

06

Генерация второй гармоники в поверхностном слое диэлектрической сфероидальной частицы: II. Анализ решения

© А.А. Шамына, В.Н. Капшай[✉], А.И. Толкачев[✉]

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
246019 Гомель, Республика Беларусь

e-mail: anton.shamyna@gmail.com, [✉]kapshai@rambler.ru, [✉]anton.talkachov@gmail.com

Поступила в редакцию 05.02.2022 г.

В окончательной редакции 18.04.2022 г.

Принята к публикации 02.05.2022 г.

Векторы, используемые в решении задачи о генерации второй гармоники в поверхностном слое диэлектрической сфероидальной частицы, в явном виде выражены через базисные векторы сферической, цилиндрической и декартовой систем координат. Построены трехмерные диаграммы направленности, характеризующие пространственное распределение генерируемого излучения в дальней зоне и его поляризацию. Выявлено, что при малом размере сфероидальной частицы диаграмма направленности, обусловленная каждой из некиральных компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости, имеет свою индивидуальную форму. Пропорциональное увеличение линейных размеров частицы приводит к выделению на диаграмме направленности нескольких направлений преимущественного излучения с высокой направленностью. Если возбуждающее излучение имеет линейную поляризацию, то обусловленное одной (любой) из независимых компонент тензора генерируемое излучение также линейно поляризовано. Для используемых в решении функций обнаружены математические свойства, характеризующие пространственное распределение генерируемого излучения в дальней зоне, и свойства, связанные с заменой параметров задачи. Выявлена связь между симметриями диаграмм направленности излучения удвоенной частоты и указанными свойствами. Обнаружены условия, при которых генерация излучения не происходит, и условия, при которых генерируемое излучение имеет линейную поляризацию. Упомянутые условия связаны с особенностями пространственного распределения генерируемого излучения и его поляризацией, проиллюстрированными на диаграммах направленности. Предложены методы оценки независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости с использованием указанных условий.

Ключевые слова: генерация второй гармоники, сфероидальная диэлектрическая частица, симметрия пространственного распределения излучения, условия отсутствия генерации, условия генерации линейно поляризованного излучения.

DOI: 10.21883/OS.2022.07.52726.3229-22

Явный вид векторов

Результирующие формулы в рассматриваемой задаче имеют достаточно громоздкий вид, из-за чего их анализ осложнен. Для получения дополнительной информации об исследуемом явлении проиллюстрируем пространственное распределение генерируемого излучения с помощью диаграмм направленности, посредством которых возможно не только выделить направления преимущественного излучения, но и проанализировать поляризацию генерируемых волн.

Направим оси декартовой системы координат таким образом, чтобы волновой вектор падающей электромагнитной волны был расположен в плоскости OXZ , ось сфероидальной частицы совпала с осью OZ , а геометрический центр частицы оказался в начале координат. В этом случае схема решаемой нами задачи схожа со схемой задачи о генерации второй гармоники в поверхностном слое цилиндрической частицы [1], и можно использовать формулы для явного вида векторов,

аналогичные полученным в работе [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(\omega)} &= k_{\omega} \sin \theta_{\text{in}} \mathbf{e}_x + k_{\omega} \cos \theta_{\text{in}} \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{k}^{(2\omega)} = k_{2\omega} \mathbf{e}_r, \\ \mathbf{e}^{(\omega)} &= \frac{\cos \theta_{\text{in}} (-\cos \varphi_{\text{in}} + i\sigma \sin \varphi_{\text{in}})}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \mathbf{e}_x \\ &+ \frac{(-i\sigma \cos \varphi_{\text{in}} - \sin \varphi_{\text{in}})}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \mathbf{e}_y \\ &+ \sin \theta_{\text{in}} \frac{\cos \varphi_{\text{in}} - i\sigma \sin \varphi_{\text{in}}}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь θ_{in} — угол между волновым вектором $\mathbf{k}^{(\omega)}$ и положительным направлением оси OZ , k_{ω} и $k_{2\omega}$ — модули волновых векторов $\mathbf{k}^{(\omega)}$ и $\mathbf{k}^{(2\omega)}$ соответственно, φ_{in} — угол между плоскостью OXZ и большой полуосью эллипса поляризации, σ — эллиптичность падающей волны (отношение длины малой полуоси эллипса поляризации к длине большой).

Составляющие и компоненты вектора рассеяния можно вычислить по формулам

$$q_z = \mathbf{e}_z (2\mathbf{k}^{(\omega)} - \mathbf{k}^{(2\omega)}) = 2k_{\omega} (\cos \theta_{\text{in}} - \xi \cos \theta),$$

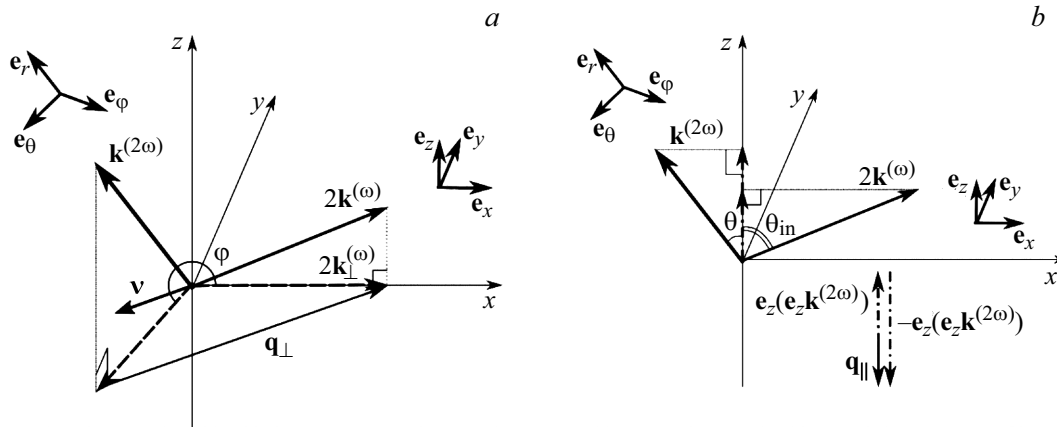


Рис. 1. Схема расположения векторов, используемых при решении задачи о генерации второй гармоники в поверхностном слое сферической частицы: (а) векторы в плоскости OXY , (б) векторы вдоль оси OZ .

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\perp &= (1 - \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z)(2\mathbf{k}^{(\omega)} - \mathbf{k}^{(2\omega)}) \\ &= -2k_\omega [(\xi \sin \theta - \sin \theta_{in} \cos \varphi)\mathbf{e}_\rho + \sin \theta_{in} \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi], \\ q_\perp = |\mathbf{q}_\perp| &= 2k_\omega \sqrt{\sin^2 \theta_{in} - 2\xi \sin \theta_{in} \sin \theta \cos \varphi + \xi^2 \sin^2 \theta}, \end{aligned} \quad (2)$$

где используются базисные векторы цилиндрической системы координат $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ и координаты сферической системы координат (r, θ, φ) , коэффициент ξ характеризует дисперсию, связанную с удвоением частоты электромагнитного излучения и вычисляется следующим образом:

$$\xi = \frac{k_{2\omega}}{2k_\omega} = \frac{n_{2\omega}}{n_\omega}. \quad (3)$$

Единичный вектор, направленный вдоль \mathbf{q}_\perp , можно представить математически в виде выражения

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{q}_\perp}{q_\perp} = \frac{(-\xi \sin \theta + \sin \theta_{in} \cos \varphi)\mathbf{e}_\rho - \sin \theta_{in} \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi}{\sqrt{\sin^2 \theta_{in} - 2\xi \sin \theta_{in} \sin \theta \cos \varphi + \xi^2 \sin^2 \theta}}. \quad (4)$$

Схема расположения векторов изображена на рис. 1.

Диаграммы направленности

Обозначения

Обозначения, использованные при построении графиков аналогичны использованным в работах [2]. На всех диаграммах направленности предполагается, что частица расположена в начале координат. Расстояние от начала координат до поверхности диаграммы направленности прямо пропорционально модулю вектора Умова–Пойнтинга излучения второй гармоники в соответствующем направлении. Самые длинные лепестки диаграммы направленности ориентированы вдоль направлений преимущественного излучения (на рис. 2, а, например, мощность излучения в полупространство положительных значений оси OX больше, чем в противоположном). На всех графиках произведена нормировка

на максимальную плотность мощности излучения. Линии на поверхности диаграммы направленности характеризуют ориентацию эллипса поляризации излучения удвоенной частоты: сплошные расположены вдоль больших полуосей эллипсов поляризации, а штриховые — вдоль малых.

Сплошной стрелкой обозначено направление волнового вектора падающей электромагнитной волны (на рис. 2, а — вдоль оси OX). Большая полуось эллипса поляризации возбуждающего излучения совпадает со штриховой стрелкой на диаграммах направленности (на рис. 2, а — вдоль оси OZ).

Тоновые графики, расположенные в правом $(-\pi/2 < \varphi < \pi/2)$ и левом $(\pi/2 < \varphi < 3\pi/2)$ верхних углах диаграммы направленности, являются проекциями диаграммы направленности на переднюю и заднюю полусферы соответственно, как показано на рис. 3, г. Максимальной плотности мощности соответствует белый цвет, а минимальной — черный. Легенда представлена в левой части рис. 3, ф.

Тоновые графики, расположенные в правом и левом нижних углах диаграммы направленности, в соответствии с той же схемой проекции характеризуют поляризацию генерируемого излучения. Циркулярно поляризованному излучению соответствуют белый ($\sigma = +1$ — правая поляризация) и черный цвет ($\sigma = -1$ — левая поляризация), как показано на легенде в правой части рис. 3, ф.

