \sim 1/f$ (2) и $S_\varphi \sim 1/f^{5/3}$ (3).

Из (7) и (8) видно, что функция распределения переменной ψ при больших значениях аргумента спадает экспоненциально, а функция распределения $P(\varphi)$ спадает при больших φ по степенному закону. На рис. 1 приведены спектр $S_\psi \sim 1/f^2$ и спектры $S_\varphi \sim 1/f$, $S_\varphi \sim 1/f^{5/3}$, полученные из численных решений системы (6). При численном решении с уменьшением Δt последовательность гауссовских случайных чисел все более точно аппроксимирует белый шум, что позволяет расширить зависимость $1/f$ и $1/f^2$ в спектрах S_φ и S_ψ на больший диапазон частот. На рис. 2 в логарифмических координатах приведены функции распределения $P(\psi)$, $P(\varphi)$, полученные из численных решений системы (6). Функция распределения $P(\varphi)$ при больших значениях φ следует степенной зависимости. Поведение спектров мощности и функций распределения, полученных из решений системы (6), практически совпадает с решением, полученным из системы стохастических уравнений (1) [14].

Экспоненциальный спад функции $P(\psi)$ позволяет использовать выражение для энтропии Гиббса–Шеннона [7,15] для оценки устойчивости системы (6)

$$H = -\sum_n P_n \lg P_n. \quad (9)$$

На рис. 3 приведена рассчитанная зависимость энтропии H для квадрата переменной $\psi^2(t)$ от амплитуды шума.

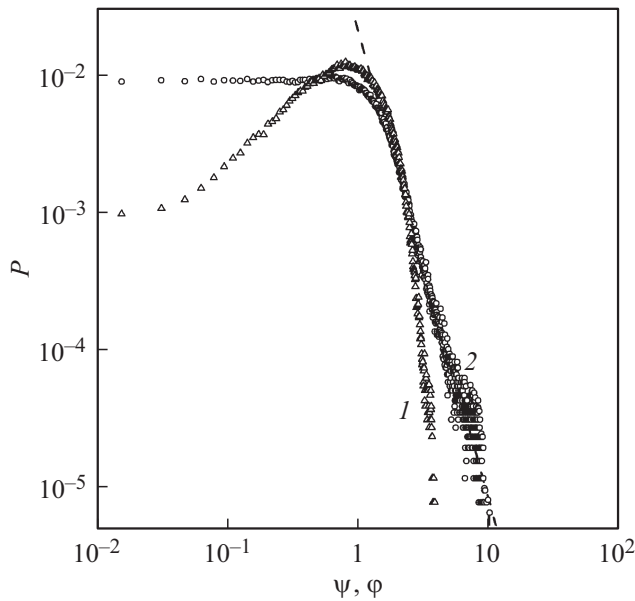


Рис. 2. Функции распределения $P(\psi)$ (1) и $P(\varphi)$ (2), полученные из численных решений системы (6). Штриховая линия — зависимость $P \sim \varphi^{-3}$.

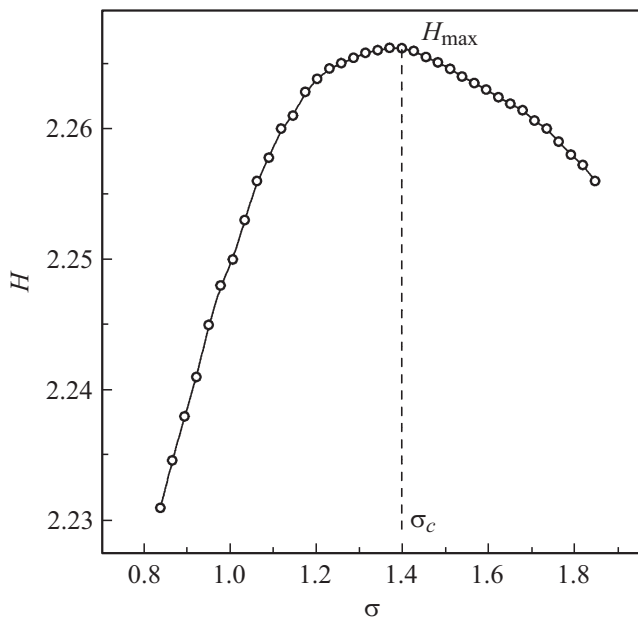


Рис. 3. Зависимость энтропии Гиббса—Шеннона H для квадрата характеристической функции $\psi^2(t)$ от амплитуды шума.

