

01,10

Нелинейные акустические эффекты в поликристаллических твердых телах с насыщением амплитудно-зависимого внутреннего трения

© В.Е. Назаров, С.Б. Кияшко

ФИЦ Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород, Россия

E-mail: v.e.nazarov@appl.sci-nnov.ru

Поступила в Редакцию 26 апреля 2022 г.

В окончательной редакции 26 мая 2022 г.

Принята к публикации 17 мая 2022 г.

Проведены теоретические и численные исследования нелинейных акустических эффектов, возникающих при распространении первоначально гармонических волн в поликристаллических твердых телах с насыщением амплитудно-зависимого внутреннего трения. Рассмотрены два основных вида гистерезисов: упругий и неупругий. Проведен сравнительный анализ закономерностей нелинейных эффектов и определены характеристики нелинейных квазигармонических волн в таких средах: амплитудно-зависимых потерь и изменения скорости распространения, а также амплитуд высших гармоник. Предложена методика определения вида гистерезиса поликристаллов, основанная на анализе теоретических и экспериментально установленных амплитудных зависимостей нелинейных эффектов.

Ключевые слова: упругие волны, амплитудно-зависимое внутреннее трение.

DOI: 10.21883/FTT.2022.08.52684.365

1. Введение

Распространение упругих волн в различных средах сопровождается разнообразными нелинейными акустическими эффектами (НАЭ): нелинейным затуханием и изменением фазовой скорости, генерацией вторичных волн на частотах комбинационных гармоник, искажением формы волны и т.д. В микронеоднородных твердых телах, обладающих сильной нелинейностью, НАЭ проявляются более интенсивно (чем в однородных слабо нелинейных средах), при этом их закономерности определяются нелинейностью уравнения состояния среды, т.е. зависимостью $\sigma = \sigma(\varepsilon)$, где σ и ε — напряжение и деформация. В свою очередь, уравнения состояния микронеоднородных твердых тел определяются нелинейными дефектами их структуры (дислокациями, зернами, трещинами и т.д.) и характеризуются различными видами неаналитической нелинейности: упругой, гистерезисной, неупругой. К сильно-нелинейным микронеоднородным твердым телам относятся многие поликристаллические металлы, сплавы и горные породы. В связи с широкой распространенностью подобных материалов, теоретические исследования НАЭ в микронеоднородных средах с различными видами нелинейности актуальны и необходимы при анализе результатов соответствующих экспериментов, проводимых с целью установления физических механизмов аномально высокой нелинейности таких сред и получения их динамических уравнений состояния.

При возбуждении интенсивных упругих колебаний и волн в поликристаллических твердых телах имеет место дислокационное амплитудно-зависимое внутрен-

нее трение (АЗВТ), что приводит к нелинейным декременту затухания (ДЗ) и дефекту модуля упругости (ДМУ) [1–11]. Явление АЗВТ объясняется в рамках гистерезисных уравнений состояния. Результаты экспериментальных исследований показывают, что с ростом амплитуды упругих колебаний в некоторых металлах (медь [5,12,13], алюминий [14,15], индий [16,17], цинк [18], свинец [19]) имеет место насыщение гистерезисных ДЗ и ДМУ. (Вообще говоря гистерезисное поведение характерно не только для механических свойств поликристаллов, но и для магнитных и диэлектрических свойств ферромагнетиков и сегнетоэлектриков, причем для них также имеют место эффекты насыщения [20,21]. Природа и физические механизмы различных гистерезисов — различны, однако их феноменологическое описание содержит много общего.)

При описании эффектов АЗВТ в поликристаллах используют два основных вида гистерезисов: упругий (или гистерезис отрыва) и неупругий (гистерезис трения или пластический гистерезис) [22,23]. Для упругого гистерезиса — $\sigma(\varepsilon = 0) = 0$, а для неупругого — $\sigma(\varepsilon = 0) \neq 0$. Примерами упругого и неупругого гистерезисов являются соответственно гистерезис Гранато–Люкке [3] и гистерезис Давиденкова [1]. Вообще говоря, оба гистерезиса объясняют эффекты АЗВТ — декремент затухания и дефект модуля упругости, однако такие гистерезисы имеют некоторые отличия. Они проявляются при изучении закономерностей эффектов АЗВТ и генерации высших гармоник, возникающих при распространении в гистерезисных средах интенсивных первоначально гармонических волн (ПГВ). Таким образом, одним из основных вопросов аналитического

описания АЗВТ является адекватный выбор гистерезисного уравнения состояния исследуемого твердого тела. Несмотря на то, что применение гистерезисных уравнений для описания эффектов АЗВТ в поликристаллах не вызывает сомнений, адекватность такого выбора представляет довольно сложную и актуальную проблему. А между тем, на основе анализа амплитудных зависимостей НАЭ, экспериментально установленных для конкретного гистерезисного материала, можно определить вид гистерезиса для этого материала. Для этого необходимо знание закономерностей НАЭ в твердых телах с различными видами гистерезисов, в том числе и с насыщением эффектов АЗВТ.

В настоящей работе проводятся теоретические и численные исследования НАЭ, возникающих при распространении ПГВ в гистерезисных твердых телах с насыщением АЗВТ. Здесь рассматриваются два вида квадратичных гистерезисов: упругий и неупругий. Проведен сравнительный анализ закономерностей нелинейных эффектов и определены характеристики нелинейных квазигармонических волн в таких средах: амплитудно-зависимых потерь и изменения скорости распространения, а также амплитуд второй и третьей гармоник. На основе анализа и соответствия аналитических и экспериментально установленных амплитудных зависимостей НАЭ предложена методика определения вида гистерезиса для поликристаллических твердых тел.

2. Гистерезисные уравнение состояния для твердых тел с насыщением АЗВТ

Нелинейное уравнение состояния твердого тела представим в следующем виде:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - f(\varepsilon)], \quad (1)$$

где E — модуль упругости, $f(\varepsilon)$ — нелинейная (здесь гистерезисная) функция, $|f(\varepsilon)| \ll |\varepsilon| < |\varepsilon_{th}| \ll 1$, $|f_\varepsilon(\varepsilon)| \ll 1$, $|\sigma| < |\sigma_{th}|$, $\sigma_{th} = E\varepsilon_{th}$ — максимальное напряжение (предел упругости), при превышении которого в твердом теле возникают необратимые пластические деформации; для многих материалов $|\varepsilon_{th}| > 10^{-4} - 10^{-3} \ll 1$.

Экспериментальные исследования АЗВТ для продольных упругих волн, содержащих фазы сжатия ($\varepsilon < 0$) и растяжения ($\varepsilon > 0$), показывают, что при не очень больших амплитудах деформации, когда нет насыщения эффектов АЗВТ, для многих поликристаллических металлов (например, медь [12], цинк [18], свинец [19]) и горных пород (гранит, магнезит, известняк) [24] — $f(\varepsilon) \propto \varepsilon^2$. Такие исследования также показывают, что для этих поликристаллов амплитудно-зависимые ДМУ и ДЗ определяются разными параметрами нелинейности и, следовательно, для продольных напряжений σ и деформаций ε гистерезис в зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ состоит

из квадратичных, но, вообще говоря, несимметричных ветвей.

Для упругого квадратичного гистерезиса, аналогичного гистерезису Гранато—Люкке [3], и учитывающего насыщение ДМУ и ДЗ, функция $f(\varepsilon)$ имеет вид

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{2(1 + \gamma_0|\varepsilon|)} \times \begin{cases} \gamma_1\varepsilon^2, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} > 0, \\ -\gamma_2\varepsilon^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\varepsilon_m\varepsilon, & \varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} < 0, \\ -\gamma_3\varepsilon^2, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} < 0, \\ \gamma_4\varepsilon^2 + (\gamma_3 + \gamma_4)\varepsilon_m\varepsilon, & \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где ε_m — амплитуда деформации, $\gamma_{0,1-4}$ — безразмерные параметры нелинейности, $\gamma_0 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 \geq 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 \geq 0$, $|\gamma_{1-4}\varepsilon_m| \ll 1$. (В общем случае, $\gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3 \neq \gamma_4$.) В теории Гранато—Люкке гистерезис поликристаллов связывается с периодическим отрывом дислокаций от примесных атомов (и последующим закреплением на них же) под действием внешнего переменного напряжения.