Анализ диаграмм направленности

Исчерпывающий анализ зависимости пространственного распределения генерируемого излучения от характеристик частицы и возбуждающего излучения при всех возможных комбинациях параметров является достаточно трудоемкой задачей ввиду большого количества варьируемых параметров $(\chi_{1-4}^{(2)}, k_\omega a_x, \rho, \theta_{in}, \varphi_{in}, \sigma, \xi)$, поэтому в настоящей работе проиллюстрированы только отдельные закономерности. При построении всех

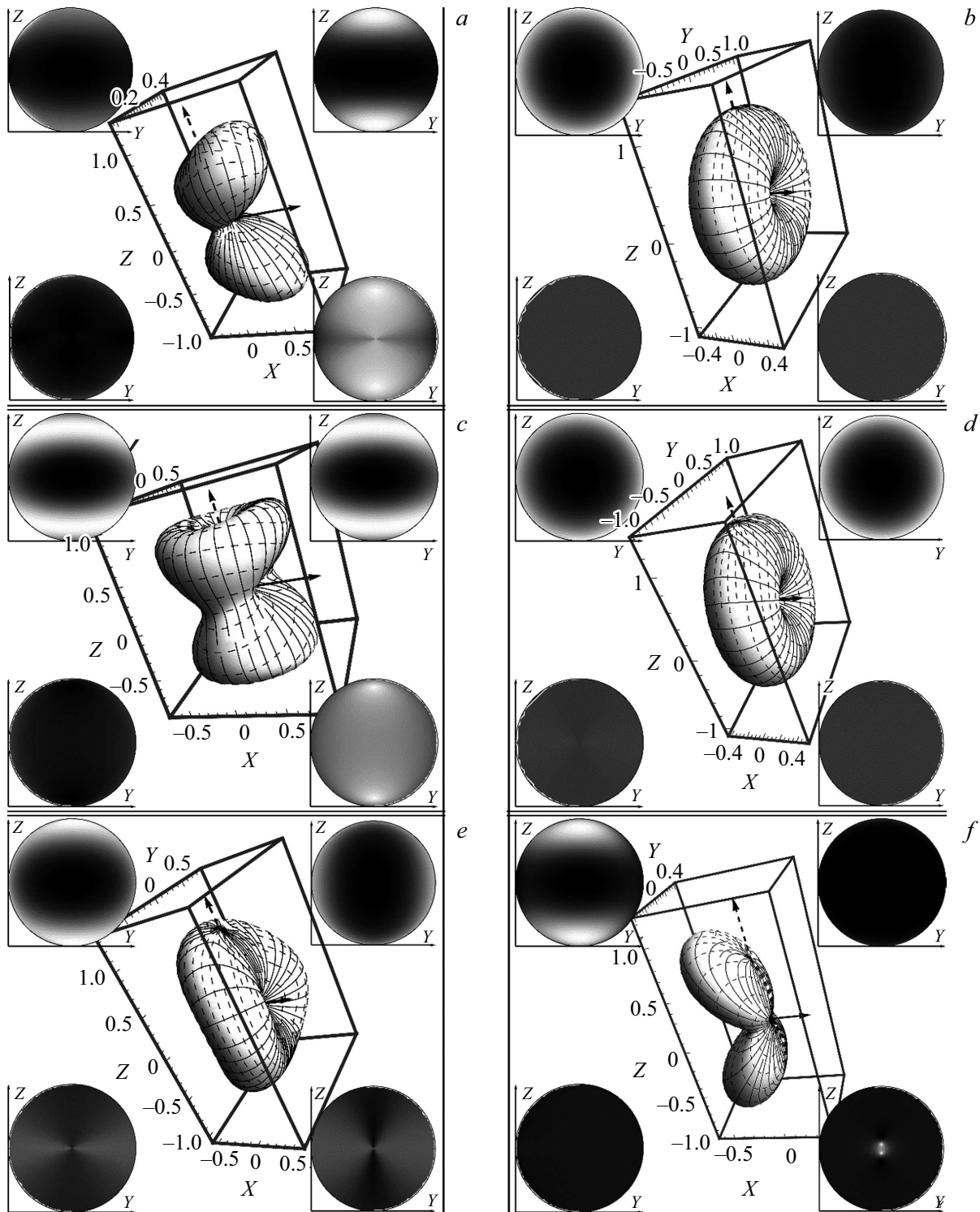


Рис. 2. Диаграммы направленности для малого размера диэлектрической частицы при $k_{\omega}a_x = 0.1$, $\sigma = 0.5$, $\theta_{in} = \pi/2$, $\varphi_{in} = 0$. Значения остальных параметров: (a) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\rho = 1.5$, (b) $\chi_2^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$, $\rho = 1.5$, (c) $\chi_3^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$, $\rho = 1.5$, (d) $\chi_4^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1-3}^{(2)} = 0$, $\rho = 1.5$, (e) $\chi_1^{(2)} = -0.627$, $\chi_2^{(2)} = 0.778$, $\chi_3^{(2)} = -0.021$, $\chi_4^{(2)} = 0$, $\rho = 1.5$, (f) $\chi_4^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1-3}^{(2)} = 0$, $\rho = 1$.

последующих диаграмм направленности использовано значение $\xi = 1.34/1.33$, соответствующее показателям преломления воды при длинах волн электромагнитного излучения 425 и 850 nm.

На рис. 2, a-d проиллюстрировано распределение плотности мощности генерируемого излучения при малых размерах частицы ($k_{\omega}a_x = 0.1$) в форме вытянутого ($\rho = 1.5$) эллипсоида вращения, характерное для каждой

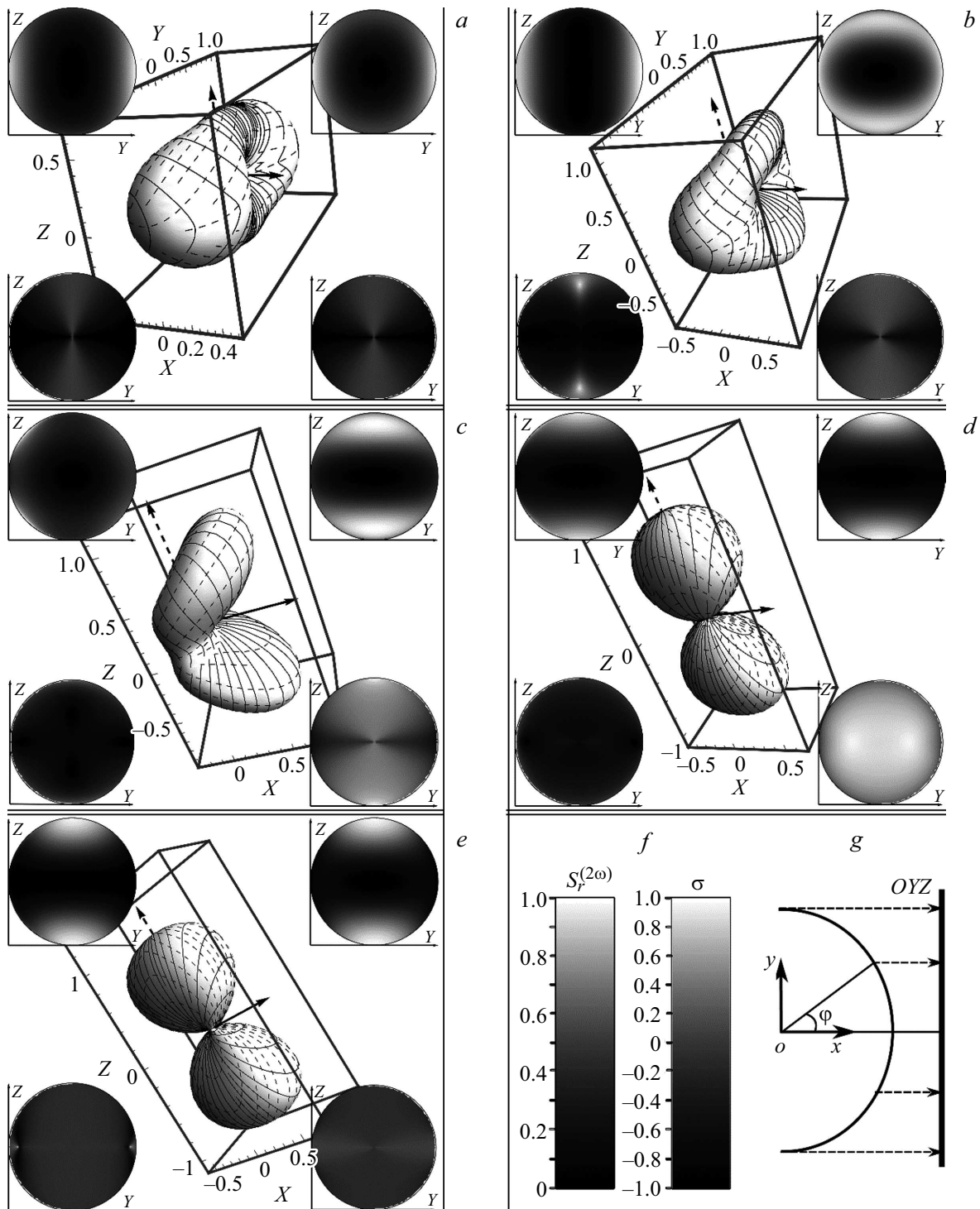


Рис. 3. Диаграммы направленности, характеризующие зависимость пространственного распределения поля второй гармоники от отношения длин полуосей сфероидальной частицы, при $\chi_{1-4}^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $k_\omega a_x = 0.1$, $\sigma = 0.5$, $\theta_{in} = \pi/2$, $\varphi_{in} = 0$. Отношение длин полуосей диэлектрической частицы: (a) $\rho = 0.1$, (b) $\rho = 0.5$, (c) $\rho = 1.1$, (d) $\rho = 2$, (e) $\rho = 10$. Легенда представлена на фрагменте *f*. Схема проекции — на фрагменте *g*.

из независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости $\chi_{ijk}^{(2)}$, т.е. когда только одна из компонент $\chi_{1-4}^{(2)}$ отлична от нуля. Значения параметров соответствуют направлению вектора $\mathbf{k}^{(\omega)}$ перпенди-

кулярно оси диэлектрической частицы ($\theta_{in} = \pi/2$), правой эллиптической поляризации возбуждающего излучения ($\sigma = 0.5$) с ориентацией большей полуоси вдоль оси симметрии частицы ($\varphi_{in} = 0$).

Можно видеть, что каждому некиральному коэффициенту анизотропии ($\chi_{1-3}^{(2)}$) при малых размерах частицы соответствует своя индивидуальная форма диаграммы направленности. В случаях $\chi_1^{(2)} \neq 0, \chi_{2-4}^{(2)} = 0$ (рис. 2, *a*) и $\chi_3^{(2)} \neq 0, \chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$ (рис. 2, *c*) в переднюю полусферу излучаются правополяризованные волны, а в заднюю полусферу — левополяризованные. На диаграмме направленности при $\chi_2^{(2)} \neq 0, \chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$ (рис. 2, *b*) можем видеть, что генерируемое излучение имеет линейную поляризацию во всех направлениях.