Максимум энтропии соответствует критической амплитуде шума ($\sigma_c \approx 1.4$), при которой случайный процесс $\varphi(t)$ становится наиболее устойчивым. Найденная из второго уравнения системы (6) критическая амплитуда шума в $\sqrt{2}$ раз выше, чем при моделировании самоподобного процесса двумя стохастическими уравнениями системы (1) и соответственно двумерного белого шума.

В работе предложено стохастическое дифференциальное уравнение, решением которого является харак-

теристическая функция с гауссовским распределением, обратная величина к которой описывает самоподобный случайный процесс со степенным распределением. Гауссовский «хвост» характеристической функции позволяет ее использовать для анализа устойчивости самоподобного процесса по формулам классической статистики.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы* (Ин-т компьютерных исследований, М., 2002). [B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature* (W.H. Freeman and Co, 1982)].
- [2] B. Mandelbrot, J.W. Van Ness, *SIAM Rev.*, **10** (4), 422 (1968). DOI: 10.1137/1010093
- [3] D. Ben-Avraham, S. Havlin, *Diffusion and reactions in fractals and disordered systems* (Cambridge University Press, 2005).
- [4] R. Metzler, J. Klafter, *Phys. Rep.*, **339** (1), 1 (2000). DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3
- [5] E.W. Montroll, M.F. Shlesinger, *J. Stat. Phys.*, **32** (2), 209 (1983). DOI: 10.1007/BF01012708
- [6] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.*, **52** (1-2), 479 (1988). DOI: 10.1007/BF01016429
- [7] А.Г. Башкиров, *Теоретическая и математическая физика*, **149** (2), 299 (2006). DOI: 10.4213/tmf4235 [A.G. Bashkirov, *Theor. Math. Phys.*, **149** (2), 1559 (2006). DOI: 0.1007/s11232-006-0138-x].
- [8] V.P. Koverda, V.N. Skokov, *Physica A*, **346** (3-4), 203 (2005). DOI: 10.1016/j.physa.2004.07.042
- [9] V.P. Koverda, V.N. Skokov, *Physica A*, **555** (1), 124581 (2020). DOI: 10.1016/j.physa.2020.124581.
- [10] В.П. Коверда, В.Н. Скоков, *ЖТФ*, **74** (9), 4 (2004). [V.P. Koverda, V.N. Skokov, *Tech. Phys.*, **49** (9), 1104 (2004). DOI: 10.1134/1.1800229].
- [11] В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы* (Мир, М., 1987). [W. Horsthemke, R. Lefever, *Noise-induced transitions: theory and applications in physics, chemistry, and biology* (Springer-Verlag, Berlin, 2006).
- [12] В.П. Коверда, В.Н. Скоков, *Письма в ЖТФ*, **47** (13), 36 (2021). DOI: 10.21883/PJTF.2021.13.51120.18774 [V.P. Koverda, V.N. Skokov, *Tech. Phys. Lett.*, **47**, 665 (2021). DOI: 10.1134/S1063785021070099].
- [13] А.Н. Колмогоров, *ДАН СССР*, **30** (4), 299 (1941). DOI: 10.3367/UFNr.0093.196711h.0476
- [14] В.П. Коверда, В.Н. Скоков, *Письма в ЖТФ*, **45** (9), 19 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.09.47707.17718 [V.P. Koverda, V.N. Skokov, *Tech. Phys. Lett.*, **45** (5), 439 (2019). DOI: 10.1134/S1063785019050080].
- [15] C. Shannon, *Bell Syst. Tech. J.*, **27** (3), 379 (1948).