Для неупругого квадратичного гистерезиса, аналогичного гистерезису Давиденкова [1], и учитывающего насыщение ДМУ и ДЗ, функция $f(\varepsilon)$ имеет вид

$$f(\varepsilon) = \frac{\beta\varepsilon_m\varepsilon}{1 + \alpha_1|\varepsilon|} + \frac{1}{2(1 + \alpha_2|\varepsilon|)} \times \begin{cases} \beta_1\varepsilon^2 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\beta_2\varepsilon^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\varepsilon_m^2, & \dot{\varepsilon} < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\alpha_{1,2}, \beta, \beta_{1,2}$ — параметры нелинейности, $\alpha_{1,2} \geq 0$, $\beta_1 + \beta_2 \geq 0$, $|\beta|\varepsilon_m \ll 1$, $|\beta_{1,2}|\varepsilon_m \ll 1$. (В общем случае, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta \neq \beta_1 \neq \beta_2$.) При $\alpha_{1,2} = 0$ и $\beta = \beta_1 = \beta_2$ уравнения (1), (3) описывают симметричный квадратичный гистерезис Давиденкова (с точностью до обозначений он совпадает с ферромагнитным гистерезисом Рэлея [21,25]). В уравнении (3) первое (негистерезисное) слагаемое определяет ДМУ, а второе (гистерезисное) — ДЗ. В модели Давиденкова гистерезисное поведение твердого тела связывается с его микропластической деформацией [1], вызванной обратимым смещением дислокаций под действием внешнего переменного напряжения. (В работе [26] рассматривался аналогичный гистерезис, в котором насыщение эффектов АЗВТ определяется множителем $(1 + \alpha_0\varepsilon_m)^{-1} \leq 1$, $\alpha_0 \geq 0$).

В поликристаллах с упругим гистерезисом (2) за насыщение ДМУ и ДЗ отвечает один и тот же множитель $(1 + \gamma_0|\varepsilon|)^{-1} \leq 1$, а с неупругим (3) — два разных: $(1 + \alpha_1|\varepsilon|)^{-1} \leq 1$ и $(1 + \alpha_2|\varepsilon|)^{-1} \leq 1$. Гистерезисы (2), (3) и при $\gamma_0 = 0$, $\alpha_{1,2} = 0$ (нет насыщения) и при $\gamma_0\varepsilon_m > 1$, $\alpha_{1,2}\varepsilon_m > 1$ (есть насыщение) существенно различаются, поэтому и закономерности НАЭ в твердых телах с такими гистерезисами, будут разными. Гистерезисы (2), (3) состоят из четырех ветвей ($\varepsilon \geq 0$, $\dot{\varepsilon} > 0$,

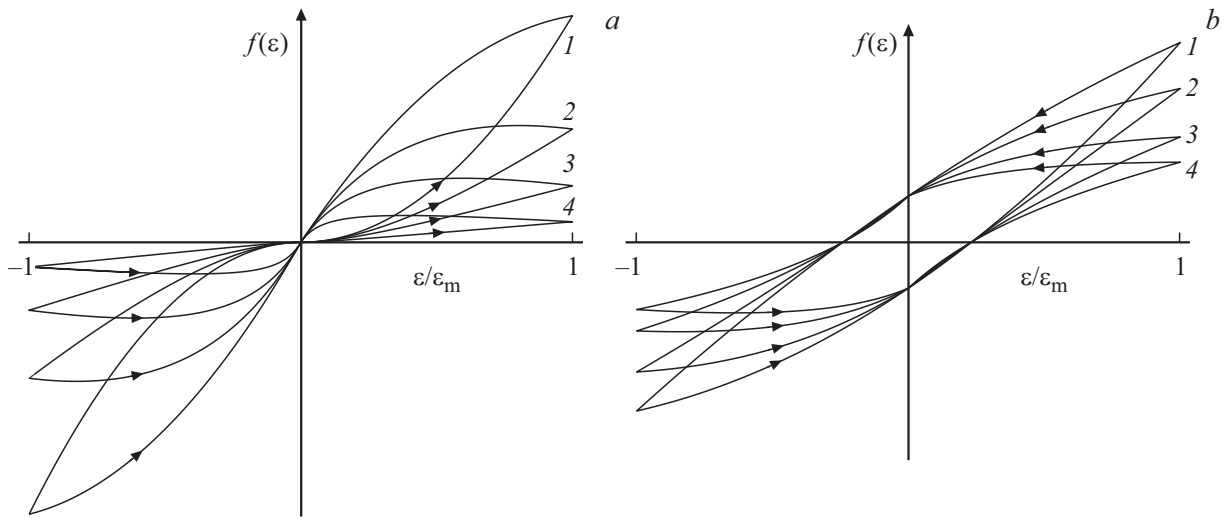


Рис. 1. Качественный вид упругого — (а) и неупругого — (б) гистерезисов при различных параметрах γ_0 и $\alpha_{1,2}$: $\gamma_0 = 0, \alpha_{1,2} = 0-1$ и $\gamma_0 > 0, \alpha_{1,2} > 0 - 2, 3, 4$. Увеличение номера петли соответствует росту параметров γ_0 и $\alpha_{1,2}$.

$\varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} < 0, \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} < 0, \varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} > 0$), переходящих друг в друга при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \pm \varepsilon_m$. Качественный вид этих гистерезисов при $\gamma_0 = 0, \alpha_{1,2} = 0$ и $\gamma_0 > 0, \alpha_{1,2} > 0$ приведен на рис. 1, из которого видно, что с ростом параметров γ_0 и $\alpha_{1,2}$ формы петель гистерезисов изменяются, при этом их площадь и наклон уменьшаются, что соответствует насыщению эффектов АЗВТ.

В работах [14,27], в плане развития дислокационной теории Гранато–Люкке [3,5,6], предполагается, что движение дислокаций, оторвавшихся от примесных атомов, ограничивается не только их линейным натяжением, но и полем напряжений соседних примесных атомов: дислокации, оторвавшиеся от одних примесных атомов, закрепляются на других — соседних. Такой механизм ограничивает удлинение сегментов дислокаций и рост площади петли гистерезисной зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. При малых амплитудах ε_m , это приводит к линейной зависимости нелинейных потерь от ε_m , а при больших — к их насыщению, при этом разгрузочные ветви ($\varepsilon \geq 0, \dot{\varepsilon} < 0$ и $\varepsilon \leq 0, \dot{\varepsilon} > 0$) в гистерезисе $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ становятся нелинейными. В работах [14,27] аналитических зависимостей $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ не получено.

Отметим, что, в отличие от ферромагнитных и сегнетоэлектрических гистерезисов, легко наблюдаемых на экране осциллографа [20], аналогичное наблюдение „механических“ гистерезисов — задача технически более сложная, хотя такие гистерезисы, конечно, наблюдались [4,6]. Это связано с тем, что ферромагнитные и сегнетоэлектрические гистерезисы выражены намного сильнее, чем гистерезисы „механические“: в области напряжений, много меньших предела упругости твердых тел ($|\varepsilon| \ll |\varepsilon_{th}|$), гистерезисная нелинейность мала: $|f(\varepsilon)| \ll |\varepsilon| \ll 1$. В связи с этим, о „механических“ гистерезисах можно судить по закономерностям НАЭ в твердых телах, возникающих при распространении в них интенсивных упругих волн. В этом случае проявления

гистерезисных свойств среды накапливаются в нелинейных искажениях волны по мере ее распространения и становятся вполне заметными для измерения.