Диаграмма направленности, построенная при значениях коэффициентов $\chi_{1-4}^{(2)}$, соответствующих красителю малахитовому зеленому, чьи значения независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости были найдены в работе [6], изображена на рис. 2, *e*. Сходство между формами диаграмм на рис. 2, *b* и 2, *e* в направлениях, близких к плоскости OXY , объясняется преобладанием интенсивности генерируемого излучения, обусловленного компонентой $\chi_2^{(2)}$ (рис. 2, *b*), над интенсивностью излучения, обусловленного компонентой $\chi_1^{(2)}$ (рис. 2, *a*), при значениях $\chi_1^{(2)}$ и $\chi_2^{(2)}$, имеющих одинаковый порядок. В остальных направлениях картина распределения излучения второй гармоники является результатом интерференции электромагнитных волн удвоенной частоты, обусловленных компонентами $\chi_1^{(2)}$ и $\chi_2^{(2)}$.

Явное сходство есть и у пространственного распределения излучения, изображенного на рис. 2, *b* и 2, *d*, соответствующих случаям $\chi_2^{(2)} \neq 0, \chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$ и $\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1-3}^{(2)} = 0$. Различие состоит в том, что на рис. 2, *d* поляризация излучения для верхней и нижней частей диаграммы отличается от линейной. Для генерации в поверхностном слое сферической частицы [3] подобное сходство не наблюдалось. При значении $\rho = 1$, соответствующему сферической форме частицы, диаграмма направленности для $\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1-3}^{(2)} = 0$ (рис. 2, *f*) значительно отличается от формы диаграммы направленности для $\chi_2^{(2)} \neq 0, \chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$, близкой по форме к диаграмме направленности, изображенной на рисунке (рис. 2, *b*). Более того, посредством детального анализа обнаружено, что при других значениях ρ , отличных от единицы, пространственное распределение генерируемого излучения для $\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1-3}^{(2)} = 0$ также близко к распределению для $\chi_2^{(2)} \neq 0, \chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$.

Возможное объяснение подобным закономерностям следующее. При малом размере диэлектрической частицы доминирующее слагаемое, формирующее пространственное распределение генерируемого излучения для кирального слоя ($\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1-3}^{(2)} = 0$), сокращается при $\rho \rightarrow 1$, что было показано в части I настоящей работы. В этом случае форма диаграммы направленности обусловлена слагаемым более высокого порядка малости (в работе [3] — сферическая функция Бесселя второго порядка). Незначительное отличие поляризации

от линейной в верхней и нижней частях диаграммы направленности объясняется как раз влиянием слагаемых более высокого порядка малости: поляризация излучения (левая) на рис. 2, *f* совпадает с поляризацией (также левой) излучения, соответствующего верхней и нижней частям диаграммы направленности на рис. 2, *d*.

Влияние коэффициента ρ на характер пространственного распределения генерируемого излучения при малых размерах диэлектрической частицы и значениях независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости $\chi_1^{(2)} \neq 0, \chi_{2-4}^{(2)} = 0$ отражено на рис. 3.

В случае, когда диэлектрическая частица имеет форму сжатого эллипсоида вращения (рис. 3, *a, b*), большая часть излучения генерируется в направлениях, перпендикулярных плоскости, содержащей волновой вектор возбуждающего излучения и ось частицы. При этом для $\rho = 0.1$ (рис. 3, *a*) поляризация излучения удвоенной частоты преимущественно противоположна поляризации падающей электромагнитной волны.

Если форма диэлектрической частицы является вытянутой (рис. 3, *d, e*), то излучение генерируется преимущественно в плоскости, содержащей волновой вектор падающей волны и ось частицы. При этом генерируемое излучение преимущественно имеет левую поляризацию, когда ρ принимает большие значения (рис. 3, *e*).

При значениях ρ , близких к единице (рис. 3, *c*), форма диаграммы направленности напоминает характерную для генерации в поверхностном слое сферической частицы [3]. При этом в переднюю полусферу генерируется излучение, имеющее поляризацию, совпадающую с поляризацией падающей волны, а в заднюю полусферу — противоположную.

Пространственное распределение генерируемого излучения напрямую зависит от поляризации падающей электромагнитной волны. На рис. 4, *a, b* изображены диаграммы направленности, построенные для значений независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости $\chi_1^{(2)} \neq 0, \chi_{2-4}^{(2)} = 0$ при линейной ($\sigma = 0$) и правой циркулярной ($\sigma = 1$) поляризациях возбуждающего излучения. Можно заметить, что при падении линейно поляризованной волны на диэлектрическую частицу генерируется линейно поляризованное излучение удвоенной частоты. Несложно проверить, что эта же закономерность сохраняется, когда оптически нелинейный слой является исключительно киральным ($\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1-3}^{(2)} = 0$) или исключительно некиральным ($\chi_{1-3}^{(2)} \neq 0, \chi_4^{(2)} = 0$). При падении циркулярно поляризованной волны на частицу генерируется эллиптически поляризованное излучение второй гармоники с разной эллиптичностью для различных направлений θ, φ . Промежуточный случай изображен на диаграмме направленности рис. 3, *d* при $\sigma = 0.5$. Сравнивая его со случаем, изображенным на рис. 4, *c* при $\sigma = -0.5$, можем видеть, что поляризация генерируемого излучения в одном и том же направлении противоположна при

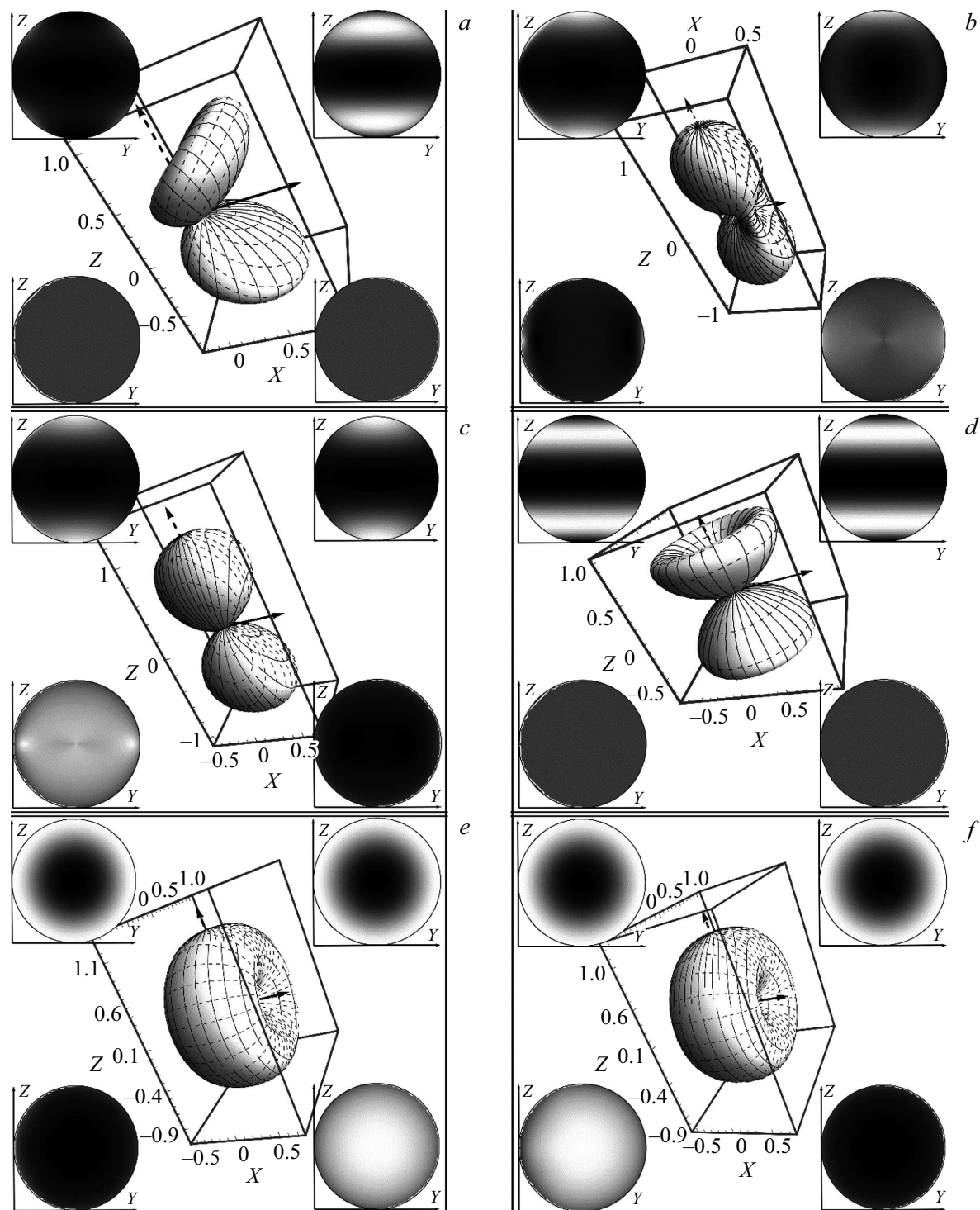


Рис. 4. Диаграммы направленности, характеризующие влияние поляризации падающей волны на пространственное распределение генерируемого излучения, при $k_{\omega}a_x = 0.1$, $\rho = 2$, $\theta_{in} = \pi/2$, $\varphi_{in} = 0$. Остальные значения параметров: (a) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\sigma = 0$, (b) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\sigma = 1$, (c) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\sigma = -0.5$, (d) $\chi_3^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$, $\sigma = 0$, (e) $\chi_3^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$, $\sigma = 1$, (f) $\chi_3^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$, $\sigma = -1$.

$\sigma = 0.5$ и $\sigma = -0.5$, а амплитуда неизменна. Указанные особенности имели место также при генерации второй гармоники в поверхностном слое сферической [3] и цилиндрической [2] диэлектрических частиц.

