

# Дисперсия времени релаксации квазидвумерных электронов при рассеянии на ионах примеси в сверхрешетке с легированными квантовыми ямами

© С.И. Борисенко<sup>†</sup>

Сибирский физико-технический институт им. В.Д. Кузнецова, 634050 Томск, Россия

(Получена 24 июля 2002 г. Принята к печати 16 октября 2002 г.)

Проведен анализ рассеяния на ионах примеси квазидвумерных электронов сверхрешетки GaAs/Al<sub>0,36</sub>Ga<sub>0,64</sub>As с легированными квантовыми ямами. Для расчета вероятности рассеяния применялась волновая функция, являющаяся собственной функцией основного состояния нижней минизоны сверхрешетки. Получены формулы и проведен численный анализ дисперсии продольного и поперечного времени релаксации по продольному волновому вектору. Исследована зависимость компонент тензора времени релаксации от периода сверхрешетки и температуры в области  $T = 77$  К.

## 1. Введение

К настоящему времени имеется ряд работ [1–3], в которых теоретически исследуется проблема рассеяния электронов ионами примеси в структурах с квантовыми ямами (КЯ). В этих работах расчет времени релаксации и подвижности для переноса носителей заряда вдоль квантовых ям проводится в приближении двумерного электронного газа. В случае сверхрешеток (СР) из КЯ, в которых кроме продольного переноса имеется и поперечный перенос по минизоне, работ, связанных с расчетом подвижности носителей заряда за счет примесного рассеяния, практически нет. Данная проблема решается в работе [4], где в рамках уравнения Больцмана получены формулы для времени релаксации и проведен анализ продольной и поперечной подвижности квазидвумерных электронов в СР типа GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As. Однако при расчете вероятности рассеяния используется существенное приближение для волновой функции электронов, которая берется в виде суммы Блоха по волновым функциям изолированных бесконечно глубоких КЯ. С учетом этого приближения поперечное и продольное время релаксации зависят только от поперечного волнового вектора или энергии поперечного движения относительно оси симметрии СР и не зависят от продольного волнового вектора.

В данной работе проведен анализ рассеяния квазидвумерных электронов сверхрешетки GaAs/Al<sub>0,36</sub>Ga<sub>0,64</sub>As с легированными квантовыми ямами на ионах примеси. Для описания вероятности рассеяния применялась волновая функция, являющаяся собственной функцией основного состояния нижней минизоны СР. Как показал анализ, используемый метод расчета вероятности рассеяния приводит к зависимости времени релаксации электронов от продольного волнового вектора. В работе получены формулы и проведен численный анализ дисперсии продольного и поперечного времени релаксации по продольному волновому вектору, исследована

зависимость компонент тензора времени релаксации от периода СР и температуры в области  $T = 77$  К.

## 2. Основные формулы

Расчет вероятности внутриминизонного рассеяния электронов СР на ионах примеси проводился, как и в работе [5], с приближенной огибающей волновой функцией нижней минизоны

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{\sqrt{V}} u_0(z), \quad (1)$$

где  $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_{\perp}, k_z)$  — волновой вектор электронов в системе координат с осью  $z$ , параллельной оси СР,  $u_0(z)$  — периодическая часть огибающей функции Блоха при  $k_z = 0$ . Для СР с легированными КЯ с учетом (1) вероятность рассеяния электрона с волновым вектором  $\mathbf{k}$  в состояние с  $\mathbf{k}'$  принимает вид

$$w(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2\pi e^4 Z^2 a N_I^{CW}}{\hbar \varepsilon_0^2 \varepsilon^2 V d} \sum_{n, n' = -N_z/2}^{N_z/2} S_n^* S_{n'} W(\mathbf{q}_n) W(\mathbf{q}_{n'}) \times \frac{\sin[\pi \frac{a}{d} (n - n')]}{\pi \frac{a}{d} (n - n')} \delta(E(\mathbf{k}') - E(\mathbf{k})), \quad (2)$$