3. Нелинейное волновое уравнение

При описании упругих волн в средах с сильной акустической нелинейностью ($|f(\varepsilon)| \gg |\Gamma|\varepsilon^2$, Γ — параметр квадратичной нелинейности однородных сред, $|\Gamma| < 10$), можно не учитывать геометрическую нелинейность уравнений движения по сравнению с физической нелинейностью уравнения состояния. В этом приближении уравнения теории упругости в лагранжовой и эйлеровой формах совпадают [24]. Подставляя (1) в уравнение движения (в форме Лагранжа) $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$, и учитывая линейную диссипацию среды [28], получим одномерное волновое уравнение для продольного (вдоль оси x) смещения $U = U(x, t)$:

$$U_{tt} - C_0^2 U_{xx} = -C_0^2 [f(\varepsilon) - U_x^2/2]_x + \eta U_{xxt}, \quad (4)$$

где $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$ — линейная скорость продольной волны, η — коэффициент линейной диссипации, ρ — плотность, $\varepsilon(x, t) = U_x(x, t) + U_x^2(x, t)/2, \eta|U_{xxt}| \ll C_0^2|U_{xx}|$.

Дифференцируя уравнение (4) по x , и учитывая, что $|f(\varepsilon)| \ll |\varepsilon| \ll 1, |f(\varepsilon)| \gg \varepsilon^2, \varepsilon \approx U_x$, получим уравнение для продольной деформации $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$:

$$\varepsilon_{tt} - C_0^2 \varepsilon_{xx} = -C_0^2 [f(\varepsilon)]_{xx} + \eta \varepsilon_{xxt}. \quad (5)$$

Переходя в уравнении (5) к сопровождающей системе координат $\tau = t - x/C_0, x' = x \geq 0$, получим нелинейное эволюционное уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{2C_0} \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \tau} + \frac{\eta}{2C_0^3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2}. \quad (6)$$

Аналогичное волновое уравнение имеет место для скорости $V(x, \tau) = U_\tau(x, \tau)$ частиц среды, поскольку для бегущих волн выполняется соотношение: $\varepsilon(x, \tau) = -V(x, \tau)/C_0$.

Для исследования нелинейных акустических эффектов, возникающих при распространении в поликристалле ПГВ, решим уравнение (6) методом возмущений. Граничное условие зададим в виде гармонического колебания: $\varepsilon(x = 0, t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$, где ε_0 и ω — амплитуда деформации и частота колебаний, создаваемых излучателем.

Полагая в уравнение (6), что

$$\varepsilon(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varepsilon}_n(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(\varepsilon_0, x) \sin[n\theta + \psi_n(\varepsilon_0, x)],$$

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \bar{\varepsilon}_n(x, \theta) \right| \ll |\bar{\varepsilon}_1(x, \theta)|,$$

$$\varepsilon_1(\varepsilon_0, x) \approx \varepsilon_m(\varepsilon_0, x), \quad \varepsilon_{n \geq 2}(x = 0) = 0,$$

получим уравнение для амплитуд $\varepsilon_n(\varepsilon_0, x)$ и фаз $\Phi(\varepsilon_0, x)$, $\psi_n(\varepsilon_0, x)$:

$$\left(\frac{d\varepsilon_n}{dx} + \frac{\eta K_n^2}{2C_0} \varepsilon_n \right) \begin{pmatrix} \cos \psi_n \\ \sin \psi_n \end{pmatrix} \mp \varepsilon_n \left(n \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\psi_n}{dx} \right) \times \begin{pmatrix} \sin \psi_n \\ \cos \psi_n \end{pmatrix} = \pm \frac{K_n}{2} \begin{pmatrix} a_n(\varepsilon_1) \\ b_n(\varepsilon_1) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\begin{pmatrix} a_n(\varepsilon_1) \\ b_n(\varepsilon_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f[\bar{\varepsilon}_1(x, \theta)] \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} d\theta,$$

$$K_n = nK_1 = n\omega/C_0, \quad \theta = \omega\tau + \Phi(x), \quad \psi_1(x) = 0.$$

Производные $\Phi_x(\varepsilon_0, x)$ и $\psi_{nx}(\varepsilon_0, x)$ определяют локальные изменения фазовых скоростей $C_1(\varepsilon_0, x)$ и $C_n(\varepsilon_0, x)$ первичной волны и ее гармоник:

$$\xi(\varepsilon_0, x) = \frac{C_1(\varepsilon_0, x) - C_0}{C_0} = \frac{1}{K_1} \frac{d\Phi(\varepsilon_0, x)}{dx},$$

$$\xi_n(\varepsilon_0, x) = \frac{C_n(\varepsilon_0, x) - C_1(\varepsilon_0, x)}{C_0} = \frac{1}{nK_1} \frac{d\psi_n(\varepsilon_0, x)}{dx}.$$

Из последнего выражения следует, что если $\xi_n(\varepsilon_0, x) \neq 0$, то $C_n(\varepsilon_0, x) \neq C_1(\varepsilon_0, x)$, т.е. среда обладает нелинейной дисперсией фазовой скорости. Определим эффективные (средние) нелинейные декремент затухания $\delta(\varepsilon_0)$ и относительное изменение фазовой скорости $\xi(\varepsilon_0)$ первичной волны на расстоянии x от излучателя

$$\delta(\varepsilon_0) = -2\pi \left(\frac{\ln[\varepsilon_1(x)/\varepsilon_0]}{K_1 x} + \frac{\eta\omega}{2C_0^2} \right),$$

$$\xi(\varepsilon_0) = \frac{1}{K_1 x} \int_0^x \xi(\varepsilon_0, x') dx' = \frac{\Phi(\varepsilon_0, x)}{K_1 x}. \quad (8)$$

3.1. НАЭ в средах с упругим гистерезисом

Для упругого гистерезиса (2) уравнения (7) для амплитуд и фаз первых трех гармоник имеют вид

$$\frac{d\varepsilon_1}{dz} + g\varepsilon_1 = -\frac{1}{2\gamma_0^2} \left(1 + \frac{\gamma_0\varepsilon_1}{2} - \frac{(1 + \gamma_0\varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0\varepsilon_1)}{\gamma_0\varepsilon_1} \right),$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{2\gamma_0^2\varepsilon_1} \left(1 - \frac{b}{\gamma_0\varepsilon_1} \right) \times \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_0\varepsilon_1 - \frac{\ln[\gamma_0\varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}]}{\sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}} \right) - \frac{\pi b}{8\gamma_0},$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_2}{dz} + 4g\varepsilon_2 \right) \cos \psi_2 - \varepsilon_2 \left(2 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz} \right) \sin \psi_2 = -\frac{c\varepsilon_1}{3\gamma_0} \left\{ 1 - \frac{6}{\gamma_0\varepsilon_1} \left(\frac{d}{c} - \frac{1}{\gamma_0\varepsilon_1} \right) \left(1 - \frac{\pi}{2\gamma_0\varepsilon_1} + \frac{[2 - (\gamma_0\varepsilon_1)^2] \ln[\gamma_0\varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}]}{2\gamma_0\varepsilon_1 \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}} \right) \right\},$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_2}{dz} + 4g\varepsilon_2 \right) \sin \psi_2 + \varepsilon_2 \left(2 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz} \right) \cos \psi_2 = \frac{d\varepsilon_1}{3\gamma_0} \left(1 - \frac{3}{\gamma_0\varepsilon_1} - \frac{6}{(\gamma_0\varepsilon_1)^2} + \frac{6(1 + \gamma_0\varepsilon_1) \ln(1 + \gamma_0\varepsilon_1)}{(\gamma_0\varepsilon_1)^3} \right), \quad (9)$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_3}{dz} + 9g\varepsilon_3 \right) \cos \psi_3 - \varepsilon_3 \left(3 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz} \right) \sin \psi_3 = -\frac{\varepsilon_1}{4\gamma_0} \left(1 + \frac{10}{\gamma_0\varepsilon_1} - \frac{12}{(\gamma_0\varepsilon_1)^2} - \frac{24}{(\gamma_0\varepsilon_1)^3} + \frac{6(1 + \gamma_0\varepsilon_1)[4 - (\gamma_0\varepsilon_1)^2] \ln(1 + \gamma_0\varepsilon_1)}{(\gamma_0\varepsilon_1)^4} \right),$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_3}{dz} + 9g\varepsilon_3 \right) \sin \psi_3 + \varepsilon_3 \left(3 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz} \right) \cos \psi_3 = -\frac{\varepsilon_1}{2\gamma_0} \left(1 - \frac{b}{\gamma_0\varepsilon_1} \right) \left(1 - \frac{3\pi}{2\gamma_0\varepsilon_1} - \frac{12}{(\gamma_0\varepsilon_1)^2} + \frac{6\pi}{(\gamma_0\varepsilon_1)^3} - \frac{3[4 - 3(\gamma_0\varepsilon_1)^2] \ln[\gamma_0\varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}]}{(\gamma_0\varepsilon_1)^3 \sqrt{(\gamma_0\varepsilon_1)^2 - 1}} \right),$$