Для случая $\chi_3^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$ поляризация возбуждающего излучения также имеет значение. При падении линейно поляризованного излучения ($\sigma = 0$) на диэлектрическую частицу генерируется также линейно поляризованное излучение (рис. 4, *d*). При падении правополярно поляризованной ($\sigma = 1$) электромагнитной волны генерируется эллиптически поляризованное излучение второй гармоники (рис. 4, *e*). Изменение поляризации возбуждающего излучения на противоположную ($\sigma = -1$) также обуславливает изменение поляризации излучения удвоенной частоты на противоположную (рис. 4, *f*) при сохранении интенсивности.

В работах [2–5,7,8] было замечено, что размер диэлектрической частицы в значительной степени влияет на распределение излучения второй гармоники в дальней зоне. Аналогичная закономерность характерна и для генерации в поверхностном слое сфероидальных частиц. На рис. 5, *a, b* (при $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$) пропорциональное увеличение линейных размеров диэлектрической частицы в два раза (от $k_\omega a_x = 0.5$ до $k_\omega a_x = 1.0$) обусловило выделение двух направлений преимущественного излучения. Поляризация электромагнитных волн, генерируемых в указанных направлениях — правая, как и поляризация падающей электромагнитной волны. Подобная тенденция в небольшой степени прослеживается и при переходе от размера $k_\omega a_x = 0.1$ (рис. 3, *d*) к размеру $k_\omega a_x = 0.5$ (рис. 5, *a*). В случае $\chi_2^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$ увеличение размеров частицы в 2 раза (рис. 5, *c, d*) также проявляется формированием двух главных лепестков диаграммы направленности, но уже в плоскости, перпендикулярной оси частицы.

При генерации в поверхностном слое диэлектрической частицы в форме сжатого ($\rho = 0.1$, $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$) эллипсоида вращения главные лепестки диаграммы направленности, возникающие при увеличении размеров частицы в два раза (рис. 5, *e, f*), оказываются сжатыми вдоль направления, перпендикулярного оси частицы и волновому вектору возбуждающего излучения, в отличие от случая, проиллюстрированного на рис. 5, *f* для $\rho = 2$. Аналогичное появление направлений преимущественного излучения при увеличении размеров частицы также проявлялось и в случае нелинейной генерации в поверхностном слое сферических и цилиндрических частиц [3,4].

Заметим, что на всех фрагментах рис. 2–5 диаграмма направленности имеет две зеркальные плоскости симметрии (*OXZ* и *OYZ*), что является следствием наличия двух соответствующих зеркальных плоскостей симметрии у схемы задачи.

В отличие от генерации в сферической частице при генерации в сфероидальной частице выделяется ось симметрии, следовательно, ориентация волнового вектора

падающей электромагнитной волны относительно оси частицы также должна оказывать влияние на пространственное распределение генерируемого излучения, что и проиллюстрировано на рис. 6.

Сравнивая рис. 6, *a* и рис. 5, *b*, можем видеть, что при $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$ поворот вектора $\mathbf{k}^{(\omega)}$ приводит к повороту верхнего главного лепестка диаграммы направленности в этом же направлении. Нижний главный лепесток при этом значительно уменьшается. Дальнейший поворот волнового вектора падающей волны также вызывает дополнительное смещение главных лепестков диаграммы направленности (рис. 6, *b*). Отметим, что при циркулярной поляризации возбуждающего излучения ($\sigma = 1$), направленного вдоль оси симметрии частицы ($\theta_{\text{in}} = 0$), диаграмма направленности также приобретает осевую симметрию (рис. 6, *c*). Если $\chi_3^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$, то характер изменения диаграммы направленности при повороте вектора $\mathbf{k}^{(\omega)}$ (рис. 6, *d-f*) аналогичен характеру изменения диаграммы направленности для случая $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$.

На каждом из фрагментов рис. 6 пространственное распределение излучения второй гармоники обладает плоскостью симметрии *OXZ*.

Из-за осевой симметрии диэлектрической частицы на форму диаграммы направленности влияет не только направление волнового вектора возбуждающего излучения, но и ориентация эллипса поляризации относительно оси частицы (азимут поляризации — φ_{in}), что продемонстрировано на рис. 7.

Сравнивая рис. 7, *a, b* и рис. 5, *a* ($\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$), можно заметить, что при повороте эллипса поляризации возбуждающего излучения поворачиваются также и главные лепестки диаграммы направленности. Подобная закономерность характерна и для значений независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости $\chi_4^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1-3}^{(2)} = 0$ при облучении частицы линейно поляризованным излучением ($\sigma = 0$), что показано на рис. 7, *c-e*. Зеркальная симметрия относительно плоскости *OXY* проявляется на рис. 7, *b, c, e*. Для диаграмм направленности, изображенных на рис. 7, *a, d*, характерна поворотная ось симметрии второго порядка.

Свойства пространственного распределения излучения удвоенной частоты

Функции, характеризующие генерацию второй гармоники в поверхностном слое диэлектрических частиц в форме эллипсоида вращения, обладают рядом математических свойств, связанных с симметрией пространственного распределения генерируемого излучения. Многие из этих свойств объясняются симметрией схемы задачи и совпадают с аналогичными свойствами, найденными для цилиндрической частицы. Все приведенные в настоящем разделе свойства верны при любых линейных

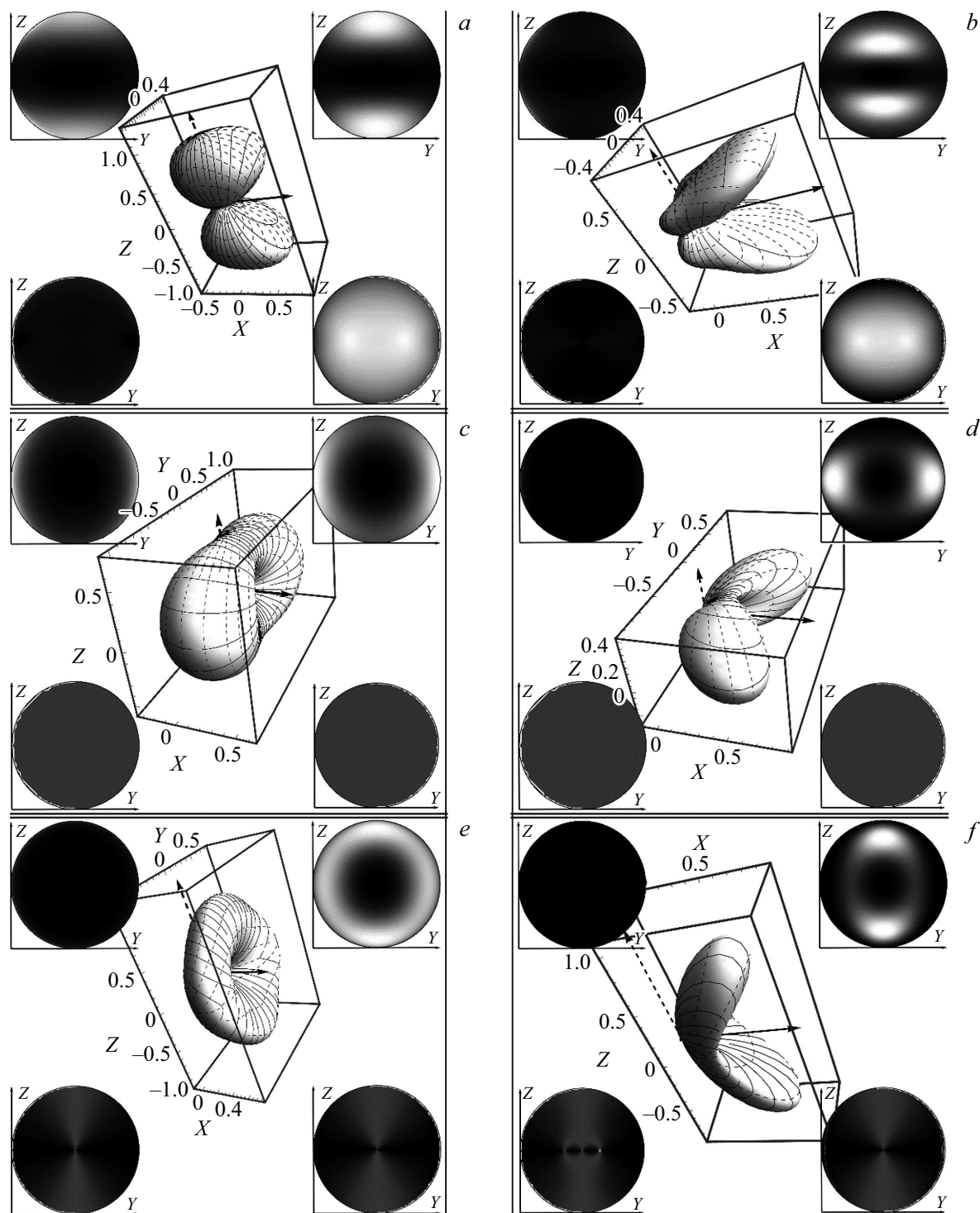


Рис. 5. Диаграммы направленности, характеризующие влияние линейных размеров диэлектрической частицы на пространственное распределение генерируемого излучения, при $\sigma = 0.5$, $\theta_{in} = \pi/2$, $\varphi_{in} = 0$. Остальные значения параметров: (a) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\rho = 2$, $k_{\omega}a_x = 0.5$, (b) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\rho = 2$, $k_{\omega}a_x = 1.0$, (c) $\chi_2^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$, $\rho = 2$, $k_{\omega}a_x = 0.5$, (d) $\chi_2^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$, $\rho = 2$, $k_{\omega}a_x = 1.0$, (e) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\rho = 0.1$, $k_{\omega}a_x = 1.0$, (f) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\rho = 0.1$, $k_{\omega}a_x = 2.0$.