где

$$S_n = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left(i \frac{2\pi n}{d} z\right) |u_0(z)|^2 dz,$$

$$W(\mathbf{q}) = \frac{1}{q^2 + \alpha^2}, \quad (3)$$

$$E(\mathbf{k}) = E = E_{\perp} + \frac{\Delta}{2} [1 - \cos(k_z d)], \quad (4)$$

$$E_{\perp} = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_{\perp}}, \quad \mathbf{q}_n = \mathbf{k}' - \mathbf{k} + \frac{2\pi n}{d} \mathbf{e}_z, \quad -\frac{N_z}{2} < n < \frac{N_z}{2},$$

$N_z$  — число периодов СР, которое считается бесконечно большим,  $\Delta$  — ширина нижней минизоны,  $a$  и  $d$  — ширина КЯ и период СР,  $\mathbf{e}_z$  — единичный вектор вдоль оси

<sup>†</sup> E-mail: sib@elefot.tsu.ru

СР,  $eZ$  и  $N_I^{CW}$  — заряд и концентрация ионов примеси в КЯ,  $\alpha$  — коэффициент экранирования,  $\varepsilon$  — статическая диэлектрическая проницаемость. Формула (2) получена в приближении случайных фаз, для однородного распределения примеси по КЯ, в приближении однородной по СР диэлектрической проницаемости и слабой зависимости функции  $u_{k_z}(z)$  от  $k_z$ .

Неравновесная добавка к функции распределения электронов рассчитывалась в виде

$$g(\mathbf{k}) = e \frac{\partial f_0}{\partial E} \sum_i \tau_i(\mathbf{k}) \mathbf{E}_i v_i(\mathbf{k}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{E}_i$  — компоненты напряженности электрического поля,  $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} E / \hbar$  — скорость электрона,  $f_0(E)$  — равновесная функция Ферми–Дирака. Функции  $\tau_i(\mathbf{k})$  представляют собой компоненты тензора времени релаксации, зависящие от компонент волнового вектора. Для расчета этих функций с помощью линеаризованного уравнения Больцмана были получены интегральные уравнения

$$\tau_{\perp}(\mathbf{k}) = \tau_0(\mathbf{k}) \left\{ \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{w}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \tau_{\perp}(\mathbf{k}') \frac{\mathbf{k}_{\perp} \mathbf{k}'_{\perp}}{k_{\perp}^2} + 1 \right\}, \quad (6)$$

$$\tau_{\parallel}(\mathbf{k}) = \tau_0(\mathbf{k}) \left\{ \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{w}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \tau_{\parallel}(\mathbf{k}') \frac{\sin(k'_z d)}{\sin(k_z d)} + 1 \right\}, \quad (7)$$

где

$$\tau_0^{-1}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}'} \mathbf{w}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \quad (8)$$

— полная вероятность рассеяния электрона из состояния с волновым вектором  $\mathbf{k}$  за единицу времени. В приближении квазидвумерного электронного газа ( $\Delta = 0$  при  $\Delta \ll k_0 T$ ), с учетом формулы для вероятности рассеяния (2), в которой учитывается лишь основной член суммы с  $n = n' = 0$ , уравнения (4), (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\perp}(E_{\perp}, \vartheta)}{\tau_0(E_{\perp}, \vartheta)} &= C_I \\ &\times \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2E_{\perp} \tau_{\perp}(E_{\perp}, \vartheta') d\vartheta'}{[t^2(\vartheta' - \vartheta)^2 + \gamma^2]^{3/2} [4E_{\perp} + t^2(\vartheta' - \vartheta)^2 + \gamma^2]^{3/2}} + 1, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\chi_{\parallel}(E_{\perp}, \vartheta)}{\tau_0(E_{\perp}, \vartheta)} &= C_I \\ &\times \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{[2E_{\perp} + t^2(\vartheta' - \vartheta)^2 + \gamma^2] \chi_{\parallel}(E_{\perp}, \vartheta') d\vartheta'}{[t^2(\vartheta' - \vartheta)^2 + \gamma^2]^{3/2} [4E_{\perp} + t^2(\vartheta' - \vartheta)^2 + \gamma^2]^{3/2}} \\ &+ \sin(\vartheta), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_0(E_{\perp}, \vartheta)} &= C_I \\ &\times \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{[2E_{\perp} + t^2(\vartheta' - \vartheta)^2 + \gamma^2] d\vartheta'}{[t^2(\vartheta' - \vartheta)^2 + \gamma^2]^{3/2} [4E_{\perp} + t^2(\vartheta' - \vartheta)^2 + \gamma^2]^{3/2}}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\chi_{\parallel}(E_{\perp}, \vartheta) = \tau_{\parallel}(E_{\perp}, \vartheta) \sin(\vartheta), \quad (12)$$