где $z = aK_1x$,

$$a = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{2\pi}, \quad b = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4},$$

$$c = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}, \quad d = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4},$$

$$g = \frac{\pi\eta\omega}{(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)C_0^2}, \quad gz = \frac{\eta\omega^2 x}{2C_0^3}.$$

В общем случае аналитических решений уравнений (9) получить не удастся, поэтому мы рассмотрим

два простых предельных случая, а затем приведем результаты численного решения этих уравнений.

В малоамплитудном режиме ($\gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$), при $gz \ll 1$ и $\varepsilon_0 z \ll 1$ получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\varepsilon_0) &= \frac{\varepsilon_0 \exp(-gz)}{1 + \varepsilon_0 z / 12}, \quad \Phi(\varepsilon_0) = -b_1 \varepsilon_0 z, \\ \delta(\varepsilon_0) &= \frac{\pi a \varepsilon_0}{6}, \quad \xi(\varepsilon_0) = -ab_1 \varepsilon_0, \\ r(\varepsilon_0) &= \frac{\delta(\varepsilon_0)}{|\xi(\varepsilon_0)|} = \frac{\pi}{6b_1} = \text{const}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\varepsilon_0) &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \varepsilon_0^2 z, \quad \varepsilon_3(\varepsilon_0) = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \varepsilon_0^2 z, \\ \text{tg } \psi_n &= -a_n / b_n, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= \pi/8 + b/3, \quad a_2 = \pi c/8 + d/3, \quad b_2 = -d/6, \\ a_3 &= 1/20, \quad b_3 = -b/5. \end{aligned}$$

В режиме насыщения ($\gamma_0 \varepsilon_0 \gg 1$) при $gz \ll 1$ получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(\varepsilon_0) &= \varepsilon_0 \exp\left[-\left(g + \frac{1}{4\gamma_0}\right)z\right], \\ \Phi(\varepsilon_0) &= -\frac{z}{2\gamma_0} \left(1 + \frac{\pi b}{4}\right), \\ \delta(\varepsilon_0) &= \frac{\pi a}{2\gamma_0}, \quad \xi(\varepsilon_0) = -\frac{a}{2\gamma_0} \left(1 + \frac{\pi b}{4}\right), \\ r(\varepsilon_0) &= \frac{\delta(\varepsilon_0)}{|\xi(\varepsilon_0)|} = \frac{\pi}{1 + \pi b/4} = \text{const}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2(\varepsilon_0) &= \frac{\sqrt{c^2 + d^2} \varepsilon_0 z}{3\gamma_0}, \\ \psi_2(\varepsilon_0) &= \frac{\pi}{2} + \text{arctg}\left(\frac{c}{d}\right) + \frac{z}{\gamma_0} \left(1 + \frac{\pi b}{4}\right), \\ \varepsilon_3(\varepsilon_0) &= \frac{\sqrt{5} \varepsilon_0 z}{4\gamma_0}, \\ \psi_3(\varepsilon_0) &= \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3z}{2\gamma_0} \left(1 + \frac{\pi b}{4}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

3.2. НАЭ в средах с неупругим гистерезисом

Аналогично, для неупругого гистерезиса (3) уравнения (7) для амплитуд и фаз первых трех гармоник имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1}{dz} + g\varepsilon_1 &= -\frac{1}{\alpha_2^2} \left(1 - \frac{\alpha_2 \varepsilon_1}{2} - \frac{[1 - (\alpha_2 \varepsilon_1)^2] \ln(1 + \alpha_2 \varepsilon_1)}{\alpha_2 \varepsilon_1}\right), \\ \frac{d\Phi}{dz} &= \frac{4b}{\alpha_1^2 \varepsilon_1} \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \varepsilon_1 - \frac{2}{\sqrt{1 - (\alpha_1 \varepsilon_1)^2}} \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \alpha_1 \varepsilon_1}{1 + \alpha_1 \varepsilon_1}}\right)\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d\varepsilon_2}{dz} + 4g\varepsilon_2\right) \cos \psi_2 - \varepsilon_2 \left(2 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz}\right) \sin \psi_2 \\ &= -\frac{c\varepsilon_1}{3\gamma_0} \left\{1 - \frac{6}{2\gamma_0 \varepsilon_1} \left(\frac{d}{c} - \frac{1}{\gamma_0 \varepsilon_1}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \frac{\pi}{2\gamma_0 \varepsilon_1} + \frac{[2 - (\gamma_0 \varepsilon_1)^2] \ln[\gamma_0 \varepsilon_1 + \sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}]}{2\gamma_0 \varepsilon_1 \sqrt{(\gamma_0 \varepsilon_1)^2 - 1}}\right)\right\}, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_2}{dz} + 4g\varepsilon_2\right) \sin \psi_2 + \varepsilon_2 \left(2 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_2}{dz}\right) \cos \psi_2 = 0,$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_3}{dz} + 9g\varepsilon_3\right) \cos \psi_3 - \varepsilon_3 \left(3 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz}\right) \sin \psi_3$$

$$\begin{aligned} &= \frac{9\varepsilon_1}{2\alpha_2} \left(1 - \frac{22}{9\alpha_2 \varepsilon_1} - \frac{4}{3(\alpha_2 \varepsilon_1)^2} + \frac{16}{3(\alpha_2 \varepsilon_1)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2[1 - (\alpha_2 \varepsilon_1)^2][4 - (\alpha_2 \varepsilon_1)^2] \ln(1 + \alpha_2 \varepsilon_1)}{3(\alpha_2 \varepsilon_1)^4}\right), \end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\varepsilon_3}{dz} + 9g\varepsilon_3\right) \sin \psi_3 + \varepsilon_3 \left(3 \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\psi_3}{dz}\right) \cos \psi_3$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{4b\varepsilon_1}{\alpha_1} \left[1 - \frac{3\pi}{2\alpha_1 \varepsilon_1} - \frac{12}{(\alpha_1 \varepsilon_1)^2} + \frac{6\pi}{(\alpha_1 \varepsilon_1)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{6[4 - 3(\alpha_1 \varepsilon_1)^2]}{(\alpha_1 \varepsilon_1)^3 \sqrt{1 - (\alpha_1 \varepsilon_1)^2}} \text{arctg}\left(\sqrt{\frac{1 - \alpha_1 \varepsilon_1}{1 + \alpha_1 \varepsilon_1}}\right)\right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$z = aK_1 x, \quad a = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\pi}, \quad g = \frac{\pi \eta \omega}{(\beta_1 + \beta_2) C_0^2},$$

$$b = \frac{\beta}{\beta_1 + \beta_2}, \quad c = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}, \quad gz = \frac{\eta \omega^2 x}{2C_0^3}.$$