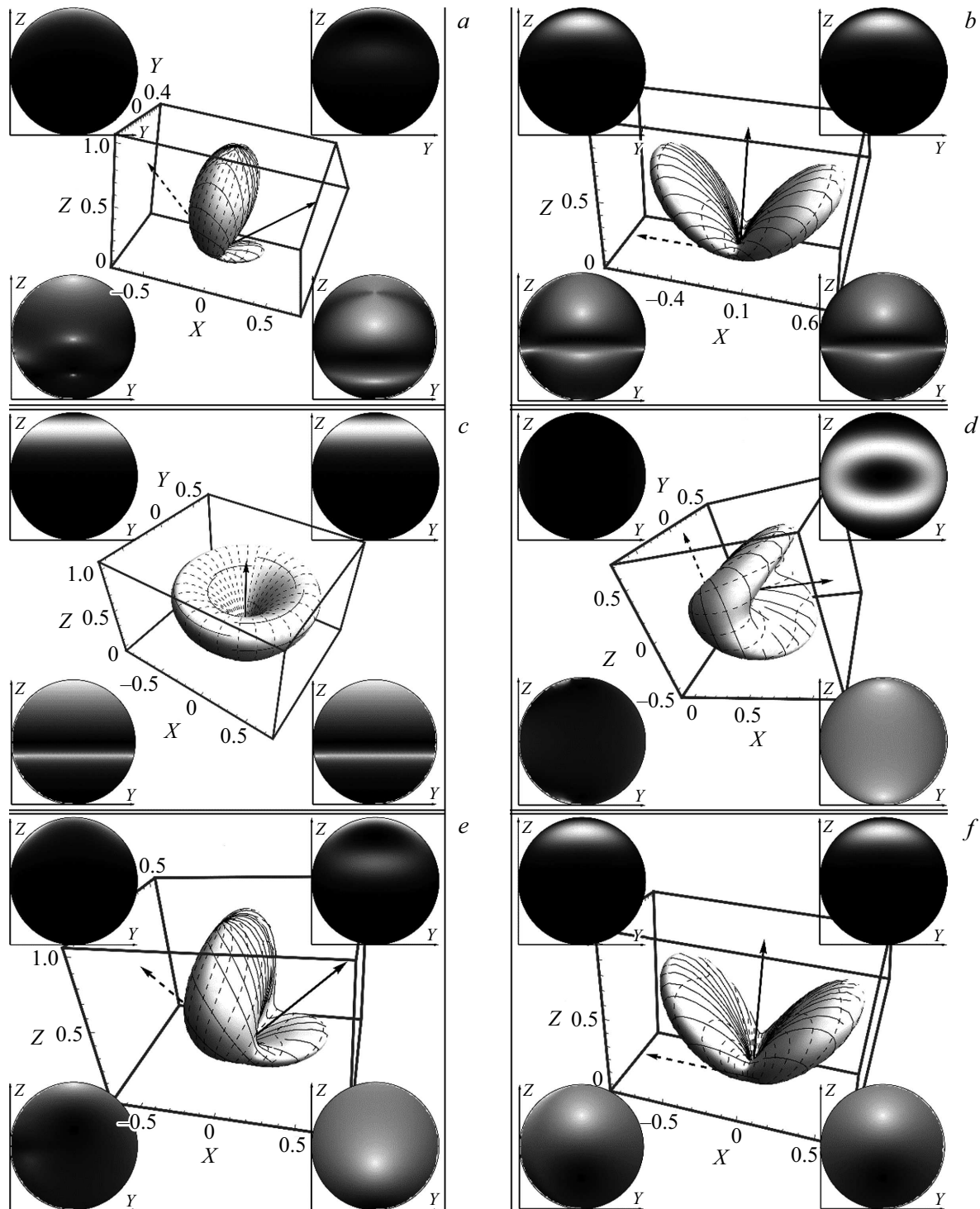


Рис. 6. Диаграммы направленности, характеризующие влияние ориентации волнового вектора падающей электромагнитной волны на пространственное распределение генерируемого излучения, при $k_{\omega} a_x = 1.0$, $\rho = 2$, $\sigma = 0.5$, $\varphi_{in} = 0$. Остальные значения параметров: (a) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\theta_{in} = \pi/4$, $\sigma = 0.5$, (b) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\theta_{in} = 0$, $\sigma = 0.5$, (c) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\theta_{in} = 0$, $\sigma = 1$, (d) $\chi_3^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$, $\theta_{in} = \pi/2$, $\sigma = 0.5$, (e) $\chi_3^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$, $\theta_{in} = \pi/4$, $\sigma = 0.5$, (f) $\chi_3^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$, $\theta_{in} = 0$, $\sigma = 0.5$.

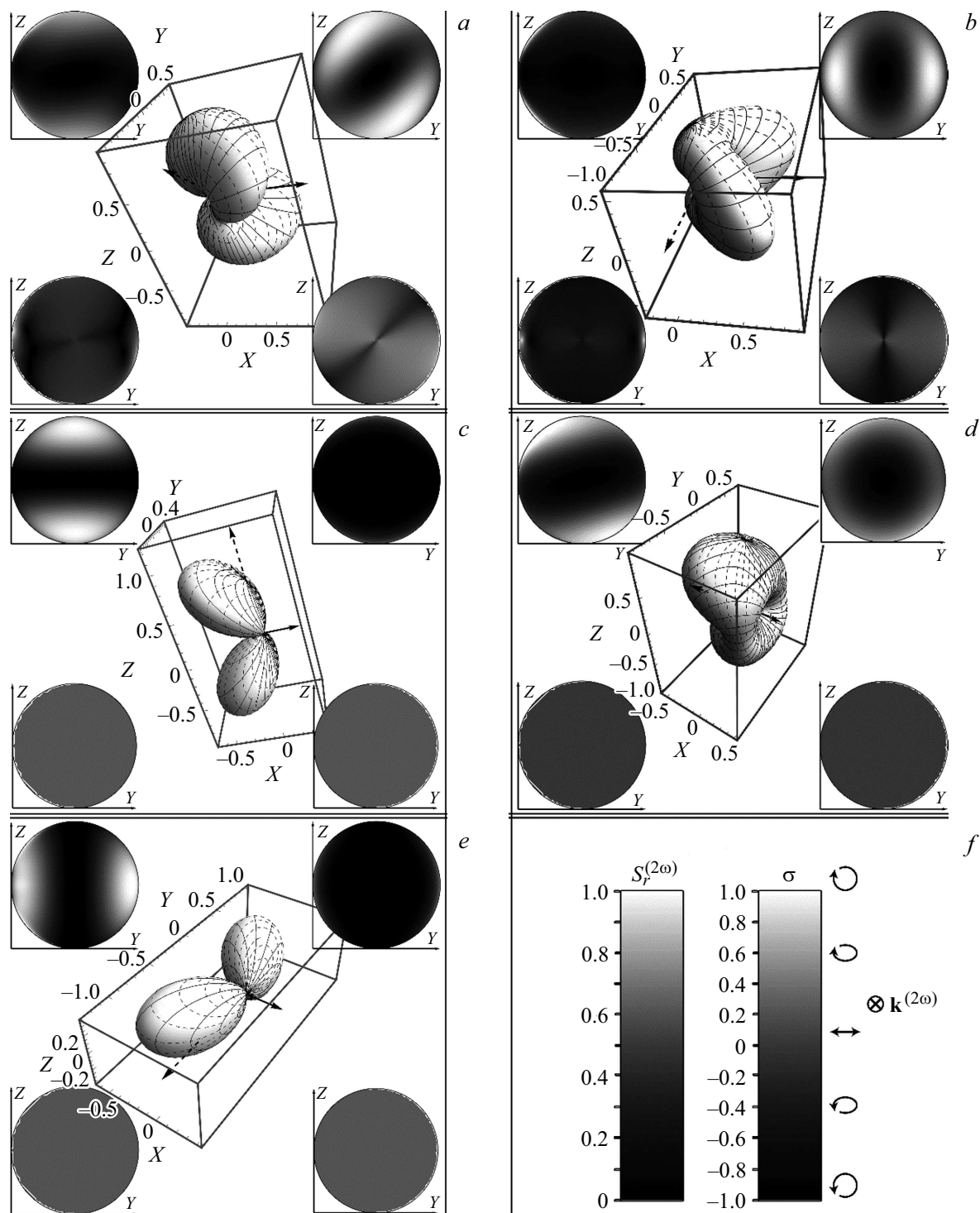


Рис. 7. Диаграммы направленности, характеризующие влияние ориентации эллипса поляризации падающей электромагнитной волны на пространственное распределение генерируемого излучения, при $k_{\omega}a_x = 0.5$, $\rho = 2$, $\theta_{in} = \pi/2$. Остальные значения параметров: (a) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\sigma = 0.5$, $\varphi_{in} = \pi/4$, (b) $\chi_1^{(2)} \neq 0$, $\chi_{2-4}^{(2)} = 0$, $\sigma = 0.5$, $\varphi_{in} = \pi/2$, (c) $\chi_4^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1-3}^{(2)} = 0$, $\sigma = 0$, $\varphi_{in} = 0$, (d) $\chi_4^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1-3}^{(2)} = 0$, $\sigma = 0$, $\varphi_{in} = \pi/4$, (e) $\chi_4^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1-3}^{(2)} = 0$, $\sigma = 0$, $\varphi_{in} = \pi/2$. На фрагменте f представлена легенда.

размерах частицы ($\forall a_x, \forall \rho$) и любых значениях коэффициента, характеризующего дисперсию ($\forall \xi$).

При записи математических свойств воспользуемся вектором $\mathbf{f}^{(2\omega)}$, который по аналогии с обозначениями в работах [1,3] определим следующим образом:

$$\mathbf{f}^{(2\omega)} = X_{ijk}^{(2\omega)} e_j^{(\omega)} e_k^{(\omega)}, \quad (5)$$

где $X_{ijk}^{(2\omega)}$ — тензор эффективной восприимчивости, вычисляемый по формуле (11) в части I, $e_j^{(\omega)}, e_k^{(\omega)}$ — компоненты единичного вектора поляризации $\mathbf{e}^{(\omega)}$ падающей электромагнитной волны.

Наиболее часто встречающимися свойствами для нелинейной генерации второго порядка являются следующие:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta + 2\pi m_1, \varphi + 2\pi m_2) &= \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi), \\ \mathbf{f}^{(2\omega)}(-\theta, \varphi) &= -(1 - 2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi), \\ S_r^{(2\omega)}(\theta + 2\pi m_1, \varphi + 2\pi m_2) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi), \\ S_r^{(2\omega)}(-\theta, \varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и далее m, m_1, m_2 — произвольные целые числа. Ранее подобные свойства были обнаружены для генерации второй гармоники и для генерации суммарной частоты в поверхностных слоях диэлектрических частиц в форме шара и цилиндра [2]. Они верны при любых значениях параметров генерации ($\forall \chi_{1-4}^{(2)}, \forall \theta_{in}, \forall \varphi_{in}, \forall \sigma$), не имеют проявлений на диаграммах направленности генерируемого излучения и объясняются свойствами тригонометрических функций, входящих в состав $\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)$ и $S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi)$.