$$C_I = 2 \left( \frac{e^2 Z}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} \right)^2 \frac{\hbar \alpha N_I^{CW}}{m_{\perp} d^2},$$

$$t^2 = \frac{\hbar^2}{2m_{\perp} d^2}, \quad \gamma^2 = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m_{\perp}}, \quad \vartheta = k_z d.$$

Следует отметить, что в отличие от рассеяния на акустических колебаниях [5] единственным параметром, характеризующим СР, в формулах (9)–(11) является период СР  $d$ . Влияние на примесное рассеяние других параметров, таких как ширина квантовой ямы, толщина и высота барьера в случае однородного распределения примеси невелико. Причина этого связана с незначительным вкладом в сумму (2) членов с  $n, n' \neq 0$  по сравнению с нулевым членом из-за особенности фурье-компоненты экранированного кулоновского потенциала в области малых значений продольного волнового вектора.

Расчет подвижности электронов проводился по формулам

$$\begin{aligned} \mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu_{\perp} &= e \langle \tau_{\perp} \rangle / m_{\perp}, \\ \mu_{zz} = \mu_{\parallel} &= e \langle \tau_{\parallel} \rangle / \langle m_{\parallel} \rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\langle \tau_{\perp} \rangle = \int_0^{\infty} [-f'_0(E_{\perp})] \tau_{\perp}(E_{\perp}) E_{\perp} dE_{\perp} / \int_0^{\infty} f_0(E_{\perp}) dE_{\perp}, \quad (14)$$

$$\langle \tau_{\parallel} \rangle = \int_0^{\infty} [-f'_0(E_{\perp})] \tau_{\parallel}(E_{\perp}) dE_{\perp} / \int_0^{\infty} [-f'_0(E_{\perp})] dE_{\perp}, \quad (15)$$

$$\tau_{\perp}(E_{\perp}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tau_{\perp}(E_{\perp}, \vartheta) d\vartheta,$$

$$\tau_{\parallel}(E_{\perp}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tau_{\parallel}(E_{\perp}, \vartheta) \sin^2(\vartheta) d\vartheta, \quad (16)$$

$$\langle m_{\parallel} \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta d}{2\hbar} \right)^2 \int_0^{\infty} [-f'_0(E_{\perp})] dE_{\perp} / \int_0^{\infty} f_0(E_{\perp}) dE_{\perp} \quad (17)$$

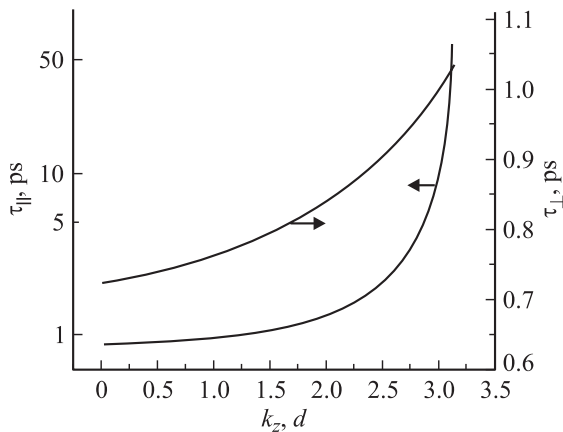
— усредненное по энергии значение продольной эффективной массы электронов.