В малоамплитудном режиме ($\alpha_{1,2} \varepsilon_0 \ll 1$) при $gz \ll 1$ и $\varepsilon_0 z \ll 1$ получим

$$\varepsilon_1(\varepsilon_0) = \frac{\varepsilon_0 \exp(-gz)}{1 + (2\varepsilon_0 z/3)}, \quad \Phi(\varepsilon_0) = -\pi b \varepsilon_0 z,$$

$$\delta(\varepsilon_0) = \frac{4\pi a \varepsilon_0}{3}, \quad \xi(\varepsilon_0) = -\pi a b \varepsilon_0,$$

$$r(\varepsilon_0) = \frac{\delta(\varepsilon_0)}{|\xi(\varepsilon_0)|} = \frac{4}{3b} = \text{const},$$

$$\varepsilon_2(\varepsilon_0) = -\frac{\pi c \varepsilon_0^2 z}{4}, \quad \psi_2(\varepsilon_0) = \pi b \varepsilon_0 z,$$

$$\varepsilon_3(\varepsilon_0) = -\frac{2\varepsilon_0^2 z}{5}, \quad \psi_3(\varepsilon_0) = \frac{3\pi b \varepsilon_0 z}{2}. \quad (13)$$

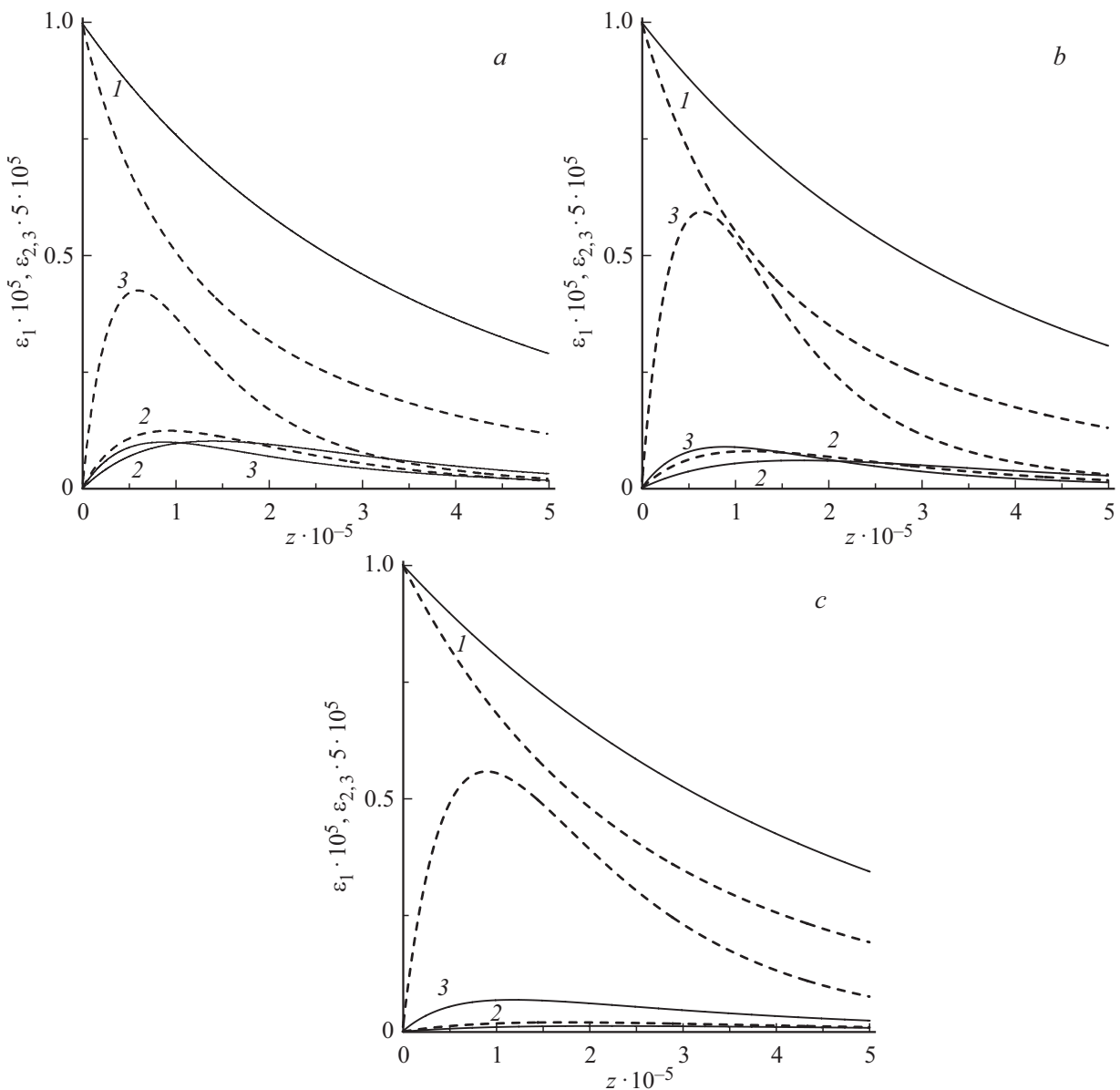


Рис. 2. Зависимости амплитуд ε_1 — 1, ε_2 — 2, ε_3 — 3 от z при $\varepsilon_0 = 10^{-5}$, $g = 2 \cdot 10^{-6}$, $b = 1/5$, $c = 1/10$, $d = 0$ и различных значениях γ_0 и $\alpha_1 = \alpha_2$: $\gamma_0, \alpha_{1,2} = 0$ — а, $\gamma_0, \alpha_{1,2} = 10^5$ — б, $\gamma_0, \alpha_{1,2} = 10^6$ — с. Сплошные линии — для упругого гистерезиса, пунктирные — для неупругого.

В режиме насыщения ($\alpha_{1,2}\varepsilon_0 \gg 1$) при $gz \ll 1$ и $[\ln(\alpha_2\varepsilon_0)/\alpha_2]z \ll 1$ получим:

$$\varepsilon_1(\varepsilon_0) = \varepsilon_0 \exp \left[- \left(g + \frac{\ln(\alpha_2\varepsilon_0)}{\alpha_2} \right) z \right] = \varepsilon_0^{n(z)} \alpha_2^{-z/\alpha_2} \exp(-gz),$$

$$\Phi(\varepsilon_0) = -\frac{4bz}{\alpha_1},$$

$$\delta(\varepsilon_0) = 2\pi a \frac{\ln(\alpha_2\varepsilon_0)}{\alpha_2}, \quad \xi(\varepsilon_0) = -\frac{4ab}{\alpha_1},$$

$$r(\varepsilon_0) = \frac{\delta(\varepsilon_0)}{|\xi(\varepsilon_0)|} = \frac{\pi\alpha_1 \ln(\alpha_2\varepsilon_0)}{2\alpha_2 b} \neq \text{const},$$

$$\varepsilon_2(\varepsilon_0) = -\frac{2c\varepsilon_0 z}{3\alpha_2}, \quad \psi_2(\varepsilon_0) = \frac{4bz}{\alpha_1},$$

$$\varepsilon_3(\varepsilon_0) = -4\varepsilon_0 z \left[\left(\frac{b}{\alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{3 \ln(\alpha_2\varepsilon_0)}{4\alpha_2} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\psi_3(\varepsilon_0) = \frac{6b}{\alpha_1} \left(z + \frac{2\alpha_2}{9 \ln(\alpha_2\varepsilon_0)} \right), \quad (14)$$

где $n(z) = 1 - z/\alpha_2 < 1$.