Если среди независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости не равна нулю только компонента $\chi_2^{(2)}$ ($\chi_2^{(2)} \neq 0, \chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$), то при любых значениях других параметров ($\forall \theta_{in}, \forall \varphi_{in}, \forall \sigma$) верны следующие свойства:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) &= (1 - 2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi), \\ \operatorname{Re}[\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)] &= 0, \\ S_r^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Первое и третье свойства в формулах (7) проявляются на диаграммах направленности в виде зеркальной плоскости симметрии, проходящей через ось симметрии частицы и волновой вектор падающей электромагнитной волны. Это относится к рис. 2, *b* и рис. 5, *c, d*.

Когда волновой вектор возбуждающего излучения перпендикулярен оси симметрии эллипсоидальной частицы ($\theta_{in} = \pi/2$), а остальные значения параметров принимают произвольные значения ($\forall \chi_{1-4}^{(2)}, \forall \varphi_{in}, \forall \sigma$),

имеют место свойства

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) &= -(1 - 2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\pi - \theta, \varphi), \\ S_r^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\pi - \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (8)$$

При этом пространственное распределение генерируемого излучения обладает вращательной осью симметрии второго порядка, параллельной волновому вектору падающей волны. На диаграммах направленности подобные свойства проявляются на рис. 2–5, 7 и на рис. 6, *d*.

Когда большая или малая полуось эллипса поляризации перпендикулярна оси диэлектрической частицы ($\varphi_{in} = \pi m/2$), при любых значениях других параметров ($\forall \chi_{1-4}^{(2)}, \forall \sigma$) верны следующие соотношения:

$$\begin{aligned} i\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) &= [i(1 - 2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)]^*, \\ S_r^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Они связаны с зеркальной симметрией диаграмм направленности относительно плоскости, проходящей через волновой вектор падающей электромагнитной волны и ось частицы. Указанные свойства можно обнаружить на диаграммах направленности, изображенных на рис. 2–6 и рис. 7, *b, c, e*.

Если нелинейный слой, покрывающий сфероидальную частицу, не обладает киральными свойствами ($\chi_4^{(2)} = 0$) и выполняется условие $\varphi_{in} = \pi m/4$, то при произвольных значениях других параметров ($\forall \chi_{1-3}^{(2)}, \forall \theta_{in}, \forall \sigma$) имеет место следующее свойство:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, -\varphi) \exp(i(m+1)\pi/2)] \\ = \operatorname{Re}[(1 - 2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi) \exp(i(m+1)\pi/2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Оно никак не проявляется на диаграммах направленности генерируемого излучения и характеризует особенности фазы генерируемых электромагнитных волн.

Для слоя, не обладающего киральными свойствами ($\chi_4^{(2)} = 0$), функция $\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)$ принимает только мнимые значения при линейной поляризации возбуждающего излучения ($\sigma = 0$) и любых значениях других параметров ($\forall \chi_{1-3}^{(2)}, \forall \theta_{in}, \forall \varphi_{in}$):

$$\operatorname{Re}[\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)] = 0. \quad (11)$$

Подобное свойство ранее было замечено также для генерации в поверхностном слое сферической [3] и цилиндрической [2] частиц.

В случае, когда слой обладает только киральными свойствами ($\forall \chi_4^{(2)}, \chi_{1-3}^{(2)} = 0$) и падающая волна линейно поляризована ($\sigma = 0$), выполняется равенство

$$\operatorname{Im}[\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)] = 0. \quad (12)$$

Следующие соотношения верны при падении электромагнитных волн вдоль оси эллипсоидальной частицы ($\theta_{in} = 0, \pi, \forall \chi_{1-4}^{(2)}, \forall \varphi_{in}, \forall \sigma$):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2\omega)}(-\theta, \varphi) &= -(1 - 2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi m), \\ \text{Im} \left[(1 - (1 - i)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)} \left(\theta, \frac{\pi m}{2} + (-1)^{\frac{\theta_{in}}{\pi}} \varphi_{in} - \varphi \right) \right. \\ &\times \exp(im\pi/2) \left. \right] = \text{Im} \left[(1 - (1 - i)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \right. \\ &\times \mathbf{f}^{(2\omega)} \left(\theta, (-1)^{\frac{\theta_{in}}{\pi}} \varphi_{in} + \varphi \right) \exp(im\pi/2) \left. \right], \\ i(1 - (1 - i)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \pi m - \varphi + (-1)^{\theta_{in}/\pi} \varphi_{in}) \\ &= \left[i(1 - (1 - i)\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi + (-1)^{\theta_{in}/\pi} \varphi_{in}) \right]^*, \\ S_r^{(2\omega)}(-\theta, \varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi m), \\ S_r^{(2\omega)}(\theta, \pi m - \varphi + (-1)^{\theta_{in}/\pi} \varphi_{in}) \\ &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi + (-1)^{\theta_{in}/\pi} \varphi_{in}). \end{aligned} \quad (13)$$

Их можно видеть на диаграммах направленности как две зеркальные плоскости симметрии, каждая из которых проходит через ось эллипса поляризации и ось симметрии частицы (рис. 6, *b, c, e*).

При падении циркулярно поляризованной электромагнитной волны ($\sigma = \pm 1$) вдоль оси симметрии сферической частицы ($\theta_{in} = 0, \pi, \forall \chi_{1-4}^{(2)}, \forall \varphi_{in}$) наблюдаются свойства

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \Delta\varphi) &= \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \pi m + \varphi) \exp(i2\sigma(-1)^{\theta_{in}/\pi} \Delta\varphi), \\ i(1 - (1 - i)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \mathbf{f}^{(2\omega)}(-\theta, \varphi) \\ &= \left[i(1 - (1 - i)\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta) \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \pi m - \varphi) \exp(4i\sigma\varphi_{in}) \right]^*, \\ S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \Delta\varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi), \\ S_r^{(2\omega)}(-\theta, \varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \pi m - \varphi), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Delta\varphi$ — произвольный угол. Они отражены на диаграммах направленности в виде оси симметрии, совпадающей с осью симметрии эллипсоидальной частицы (рис. 6, *c*).

При $\forall \chi_2^{(2)}, \chi_{1,3,4}^{(2)} = 0, \forall \sigma, \forall \varphi_{in}$ и направлении волнового вектора падающей волны вдоль оси частицы ($\theta_{in} = 0, \pi$) верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\varphi \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi) &= 0, \\ \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \Delta\varphi) &= \mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi), \\ S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \Delta\varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (15)$$

Они проявляются в виде аксиальной симметрии диаграммы направленности с осью симметрии, расположенной вдоль оси симметрии диэлектрической частицы.

Для некирального слоя ($\chi_4^{(2)} = 0, \forall \chi_{1-3}^{(2)}, \forall \theta_{in}, \forall \varphi_{in}, \forall \sigma$) при распространении возбуждающего излучения вдоль оси сферической частицы выполняются соотношения

$$\text{Re}[\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi m/2 + \pi/2)] = -(-1)^m \text{Re}[\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)], \quad (16)$$

характеризующие особенности изменения фазы генерируемого излучения при смещении угла наблюдения на $\pi/2$.

Аналогично для кирального слоя ($\chi_4^{(2)} \neq 0, \forall \chi_{1-3}^{(2)} = 0, \forall \theta_{in}, \forall \varphi_{in}, \forall \sigma$) при том же направлении распространения падающей электромагнитной волны выполняется равенство

$$\text{Re}[\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi + \pi m + \pi/2)] = -\text{Im}[\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)], \quad (17)$$

связанное со свойствами фазы излучения второй гармоники.

Свойства, связанные с заменой параметров

При замене некоторых параметров задачи проявляются дополнительные свойства функций $\mathbf{f}^{(2\omega)}$ и $S_r^{(2\omega)}$. Новые значения параметров и функций, зависящие уже от этих новых параметров, будем обозначать символом волны сверху, например $\tilde{\mathbf{f}}^{(2\omega)}$ и $\tilde{S}_r^{(2\omega)}$.

Свойство 1. Замена поляризации на противоположную ($\tilde{\sigma} = -\sigma$) для генерации в некиральном слое ($\chi_{1-3}^{(2)} \neq 0, \chi_4^{(2)} = 0$) приводит к выполнению следующего соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}^{(2\omega)}(\theta, \varphi) &= -[i\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)]^*, \\ \tilde{S}_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (18)$$

Свойство 2. Изменение знака поляризации на противоположный ($\tilde{\sigma} = -\sigma$), если $\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1-3}^{(2)} = 0$, обуславливает выполнение равенств

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}^{(2\omega)}(\theta, \varphi) &= [\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi)]^*, \\ \tilde{S}_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (19)$$

Свойства 1 и 2 означают, что изменение эллиптичности возбуждающего излучения приводит к аналогичному изменению эллиптичности генерируемого излучения на противоположную. Аналитически указанные свойства объясняются сопутствующим изменением вектора $\mathbf{e}^{(2\omega)}$, характеризующего поляризацию возбуждающего излучения, на комплексно сопряженный: $\tilde{\mathbf{e}}^{(2\omega)} = [\mathbf{e}^{(2\omega)}]^*$. На диаграммах направленности указанные свойства проиллюстрированы на рис. 3, *d* и рис. 4, *c*, а также на рис. 4, *e, f*.

Свойство 3. При симметричном отражении эллипса поляризации возбуждающего излучения относительно плоскости падения OXZ ($\tilde{\varphi}_{in} = -\varphi_{in}$) или при замене

$\tilde{\varphi}_{\text{in}} = \pi - \varphi_{\text{in}}$ (отражение эллипса поляризации относительно плоскости, содержащей волновой вектор падающей волны $\mathbf{k}^{(\omega)}$ и ось OY) проявляются следующие свойства:

$$\begin{aligned} i\tilde{\mathbf{f}}^{(2\omega)}(\theta, \varphi) &= [i(1 - 2\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi)\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, -\varphi)]^*, \\ \tilde{S}_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\theta, -\varphi). \end{aligned} \quad (20)$$

Для пространственного распределения генерируемого излучения это проявится отражением диаграммы направленности относительно плоскости падения.