### 3. Численный анализ

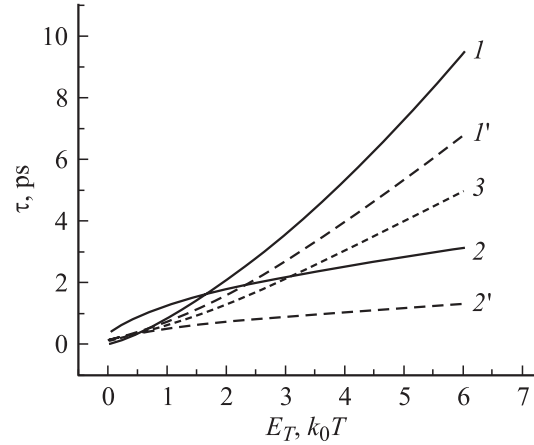
Расчет времени релаксации и подвижности электронов за счет рассеяния на ионах примеси проводился для композиционной сверхрешетки GaAs/Al<sub>0.36</sub>Ga<sub>0.64</sub>As с легированными квантовыми ямами. В расчете для GaAs и сплава Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As были использованы следующие значения параметров [6]:  $m_{\perp} = m^* = 0.066m_0$ ,  $\varepsilon = 13.18$ . Решение нелинейных интегральных уравнений (9), (10) проводилось численно разностным методом [7].

Зависимость времени релаксации от энергии поперечного движения и продольного волнового вектора рассчитывалась для СР с параметрами  $a = 5$  нм,  $b = 8$  нм,  $\Delta = 0.10$  мэВ, где  $b$  ширина потенциального барьера. Расчет ширины минизоны проводился методом, изложенным в работе [8]. Расчет времени релаксации проводился при условии  $aN_T^{CW} = nd$  для невырожденного электронного газа с концентрацией электронов  $n = 10^{16}$  см<sup>-3</sup> при  $T = 77$  К. При этих значениях параметров для усредненных по энергии времен релаксации, рассчитанных по формулам (14), (15), были получены следующие значения:  $\langle\tau_{\perp}\rangle = 2.1$  пс,  $\langle\tau_{\parallel}\rangle = 1.1$  пс. Эти значения близки по величине к  $\langle\tau\rangle = 1.6$  пс — времени релаксации для однородно легированного GaAs, рассчитанного с теми же параметрами при помощи формулы Брукса–Херринга, и к значению  $\langle\tau_{\perp}\rangle = \langle\tau_{\parallel}\rangle = 1.8$  пс — времени релаксации электронов в рассматриваемой СР на акустических колебаниях [5]. Значения подвижности, рассчитанные по формулам (13), при  $\langle m_{\parallel}\rangle = 25m_0$  получились равными  $\mu_{\perp} = 5.6$  м<sup>2</sup>/(В·с) и  $\mu_{\parallel} = 7.9 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/(В·с) по сравнению с подвижностью  $\mu = 4.3$  м<sup>2</sup>/(В·с) в GaAs.

На рис. 1 представлена зависимость поперечного (кривая 1) и продольного (кривая 2) времени релаксации от величины  $\vartheta = k_z d$  при энергии поперечного движения  $E_{\perp} = k_0 T$ . Из рисунка следует, что с ростом продольного волнового вектора от нуля до максимального значения  $\tau_{\perp}$  и  $\tau_{\parallel}$  увеличиваются. Однако если рост по-



**Рис. 1.** Дисперсия по продольному волновому вектору поперечного и продольного времени релаксации при  $T = 77$  К для энергии поперечного движения  $E_{\perp} = k_0 T$ : 1 —  $\tau_{\perp}(E_{\perp}, \vartheta)$ , 2 —  $\tau_{\parallel}(E_{\perp}, \vartheta)$ .