Из выражений (10), (13) следует, что в малоамплитудном режиме (при $z = \text{const}$) амплитудные зависимости НАЭ для сред с упругим и неупругим гистерезисами одинаковы: $\delta(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0$, $\xi(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0$, $\varepsilon_{2,3}(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0^2$. В этом режиме независимыми характеристиками нелинейной волны являются $\delta(\varepsilon_0)$, $\xi(\varepsilon_0)$ и $\varepsilon_2(\varepsilon_0)$, а $\varepsilon_3(\varepsilon_0)$ можно вычислить по измеренным значениям $\delta(\varepsilon_0)$ и $\xi(\varepsilon_0)$. Таким образом, из сравнения и соответствия (или несо-

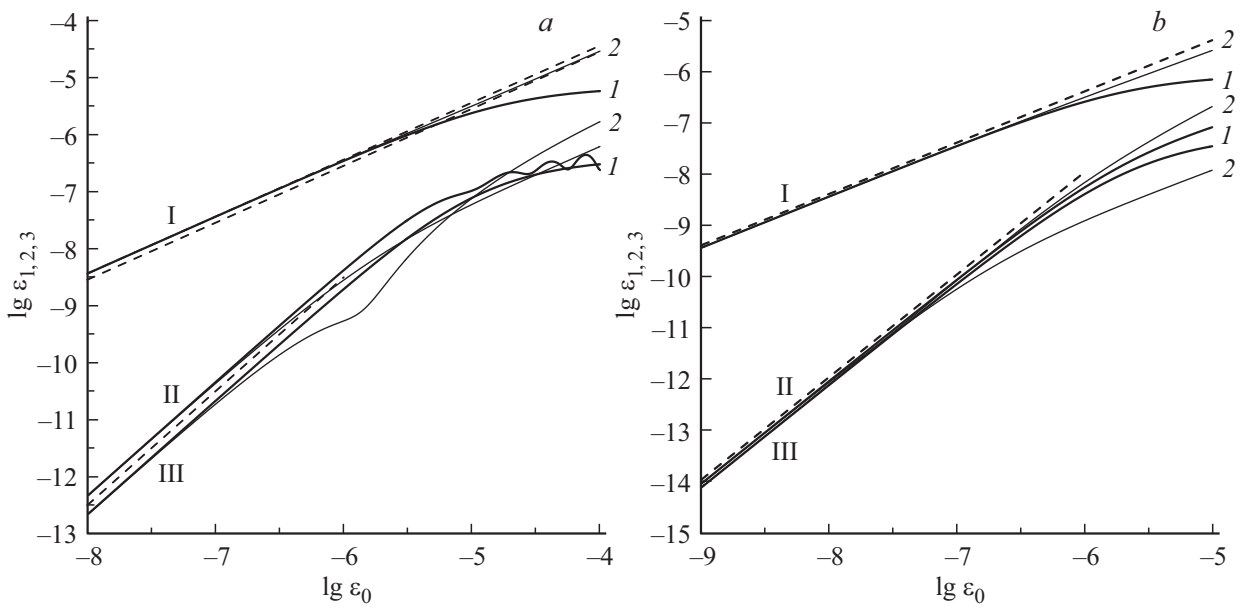


Рис. 3. *a* — зависимости ε_1 — I, ε_2 — II и ε_3 — III от ε_0 при $z = 10^6$, $g = 10^{-6}$, $b = 1/2$, $c = 1/5$, $d = 0$ и различных значениях параметра γ_0 : $\gamma_0 = 0$ — I и $\gamma_0 = 10^6$ — 2. Пунктирные линии соответствуют зависимостям: I — $\varepsilon_1 \propto \varepsilon_0$, II, III — $\varepsilon_{2,3} \propto \varepsilon_0^2$; *b* — зависимости ε_1 — I, ε_2 — II и ε_3 — III от ε_0 при $z = 10^6$, $g = 10^{-6}$, $b = 1/2$, $c = 1/5$ и различных значениях параметра $\alpha_1 = \alpha_2$: $\alpha_{1,2} = 1$ и $\alpha_{1,2} = 10^7$ — 2. Пунктирные линии соответствуют зависимостям: I — $\varepsilon_1 \propto \varepsilon_0$, II, III — $\varepsilon_{2,3} \propto \varepsilon_0^2$.

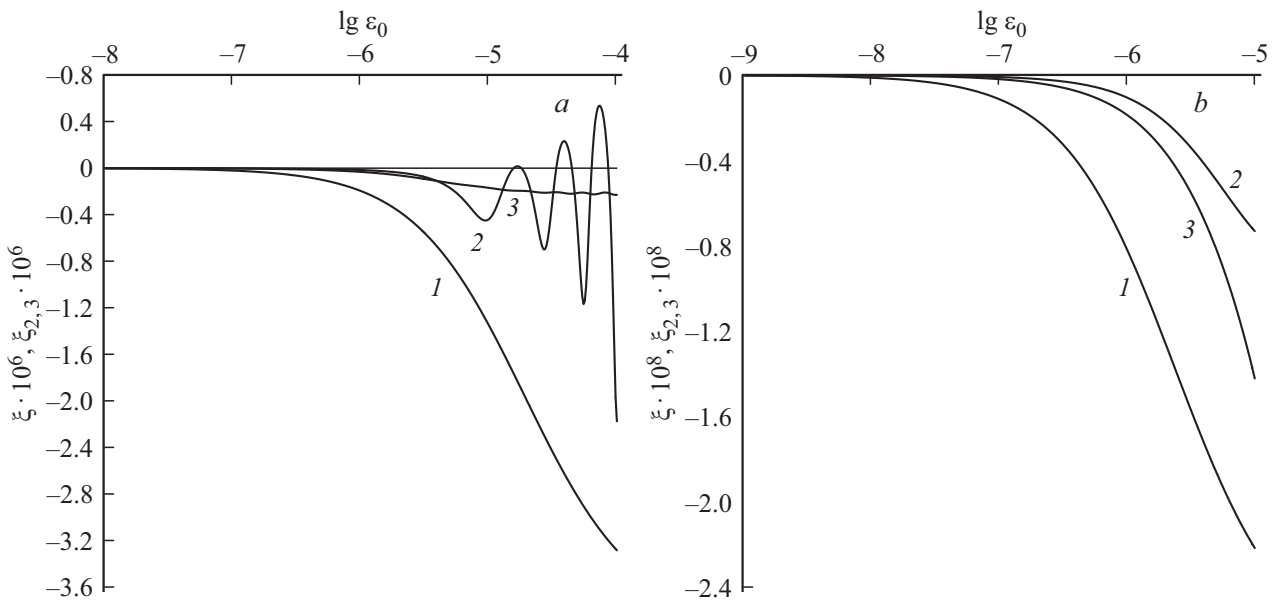


Рис. 4. *a* — зависимости $\xi(\varepsilon_0, z)$ — линии 1 и $\xi_{2,3}(\varepsilon_0, z)$ — линии 2, 3 от ε_0 для упругого гистерезиса при $\gamma_0 = 0$, $z = 10^6$, $b = 1/2$, $c = 1/5$, $d = 0$; *b* — зависимости $\xi(\varepsilon_0, z)$ — линии 1 и $\xi_{2,3}(\varepsilon_0, z)$ — линии 2, 3 от ε_0 для неупругого гистерезиса при $\alpha_{1,2} = 0$, $z = 10^6$, $b = 1/2$, $c = 1/5$, $d = 0$.

ответствия) вычисленной (для упругого и неупругого гистерезисов) и измеренной в эксперименте амплитуде $\varepsilon_3(\varepsilon_0)$ можно определить, каким гистерезисом определяются эффекты АЗВТ в исследованном поликристалле. В режиме же насыщения амплитудные зависимости $\xi(\varepsilon_0)$ и $\varepsilon_2(\varepsilon_0)$ для разных гистерезисов одинаковы [$\xi(\varepsilon_0) = \text{const}$, $\varepsilon_2(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0$], а $\delta(\varepsilon_0)$ и $\varepsilon_3(\varepsilon_0)$ — различны, причем для упругого гистерезиса — $\delta(\varepsilon_0) = \text{const}$,

$\varepsilon_3(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0$, а для неупругого — $\delta(\varepsilon_0) \propto \ln(\alpha_2 \varepsilon_0) \neq \text{const}$,

$$\varepsilon_3(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0 \left[\left(\frac{b}{\alpha_1} \right)^2 + \left(\frac{3 \ln(\alpha_2 \varepsilon_0)}{4 \alpha_2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Здесь ответ на вопрос, каким гистерезисом (упругим или неупругим) определяются эффекты АЗВТ в исследованном поликристалле, можно получить, во-первых, из соответствия установленных в эксперименте амплитудных

зависимостей НАЭ с аналитическими (11), (14), и, во-вторых, из сравнения параметров насыщения γ_0 и $\alpha_{1,2}$, определенных из зависимостей $\delta(\varepsilon_0)$, $\xi(\varepsilon_0)$ и $\varepsilon_{2,3}(\varepsilon_0)$ от ε_0 .