Свойство 4. При отражении волнового вектора относительно плоскости OXY , перпендикулярной плоскости падения, что выражается в виде замены $\tilde{\theta}_{\text{in}} = \pi - \theta_{\text{in}}$, имеют место следующие свойства:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}^{(2\omega)}(\theta, \varphi) &= -(1 - 2\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r)\mathbf{f}^{(2\omega)}(\pi - \theta, -\varphi), \\ \tilde{S}_r^{(2\omega)}(\theta, \varphi) &= S_r^{(2\omega)}(\pi - \theta, -\varphi). \end{aligned} \quad (21)$$

При указанной замене диаграмма направленности генерируемого излучения поворачивается на угол π относительно оси OX , находящейся в плоскости падения и перпендикулярной оси частицы.

Условия отсутствия излучения

При некоторых значениях параметров задачи генерация излучения в поверхностном слое эллипсоидальной частицы не происходит. Математически это выражается в том, что $\mathbf{f}^{(2\omega)}(\theta, \varphi) = 0$. Подобные условия ранее были обнаружены для генерации второй гармоники и генерации суммарной частоты в поверхностных слоях сферических [3] и цилиндрических [9] частиц.

1) При генерации в направлениях, где $q_\perp(\mathbf{x}) = 0$ или $q_z(\mathbf{x}) = 0$, отдельные компоненты интегралов $I(n_i|\mathbf{x})$, $I(n_i n_j|\mathbf{x})$ и $I(n_i n_j n_k|\mathbf{x})$ обращаются в ноль. Более того, если одновременно выполняются условия $q_\perp(\mathbf{x}) = 0$ и $q_z(\mathbf{x}) = 0$ (т.е. $\mathbf{q} = 0$), то генерация, обусловленная некиральными компонентами $\chi_{1-3}^{(2)}$, отсутствует, что ранее было замечено в статьях [2,3,10]. Если свойство дисперсии не характерно для частицы и окружающей ее среды ($\xi = 1$), то вектор рассеяния равен нулю в направлении, совпадающем с направлением волнового вектора падающей волны. Следовательно, генерация в этом направлении будет отсутствовать при $\forall \chi_{1-3}^{(2)}, \chi_4^{(2)} = 0$. Если коэффициент ξ близок по значению к единице, то излучение в направлении волнового вектора падающей электромагнитной волны будет наблюдаться, но интенсивность излучения второй гармоники окажется крайне малой, т.к. $|\mathbf{q}|a_x \ll 1$. Наглядно выполнение подобных условий можно видеть на диаграммах направленности, изображенных на рис. 2, *a-c, e*, рис. 3-6 и рис. 7, *a, b*.

Важным следствием описанного свойства является возможность его использования для нахождения киральной компоненты тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ посредством измерения

плотности мощности излучения в направлении, совпадающем с направлением волнового вектора падающей электромагнитной волны. В этом случае генерацию главным образом обуславливает именно компонента $\chi_4^{(2)}$.

2) При падении электромагнитной волны вдоль оси эллипсоидальной частицы ($\theta_{\text{in}} = 0, \pi$) в направлениях, параллельных оси частицы ($\theta = 0, \pi, \forall \varphi$), генерация не происходит при любых размерах частицы ($\forall a_x, \forall \rho$), любых значениях независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости ($\forall \chi_{1-4}^{(2)}$) и любой поляризации возбуждающего излучения ($\forall \varphi_{\text{in}}, \forall \sigma$). Указанное свойство проявляется на диаграммах направленности рис. 6, *b, c, f*.

3) Если среди независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости не равна нулю только компонента $\chi_2^{(2)}$ ($\chi_{1,3,4}^{(2)} = 0, \chi_2^{(2)} \neq 0$), то при облучении эллипсоидальной частицы циркулярно поляризованным излучением ($|\sigma| = 1$) излучение второй гармоники не генерируется. Остальные параметры при этом могут принимать произвольные значения ($\forall a_x, \forall \rho, \forall \theta_{\text{in}}, \forall \varphi_{\text{in}}, \forall \theta, \forall \varphi$).

Использование циркулярно поляризованного возбуждающего излучения может оказаться полезным, когда нужно избежать влияния компоненты $\chi_2^{(2)}$ на генерацию для измерения других компонент. В частности, для красителя малахитового зеленого [6] именно эта компонента является доминирующей и определяет форму диаграммы направленности при линейной поляризации возбуждающего излучения.

4) В случае, когда волновой вектор падающей электромагнитной волны направлен перпендикулярно оси частицы ($\theta_{\text{in}} = \pi/2$), генерация излучения не наблюдается в направлениях, параллельных указанному волновому вектору ($\theta = \pi/2$). На другие параметры задачи ограничения не накладываются ($\forall \chi_{1-4}^{(2)}, \forall a_x, \forall \rho, \forall \sigma, \forall \varphi_{\text{in}}, \forall \varphi$). Данное свойство наглядно представлено на диаграммах направленности, изображенных на рис. 2-5, 7 и рис. 6, *d*.

5) При $\chi_3^{(2)} \neq 0, \chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$ облучение сфероидальной диэлектрической частицы произвольных размеров ($\forall a_x, \forall \rho$) линейно поляризованной волной ($\sigma = 0$) генерация не происходит в плоскости OXY ($\theta = \pi/2, \forall \varphi$), если волновой вектор возбуждающего излучения перпендикулярен оси частицы ($\theta_{\text{in}} = \pi/2$), а вектор напряженности электрического поля излучения удвоенной частоты направлен вдоль оси частицы ($\varphi_{\text{in}} = 0, \pi$). Пример соответствующей диаграммы направленности можно найти на рис. 3, *d*.

6) Для значений компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости $\chi_3^{(2)} \neq 0, \chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$ при падении линейно поляризованного возбуждающего излучения ($\sigma = 0$) и ориентации любой из полуосей его эллипса поляризации перпендикулярно оси частицы ($\varphi_{\text{in}} = m_1\pi/2$) генерация не наблюдается в направлениях, для которых $\theta = \pi/2, \varphi = m_2\pi/2$ (рис. 4, *d*). Остальные параметры произвольны ($\forall a_x, \forall \rho, \forall \theta_{\text{in}}$).

7) Киральному поверхностному слою ($\chi_4^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1-3}^{(2)} = 0$) диэлектрической сферической частицы произвольных размеров ($\forall a_x, \forall \rho$) свойственно отсутствие генерации в плоскости, перпендикулярной оси частицы ($\theta = \pi/2, \forall \varphi$), если волновой вектор линейно поляризованной ($\sigma = 0$) электромагнитной волны направлен перпендикулярно оси частицы ($\theta_{in} = \pi/2$), а плоскость поляризации возбуждающего излучения содержит ось частицы ($\varphi_{in} = 0, \pi$).

8) Также генерация в киральном слое ($\chi_4^{(2)} \neq 0$, $\chi_{1-3}^{(2)} = 0$) отсутствует в плоскости OXZ ($\forall \theta, \varphi = 0, \pi$), если падающая электромагнитная волна линейно поляризована ($\sigma = 0$), а ее плоскость поляризации перпендикулярна оси частицы ($\varphi_{in} = \pm\pi/2$) при произвольных значениях других параметров ($\forall a_x, \forall \rho, \forall \theta_{in}$). Указанное свойство представлено на рис. 7, e.

9) Отсутствие генерации излучения в направлениях, параллельных оси частицы ($\theta = 0, \pi, \forall \varphi$), также проявляется при направлении волнового вектора падающей линейно поляризованной электромагнитной волны перпендикулярно оси частицы ($\theta_{in} = \pi/2$) и ориентации одной из полуосей эллипса поляризации вдоль оси частицы ($\varphi_{in} = m\pi/2$) для значений независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости $\chi_3^{(2)} \neq 0, \forall \chi_{1,2,4}^{(2)}$ (рис. 4, d). Линейные размеры частицы в этом случае могут принимать любые значения ($\forall a_x, \forall \rho$).

10) Генерация второй гармоники также не наблюдается в направлениях, перпендикулярных плоскости поляризации ($\forall \theta, \varphi = \pm\pi/2 + (-1)^{\theta_{in}/\pi} \varphi_{in}$) падающей линейно поляризованной ($\sigma = 0$) электромагнитной волны, когда не равна нулю только третья независимая компонента тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости ($\chi_{1,2,4}^{(2)} = 0, \chi_3^{(2)} \neq 0$) и волновой вектор падающей волны направлен вдоль оси симметрии частицы ($\theta_{in} = 0, \pi$). Остальные параметры также не влияют на результат ($\forall a_x, \forall \rho, \forall \varphi_{in}$). Указанное условие характерно для диаграммы направленности, иллюстрированной на рис. 4, d.

Последнее условие можно использовать, например, в случае, когда необходимо отсечь влияние компоненты $\chi_3^{(2)}$ на генерацию и измерить другие компоненты. Более подробно методика определения компонент тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ с помощью условия отсутствия излучения описана в работах [3,9], посвященных генерации в поверхностном слое сферической и цилиндрической диэлектрических частиц соответственно.

Условия генерации линейно поляризованного излучения

Помимо условий отсутствия генерации существуют также комбинации параметров задачи, при которых генерируемое излучение имеет линейную поляризацию. Математический критерий для линейной поляризации

генерируемого излучения следующий:

$$\text{Re}[(\mathbf{f}^{(2\omega)} \mathbf{e}_\theta)^* (\mathbf{f}^{(2\omega)} \mathbf{e}_\varphi)] = 0. \quad (22)$$

Выполнение последнего условия означает, что у вектора $\mathbf{f}^{(2\omega)}$ совпадают фазы компонент вдоль векторов \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_φ . Колебания вектора электрической напряженности излучения удвоенной частоты в этом случае будут происходить вдоль вектора

$$\mathbf{e}_\theta |\mathbf{e}_\theta \mathbf{f}^{(2\omega)}| + \mathbf{e}_\varphi |\mathbf{e}_\varphi \mathbf{f}^{(2\omega)}|. \quad (23)$$

Условия, при которых генерируется линейно поляризованное излучение, ранее были приведены в работах [3,9] в отношении генерации второй гармоники в сферических и цилиндрических диэлектрических частицах соответственно.