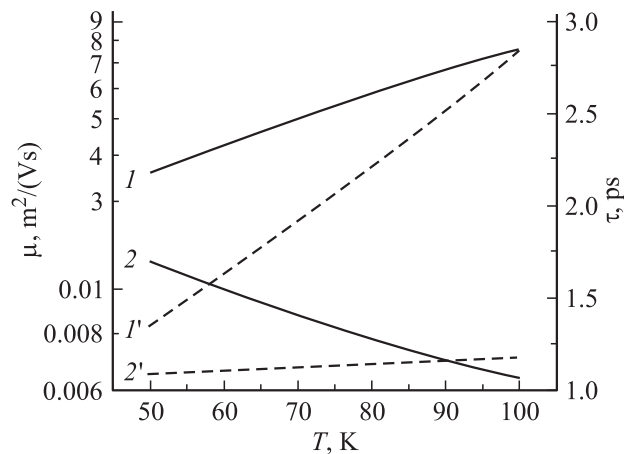
**Рис. 2.** Дисперсия по энергии поперечного движения усредненного по продольному волновому вектору поперечного и продольного времени релаксации: 1 —  $\tau_{\perp}(E_{\perp})$ , 2 —  $\tau_{\parallel}(E_{\perp})$ , 1' —  $\tau_{\perp}(E_{\perp})^*$ , 2' —  $\tau_{\parallel}(E_{\perp})^*$ , 3 —  $\tau(E)$ -GaAs. \* — расчет проведен с приближенной волновой функцией [4].

перечного времени релаксации невелик, то продольное время релаксации при стремлении  $k_z$  к  $\pi/d$  стремится к бесконечности.

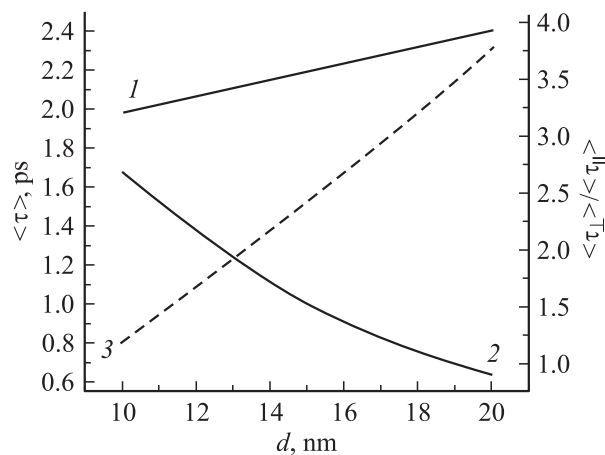
Зависимости усредненного по продольному волновому вектору поперечного (кривая 1) и продольного (кривая 2) времени релаксации от энергии поперечного движения, рассчитанные по формулам (16), приведены на рис. 2. Характер этих зависимостей близок к степенному, причем показатель степенной зависимости для  $\tau_{\perp}(E_{\perp})$  больше, а для  $\tau_{\parallel}(E_{\perp})$  меньше единицы. Из рисунка следует, что поперечное время релаксации при всех значениях  $E_{\perp}$  больше, чем в объемном GaAs (кривая 3), тогда как для продольного это имеет место при  $E_{\perp} < 3k_0 T$ . Приближенный расчет с волновой функцией в виде суммы Блоха по функциям бесконечно глубоких изолированных квантовых ям [4] приводит к более низким значениям  $\tau_{\perp}(E_{\perp})$  (кривая 1') и  $\tau_{\parallel}(E_{\perp})$  (кривая 2'). Для продольного времени релаксации в отличие от поперечного эта разница оказывается существенной, за счет чего анизотропия усредненного по энергии времени релаксации  $\langle\tau_{\perp}\rangle/\langle\tau_{\parallel}\rangle = 1.9$  по сравнению с приближенным расчетом  $\tau_{\perp}/\tau_{\parallel} = 3.4$  уменьшается.

Различная зависимость  $\tau_{\perp}(E_{\perp})$  и  $\tau_{\parallel}(E_{\perp})$  от энергии поперечного движения приводит к различной температурной зависимости средних по энергии времен релаксации и подвижностей (см. рис. 3). Согласно рисунку, слабое увеличение  $\langle\tau_{\parallel}\rangle$  с ростом температуры (кривая 2') по сравнению с зависимостью  $\langle\tau_{\perp}\rangle$  (кривая 1') приводит к тому, что продольная подвижность  $\mu_{\parallel}$  (кривая 2) с ростом температуры убывает, тогда как поперечная подвижность  $\mu_{\perp}$  (кривая 1), как и в объемном GaAs растет.