4. Результаты численного счета

Выражения (10)–(14) определяют закономерности НАЭ в твердых телах с упругим (2) и неупругим (3) гистерезисами в предельных режимах: без насыщения и с насыщением АЗВТ. Более полное представление о поведении НАЭ (при конкретных параметрах гистерезисов) дают результаты численного решения уравнений (9), (12). На рис. 2 приведены зависимости $\varepsilon_{1,2,3}(\varepsilon_0)$ от z при $\varepsilon_0 = 10^{-5}$, $g = 2 \cdot 10^{-6}$, $b = 1/5$, $c = 1/10$, $d = 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = \beta_1 + \beta_2$ и различных значениях параметров γ_0 и $\alpha_1 = \alpha_2$. Из рис. 2 видно, что с ростом z амплитуда ε_1 первой гармоники монотонно уменьшается (из-за линейных и гистерезисных потерь), при этом в среде с упругим гистерезисом амплитуда ε_1 уменьшается медленнее, чем с гистерезисом неупругим. При увеличении параметров γ_0 и α_2 (из-за уменьшения гистерезисных потерь) амплитуда ε_1 уменьшается медленнее. С ростом z амплитуды $\varepsilon_{2,3}$ вначале растут, достигают максимумов и затем уменьшаются, причем, при увеличении параметров γ_0 и $\alpha_{1,2}$ амплитуда ε_2 уменьшается, а ε_3 изменяется немонотонно. Следует также отметить, что амплитуды $\varepsilon_{2,3}$ в среде с неупругим гистерезисом заметно выше, чем в среде с упругим гистерезисом.

Более интересными и информативными зависимостями характеристик нелинейной волны являются зависимости $\varepsilon_{1,2,3}(\varepsilon_0)$ от ε_0 (при $z = \text{const}$), поскольку в твердом теле сложно менять расположение приемника (координату z , т.е. x), но можно легко менять амплитуду ε_0 . На рис. 3, *a, b* — для упругого (*a*) и неупругого (*b*) гистерезисов, приведены зависимости $\varepsilon_{1,2,3}(\varepsilon_0)$ от ε_0 (при $z = 10^6$). Из рис. 3, *a, b* видно, что при $\gamma_0 = 0$, $\alpha_{1,2} = 0$ с ростом ε_0 , в начале — $\varepsilon_1 \propto \varepsilon_0$, $\varepsilon_{2,3} \propto \varepsilon_0^2$, а затем — $\varepsilon_{1,2,3}$ стремятся к насыщению. Небольшие осцилляции амплитуд $\varepsilon_{2,3}(\varepsilon_0)$ (рис. 3, *a*, $\gamma_0 = 0$) связаны с проявлением нелинейной дисперсии фазовой скорости волны в среде с упругим гистерезисом. При $\gamma_0 \neq 0$, с ростом ε_0 , при $\gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$ — $\varepsilon_1 \propto \varepsilon_0$, $\varepsilon_{2,3} \propto \varepsilon_0^2$, а при $\alpha_{1,2} \varepsilon_0 \gg 1$ — $\varepsilon_{1,2,3} \propto \varepsilon_0$. При $\alpha_{1,2} \neq 0$, при $\alpha_{1,2} \varepsilon_0 \ll 1$ — $\varepsilon_1 \propto \varepsilon_0$, $\varepsilon_{2,3} \propto \varepsilon_0^2$, а при $\alpha_{1,2} \varepsilon_0 \gg 1$ — $\varepsilon_1 \propto \varepsilon_0^{n(z)}$, где $n(z) = 1 - z/\alpha_2 = 0.9$, при этом зависимости $\varepsilon_{2,3}$ от ε_0 близки к линейным.

На рис. 4, *a, b* — для упругого (*a*) и неупругого (*b*) гистерезисов, приведены графики зависимостей $\xi(\varepsilon_0, z)$ и $\xi_{2,3}(\varepsilon_0, z)$ от ε_0 при $\gamma_0 = 0$, $\alpha_{1,2} = 0$, $z = 10^6$, $b = 1/2$, $c = 1/5$, $d = 0$. Из этих рисунков видно, что (при $\varepsilon_0 = \text{const}$) значения $\xi(\varepsilon_0, z)$ и $\xi_{2,3}(\varepsilon_0, z)$ для упругого гистерезиса значительно превышают аналогичные значения для неупругого гистерезиса, при этом для $\xi_2(\varepsilon_0, z)$ в диапазоне $10^{-5} < \varepsilon_0 < 10^{-4}$ наблюдаются осцилляции.

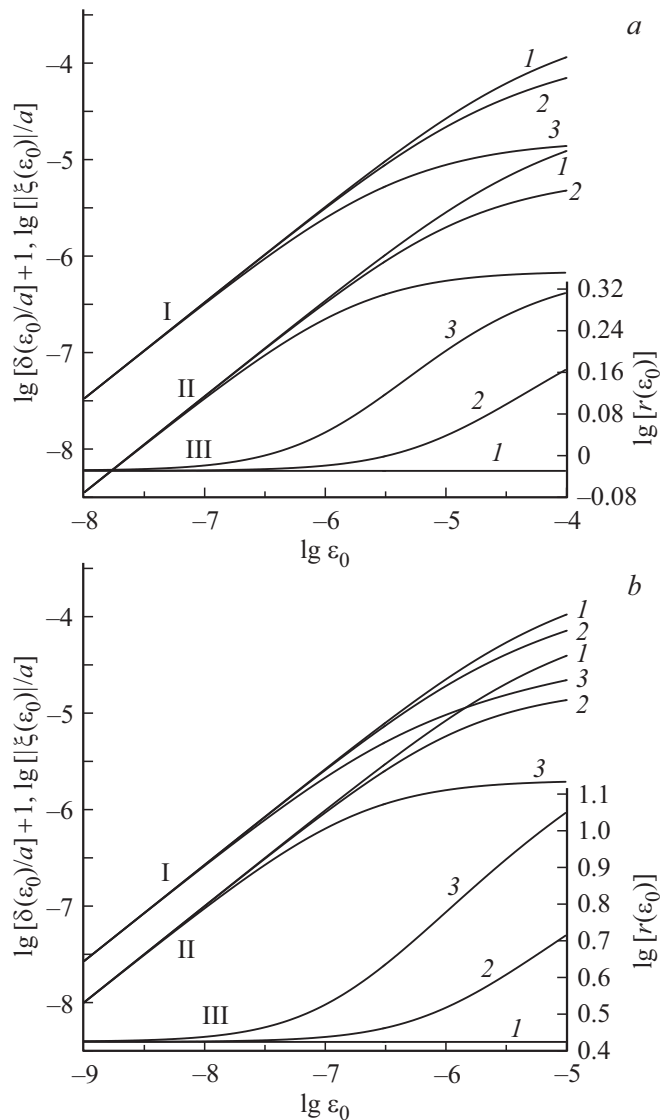


Рис. 5. *a* — графики зависимостей $\delta(\varepsilon_0)/a$ — I, $\xi(\varepsilon_0)/a$ — II и $r(\varepsilon_0) = \delta(\varepsilon_0)/|\xi(\varepsilon_0)|$ — III от ε_0 для упругого гистерезиса при $z = 10^6$, $g = 10^{-6}$, $b = 1/2$ и различных значениях параметра γ_0 : $\gamma_0 = 0$ — I, $\gamma_0 = 10^5$ — 2, $\gamma_0 = 10^6$ — 3; *b* — графики зависимостей $\delta(\varepsilon_0)/a$ — I, $\xi(\varepsilon_0)/a$ — II и $r(\varepsilon_0) = \delta(\varepsilon_0)/|\xi(\varepsilon_0)|$ — III от ε_0 для неупругого гистерезиса при $z = 10^6$, $g = 10^{-6}$, $b = 1/2$ и различных значениях параметра $\alpha_1 = \alpha_2$: $\alpha_{1,2} = 0$ — I, $\alpha_{1,2} = 10^6$ — 2, $\alpha_{1,2} = 10^7$ — 3.