1) При облучении сферической диэлектрической частицы линейно поляризованным излучением ($\sigma = 0$) генерируется также линейно поляризованное излучение второй гармоники, если оптически нелинейный слой не обладает киральными свойствами ($\chi_{1-3}^{(2)} \neq 0, \chi_4^{(2)} = 0, \forall a_x, \forall \rho, \forall \theta_{in}, \forall \varphi_{in}$). Указанное свойство проявляется на рис. 4, a, d и является следствием свойства (11), при котором выполняется критерий (22).

2) При падении линейно поляризованной электромагнитной волны ($\sigma = 0$) на частицу в форме эллипсоида вращения линейно поляризованное излучение генерируется в случае, когда слой обладает только киральными свойствами ($\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1-3}^{(2)} = 0, \forall a_x, \forall \rho, \forall \theta_{in}, \forall \varphi_{in}$), что можно видеть на рис. 7, c-f. Генерация линейно поляризованного излучения в этом случае обусловлена выполнением свойства (12), из которого следует, что фазы компонент вектора $\mathbf{f}^{(2\omega)}$ вдоль векторов \mathbf{e}_θ и \mathbf{e}_φ совпадают.

3) Если $\chi_3^{(2)} \neq 0, \forall \chi_2^{(2)}, \chi_{1,4}^{(2)} = 0$, падающая волна распространяется вдоль оси симметрии частицы ($\theta_{in} = 0, \pi$) и ее поляризация является циркулярной ($|\sigma| = 1$), то в плоскости, перпендикулярной оси симметрии частицы ($\theta = \pi/2, \forall \varphi$), генерируется линейно поляризованное излучение второй гармоники (рис. 4, e, f). Остальные значения параметров не важны ($\forall a_x, \forall \rho, \forall \varphi_{in}$). Колебания вектора напряженности электрического поля удвоенной частоты в этом случае происходят вдоль вектора \mathbf{e}_φ .

4) Когда среди независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости не равна нулю только вторая ($\chi_2^{(2)} \neq 0, \chi_{1,3,4}^{(2)} = 0$), то при $-1 < \sigma < 1$ и любых значениях других параметров ($\forall a_x, \forall \rho, \forall \theta_{in}, \forall \varphi_{in}$) во всех направлениях ($\forall \theta, \forall \varphi$) генерируется линейно поляризованное излучение удвоенной частоты (рис. 2, b, рис. 5, c, d). Указанное свойство является следствием свойства (15).

5) Если все независимые компоненты тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ равны нулю, кроме третьей ($\chi_3^{(2)} \neq 0, \chi_{1,2,4}^{(2)} = 0$), то при ориентации волнового вектора падающей электромагнитной волны вдоль оси симметрии частицы ($\theta_{in} = 0, \pi$)

линейно поляризованное излучение второй гармоники генерируется в направлениях, перпендикулярных оси частицы ($\theta = \pi/2, \forall \varphi$). При этом вектор напряженности электрического поля второй гармоники колеблется вдоль вектора \mathbf{e}_φ .

Условия достижения линейной поляризации генерируемого излучения можно использовать для определения и уточнения отдельных компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости. Например, при выполнении третьей комбинации условий данного раздела ($|\sigma| = 1, \theta = \pi/2, \forall \varphi, \forall a_x, \forall \rho, \forall \varphi_{in}$) компонента вектора напряженности электрического поля генерируемого излучения, направленная вдоль \mathbf{e}_θ , зависит только от коэффициента $\chi_1^{(2)}$, если слой не обладает киральными свойствами ($\chi_4^{(2)} = 0$). Более подробно способы использования подобных условий при определении коэффициентов $\chi_{1-4}^{(2)}$ описаны в работах [3,9].

Заключение

Главной причиной подробного анализа случаев упрощенного тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости, когда только одна из независимых компонент тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ отлична от нуля, связана с тем, что именно в этих случаях свойства пространственного распределения генерируемого излучения (свойство симметрии, условие отсутствия генерации, условие генерации линейно поляризованного излучения) наиболее выражены и могут быть описаны аналитически.

Однако полученные нами результаты могут найти применение при анализе пространственного распределения генерируемого излучения также в случае реального тензора:

— если среди его независимых компонент одна из них значительно превышает остальные по модулю;

— если одновременно нескольким доминирующим компонентам реального тензора характерно одно и то же свойство. В этом случае на диаграмме направленности для указанного тензора проявится свойство, характерное для соответствующего упрощенного тензора.

Параметры задачи, используемые при вычислении компонент напряженности электрического поля второй гармоники, непосредственным образом влияют на характер пространственного распределения генерируемого излучения в дальней зоне. При малых размерах диэлектрической частицы каждой некиральной компоненте $\chi_{1-3}^{(2)}$ тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости соответствует собственная форма диаграммы направленности. Форма диаграммы направленности для киральной компоненты $\chi_4^{(2)}$ подобна форме для компоненты $\chi_2^{(2)}$ при значительном отличии коэффициента ρ от единицы, что ранее не проявлялось при генерации в поверхностном слое сферической диэлектрической частицы.

Величина отношения длин полуосей эллипса поляризации падающей волны напрямую влияет на направле-

ние, в котором генерируется излучение второй гармоники большей мощности, и на поляризацию излучения удвоенной частоты.

Падение линейно поляризованных электромагнитных волн на сфероидальную диэлектрическую частицу, покрытую оптически нелинейным слоем, является причиной генерации линейно поляризованного излучения, если поверхностный слой является киральным ($\chi_4^{(2)} \neq 0, \chi_{1-3}^{(2)} = 0$) или некиральным ($\chi_{1-3}^{(2)} \neq 0, \chi_4^{(2)} = 0$). Падение эллиптически или циркулярно поляризованных волн обуславливает генерацию эллиптически поляризованного излучения. При изменении поляризации возбуждающего излучения на противоположную генерируемое излучение также меняет свою поляризацию на противоположную без изменения амплитуды.

При пропорциональном увеличении линейных размеров сфероидальной диэлектрической частицы на диаграмме направленности излучения второй гармоники, как правило, выделяется до двух направлений преимущественного излучения.

Поворот волнового вектора падающей электромагнитной волны и эллипса ее поляризации обуславливает поворот главных лепестков диаграммы направленности и перераспределение плотности мощности генерируемого излучения между ними.

Свойства симметрии, выявленные на диаграммах направленности излучения удвоенной частоты, связаны с математическими свойствами функций, характеризующих пространственное распределение генерируемого излучения. Найденные математические свойства определяют симметрию пространственного распределения генерируемого излучения и отражают закономерности изменения фазовых и амплитудных характеристик генерируемого излучения, наблюдаемые при варьировании параметров задачи. Каждой из независимых компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости соответствует свой индивидуальный набор свойств, которые для большей наглядности связаны с диаграммами направленности излучения удвоенной частоты. Используя обнаруженные свойства, можно оценить доминирующую компоненту тензора $\chi_{ijk}^{(2)}$ по внешнему виду диаграммы направленности.

Условия генерации линейно поляризованного излучения и условия отсутствия генерации (наряду с математическими свойствами) характеризуют особенности пространственного распределения генерируемого излучения, присущие каждому из коэффициентов $\chi_{1-4}^{(2)}$. Указанные условия можно эффективно применять при определении отдельных компонент тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости, избегая влияния остальных компонент на картину распределения генерируемого излучения.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф20М–011).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] А.А. Шамына, В.Н. Капшай. *Опт. и спектр.*, **126** (6), 724 (2019). DOI: 10.21883/OS.2019.06.47765.374-18 [A.A. Shamyuna, V.N. Kapshai. *Opt. Spectrosc.*, **126** (6), 645 (2019). DOI: 10.1134/S0030400X19060225].
- [2] В.Н. Капшай, А.А. Шамына. *Опт. и спектр.*, **126** (6), 732 (2019). DOI: 10.21883/OS.2019.06.47766.375-18 [V.N. Kapshai, A.A. Shamyuna. *Opt. Spectrosc.*, **126** (6), 653 (2019). DOI: 10.1134/S0030400X19060134].
- [3] В.Н. Капшай, А.А. Шамына. *Опт. и спектр.*, **123** (3), 416 (2017). DOI: 10.7868/S003040341709015X [V.N. Kapshai, A.A. Shamyuna. *Opt. Spectrosc.*, **123** (3), 440 (2017). DOI: 10.1134/S0030400X17090144].
- [4] А.А. Шамына, В.Н. Капшай. *Опт. и спектр.*, **124** (1), 105 (2018). DOI: 10.21883/OS.2018.01.45366.176-17 [A.A. Shamyuna, V.N. Kapshai. *Opt. Spectrosc.*, **124** (1), 103 (2018). DOI: 10.1134/S0030400X18010198].
- [5] А.А. Шамына, В.Н. Капшай. *Опт. и спектр.*, **125** (1), 71 (2018). DOI: 10.21883/OS.2018.07.46269.56-17 [A.A. Shamyuna, V.N. Kapshai. *Opt. Spectrosc.*, **125** (1), 71 (2018). DOI: 10.1134/S0030400X1807024X].
- [6] S. Wunderlich, B. Schürer, C. Sauerbeck, W. Peukert, U. Peschel. *Phys. Rev. B*, **84** (23), 235403 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevB.84.235403
- [7] S. Viarbitskaya, V. Kapshai, P. van der Meulen, T. Hansson. *Phys. Rev. A*, **81** (5), 053850 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevA.81.053850
- [8] S. Jen, H. Dai, G. Gonella. *J. Phys. Chem. C*, **114** (10), 4302 (2010). DOI: 10.1021/jp910144c
- [9] А.А. Шамына, В.Н. Капшай. *Опт. и спектр.*, **126** (6), 740 (2019). DOI: 10.21883/OS.2019.06.47767.376-18 [A.A. Shamyuna, V.N. Kapshai. *Opt. Spectrosc.*, **126** (6), 661 (2019). DOI: 10.1134/S0030400X19060237].
- [10] J.I. Dadap, J. Shan, T. Heinz. *J. Opt. Soc. Am. B*, **21** (7), 1328 (2004). DOI: 10.1364/JOSAB.21.001328