Зависимости усредненных по энергии компонент тензора времени релаксации  $\langle\tau_{\perp}\rangle$  и  $\langle\tau_{\parallel}\rangle$  от периода СР при постоянном значении концентрации электронов



**Рис. 3.** Зависимость от температуры усредненных по энергии компонент тензора времени релаксации и подвижности:  $1 - \mu_{\perp}$ ,  $2 - \mu_{\parallel}$ ,  $1' - \langle \tau_{\perp} \rangle$ ,  $2' - \langle \tau_{\parallel} \rangle$ .



**Рис. 4.** Зависимости усредненных по энергии компонент тензора времени релаксации от периода СР при постоянном значении концентрации электронов:  $1 - \langle \tau_{\perp} \rangle$ ,  $2 - \langle \tau_{\parallel} \rangle$ ,  $3 - \langle \tau_{\perp} \rangle / \langle \tau_{\parallel} \rangle$ .

$n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$  представлены на рис. 4. Из рисунка следует, что с увеличением периода СР среднее значение поперечного времени релаксации (кривая 1) растет, тогда как продольное время релаксации (кривая 2) уменьшается. Различный характер изменения рассматриваемых величин с ростом периода СР в 2 раза приводит к увеличению параметра анизотропии времени релаксации  $\langle \tau_{\perp} \rangle / \langle \tau_{\parallel} \rangle$  (кривая 3) примерно в 4 раза.

#### 4. Заключение

Численный анализ рассеяния электронов СР с легированными квантовыми ямами на ионах примеси с помощью волновой функции (1) показал: 1) наличие существенной зависимости продольного времени релаксации от продольного волнового вектора; 2) наличие

различной зависимости продольного и поперечного времени релаксации от энергии поперечного движения, приводящее к различной температурной зависимости продольной и поперечной подвижности; 3) рост анизотропии времени релаксации с ростом периода СР.

Следует отметить, что численные результаты проведенного анализа получены в приближении квазидвумерного характера электронного газа. Это накладывает существенные ограничения на величину и соотношение параметров СР, таких как ширина КЯ, толщина и высота потенциального барьера, при которых должно выполняться условие  $\Delta \ll k_0 T$ . В связи с этим актуальной является задача, связанная с учетом энергии продольного движения в законе сохранения полной энергии при рассеянии электронов на ионах примеси в тех СР, в которых условие квазидвумерности электронного газа не выполняется.

#### Список литературы

- [1] J. Lee, H.N. Spector, V.K. Arora. *J. Appl. Phys.*, **54**, 6995 (1983).
- [2] A. Gold. *Phys. Rev. B*, **35**, 723 (1987).
- [3] J.L. Thobel, L. Baudry. *J. Appl. Phys.*, **73**, 233 (1993).
- [4] С.И. Борисенко. *ФТП*, **36**, 861 (2002).
- [5] С.И. Борисенко. *ФТП*, **36**, 1237 (2002).
- [6] Landolt-Börnstein. *Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*, ed by O. Madelung (Springer Verlag, Berlin, 1987) New Series III, **22 a**, p. 451.
- [7] Н.Н. Калиткин. *Численные методы* (М., Наука, 1978) гл. 14, с. 455.
- [8] С.И. Борисенко, Г.Ф. Караваев. *ФТП*, **32**, 607 (1998).

Редактор Л.В. Беляков

#### Dispersion of relaxation time of quasi-2D electrons at scattering on ions of an impurity in a superlattice with doped quantum wells

S.I. Borisenko

Siberian Physical and Technical Institute,  
634050 Tomsk, Russia

**Abstract** The analysis of scattering on ions of an impurity of quasi-2D electrons of a superlattice GaAs/Al<sub>0.36</sub>Ga<sub>0.64</sub>As with doped quantum wells is carried out. The eigen wave function of the basic state of the bottom minizone of a superlattice was applied to the calculation of scattering probability. The formulas are received and the numerical analysis of dispersion of longitudinal and transverse relaxation time on a longitudinal wave vector is carried out. The dependence of components of relaxation time tensor from the period superlattice and temperature in area  $T = 77 \text{ K}$  is investigated.