Таким образом, нелинейная дисперсия (фазовой скорости) для среды с упругим гистерезисом значительно превышает нелинейную дисперсию для среды с неупругим гистерезисом, что проявляется в осцилляции амплитуд $\varepsilon_{2,3}$ на рис. 3, *a* (для упругого гистерезиса при $\gamma_0 = 0$) и ее отсутствии на рис. 3, *b* (для неупругого гистерезиса).

На рис. 5, *a, b* — для упругого (*a*) и неупругого (*b*) гистерезисов, приведены графики зависимостей $\delta(\varepsilon_0)/a$, $\xi(\varepsilon_0)/a$ и $r(\varepsilon_0) = \delta(\varepsilon_0)/|\xi(\varepsilon_0)|$ от ε_0 при $z = 10^6$, $g = 10^{-6}$, $b = 1/2$ и различных значениях параметров γ_0 и $\alpha_{1,2}$.

Из рис. 5 видно, что в малоамплитудном режиме ($\gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$, $\alpha_{1,2} \varepsilon_0 \ll 1$) зависимости $\delta = \delta(\varepsilon_0)$ и $\xi = \xi(\varepsilon_0)$ для упругого и неупругого гистерезисов одинаковы: $\delta(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0$, $\xi(\varepsilon_0) \propto \varepsilon_0$, $r(\varepsilon_0) = \text{const}$. В режиме же насыщения ($\gamma_0 \varepsilon_0 \gg 1$, $\alpha_{1,2} \varepsilon_0 \gg 1$) эти зависимости для разных гистерезисов различны. Для упругого гистерезиса: $\delta(\varepsilon_0) \rightarrow \text{const}$, $\xi(\varepsilon_0) \rightarrow \text{const}$, $r(\varepsilon_0) \rightarrow \text{const}$, а для неупругого: $\delta(\varepsilon_0) \propto \ln(\alpha_1) \varepsilon_0$, $\xi(\varepsilon_0) \rightarrow \text{const}$, $r(\varepsilon_0) \propto \ln(\alpha_2 \varepsilon_0) \neq \text{const}$. Такое различие в поведении $\delta(\varepsilon_0)$, $\xi(\varepsilon_0)$ и $r(\varepsilon_0)$ также является отличительным признаком проявления упругого и неупругого гистерезисов в режиме насыщения АЗВТ.

5. Заключение

В работе проведены теоретические и численные исследования НАЭ, возникающих при распространении первоначально гармонических волн в вязко-упругих гистерезисных твердых телах с насыщением АЗВТ. Рассмотрены два основных вида квадратичных гистерезисов: упругий (или гистерезис отрыва) и неупругий (или микропластический гистерезис). Методом возмущений определены закономерности НАЭ в таких средах в мало-амплитудном режиме и режиме насыщения: нелинейных потерь и изменения скорости распространения первичной волны, а также амплитуд и фаз второй и третьей ее гармоник. Проведен сравнительный анализ закономерностей нелинейных эффектов и предложена методика определения вида гистерезиса, основанная на анализе и соответствии полученных аналитических и экспериментально установленных амплитудных зависимостей и уровней НАЭ в таких средах. Экспериментальное установление амплитудных зависимостей НАЭ для гистерезисных твердых тел и их сравнение с теоретическими — для сред с различными гистерезисами (упругим и неупругим), будет способствовать правильному выбору гистерезисных уравнений состояния таких сред и выявлению физических механизмов их гистерезисной нелинейности.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках Госзадания ИПФ РАН по теме № 0030-2021-0009 и поддержана РФФИ (грант N20-02-00215A).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Н.Н. Давиденков. ЖТФ **8**, 6, 483 (1938).
- [2] T.A. Read. Phys. Rev. **58**, 371 (1940).
- [3] A. Granato, K. Lucke. J. Appl. Phys. **27**, 7, 789 (1956).

- [4] Дислокации и механические свойства кристаллов / Пер. с англ. под ред. М.В. Классен-Неклюдовой, В.Л. Инденбома. ИЛ, М. (1960). 552 с.
- [5] Ультразвуковые методы исследования дислокаций. Сб. статей / Пер. с англ. и нем. под ред. Л.Г. Меркулова. ИЛ, М. (1963). 376 с.
- [6] Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. Мир М. (1969). Т. 4. Ч. А. 375 с.
- [7] Д. Ниблетт, Дж. Уилкс. УФН **80**, 125 (1963).
- [8] С.П. Никаноров, Б.К. Кардашев. Упругость и дислокационная неупругость кристаллов. Наука, М. (1985). 250 с.
- [9] В.П. Левин, В.Б. Проскурин. Дислокационная неупругость в металлах. Наука, М. (1993). 272 с.
- [10] П.П. Паль-Валь, В.Д. Нацик, Л.Н. Паль-Валь, Ю.А. Семеренко. Физика низких температур **30**, 1, 115 (2004).
- [11] M.S. Blanter, I.S. Golovin, H. Neuhauser, H.-R. Sunning. Internal Friction in Metallic Materials. A Handbook. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg (2007). 541 p.
- [12] В.Е. Назаров. ФММ **71**, 3, 172 (1991).
- [13] С.Н. Голяндин, К.В. Сапожников, С.Б. Кустов. ФТТ **47**, 4, 614 (2005).
- [14] D. Gelli. J. Appl. Phys. **33**, 4, 1547 (1962).
- [15] С.Н. Голяндин, С.Б. Кустов, К.В. Сапожников, Ю.А. Емельянов, А.Б. Синапи, С.П. Никаноров, У.Х. Робинсон. ФТТ **40**, 10, 1839 (1998).
- [16] К.В. Сапожников, С.Н. Голяндин, С.Б. Кустов. ФТТ **52**, 1, 43 (2010).
- [17] К.В. Сапожников, С.Н. Голяндин, С.Б. Кустов. ФТТ **52**, 12, 2341 (2010).
- [18] V.E. Nazarov, A.V. Kolpakov. J. Acoust. Soc. Am. **107**, 4, 1915 (2000).
- [19] В.Е. Назаров. ФММ **88**, 4, 82 (1999).
- [20] Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Физматлит, М. (2004). Т. 3. 656 с.
- [21] С. Такидзуми. Физика ферромагнетизма. Мир М. (1987). 420 с.
- [22] S.J. Asano. Phys. Soc. Jpn. **29**, 4, 952 (1970).
- [23] А.Б. Лебедев. ФТТ **41**, 7, 1214 (1999).
- [24] V.E. Nazarov, A.V. Radostin. Nonlinear acoustic waves in micro-inhomogeneous solids. Wiley (2015). 251 p.
- [25] Lord Rayleigh. Phil. Mag. **23**, 225 (1887).
- [26] В.Е. Назаров, С.Б. Кияшко. Нелинейная динамика **11**, 4, 647 (2015).
- [27] J.C. Swartz, J. Weertman. J. Appl. Phys. **32**, 10, 1860 (1961).
- [28] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. Наука М. (1965).

Редактор Т.Н. Василевская