

03

## Поляризационные сингулярности при интерференции трех плоских волн

© Н.Н. Розанов

ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: nnrosanov@mail.ru

Поступила в редакцию 29.01.2022 г.

В окончательной редакции 29.01.2022 г.

Принята к публикации 08.02.2022 г.

В рамках квазиоптического приближения исследованы поляризационные сингулярности, возникающие при интерференции трех плоских монохроматических волн с близкими направлениями распространения в вакууме или линейной изотропной среде. При специальном выборе линейной поляризации волн определены условия формирования в поперечном сечении L-линий, на которых поляризация линейна, и C-точек, где поляризация круговая, и получены аналитические выражения для расположения таких поляризационных сингулярностей.

**Ключевые слова:** поляризационные сингулярности излучения, L-линии, C-точки.

DOI: 10.21883/OS.2022.05.52436.4-22

### Введение

Хотя топологические особенности структуры оптического излучения исследовались еще в 1830-х годах [1], интенсивное развитие этих особенностей приходится на настоящее время, сопровождаемое проникновением методов топологии в физику и другие науки. Применительно к когерентному оптическому излучению значительный научный и прикладной интерес представляют сингулярности его волнового фронта (фазы) и поляризации [2–8], что вызвано сохранением топологических характеристик даже при значительных возмущениях системы. При этом изолированная сингулярность фазы (дислокация) отвечает ее неопределенности; она возникает в точках поперечного сечения пучка, в которых интенсивность излучения обращается в 0, а при обходе по замкнутому контуру вокруг такой точки происходит набег фазы, кратный  $2\pi$ . Аналогичным образом поляризационные сингулярности соответствуют вырожденным случаям общей эллиптической поляризации. Здесь фигурируют C-точки с круговой поляризацией, для которой не определено понятие главной оси поляризационного эллипса, и L-линии с линейной поляризацией (не определено, является ли поляризация правой или левой) [9]; мы исключаем из рассмотрения так называемые V-точки, в которых суммарная интенсивность излучения обращается в 0.

Топологические сингулярности излучения возникают как в линейных, так и в нелинейных оптических средах. Как известно, изолированные фазовые сингулярности могут быть получены при интерференции трех плоских монохроматических волн, если их вещественные амплитуды удовлетворяют „правилу треугольника“ (каждая из них больше разности двух других амплитуд, но мень-

ше их суммы [10]). Естественным образом возникает вопрос, возможно ли формирование поляризационных сингулярностей при подобной интерференции. Ответу на этот вопрос и посвящена настоящая статья.

### Исходные соотношения

Рассмотрим интерференцию трех монохроматических плоских волн с совпадающей частотой  $\omega$  и близкими волновыми векторами, что позволяет использование квазиоптического (параксиального) приближения. Напряженность суммарного электрического поля записывается в виде

$$\tilde{\mathbf{E}} = \text{Re}[\mathbf{E} \exp(ik_0z - i\omega t)], \quad (1)$$

где  $z$  — продольная координата вдоль направления преимущественного распространения волн,  $t$  — время, волновое число в вакууме  $k_0 = \omega/c$ . Огибающая поля  $\mathbf{E}$  в рассматриваемом случае записывается в форме

$$\mathbf{E} = \sum_{m=1}^3 \mathbf{E}_m \exp[i(\mathbf{k}_{\perp m} \mathbf{r}_{\perp} + \delta k_{zm} z)]. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{E}_m$  — комплексные амплитуды волн,  $\mathbf{r}_{\perp}$  — поперечные координаты,  $\mathbf{k}_{\perp m}$  — поперечные волновые векторы волн и  $\delta k_{zm} = -k_{\perp m}^2/(2k_0)$ . Поворотом системы координат можно положить  $\mathbf{k}_{\perp 3} = 0$  и совместить направление  $\mathbf{k}_{\perp 1}$  с осью  $x$ . Для упрощения выкладок рассмотрим случай, когда векторы  $\mathbf{k}_{\perp 1}$  и  $\mathbf{k}_{\perp 2}$  ортогональны, так что  $\mathbf{k}_{\perp 2} = k_{\perp 2} \mathbf{e}_y$ , где  $\mathbf{e}_y$  — орт в направлении оси  $y$ . Кроме того, введем безразмерные координаты  $x = \mathbf{k}_{\perp 1} \mathbf{r}_{\perp}$ ,  $y = \mathbf{k}_{\perp 2} \mathbf{r}_{\perp}$ . Тогда огибающая поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \exp(ix + i\delta k_{z1}z) + \mathbf{E}_2 \exp(iy + i\delta k_{z2}z) + \mathbf{E}_3. \quad (3)$$

Очевидно, поперечная структура поля периодична по  $x$  и  $y$  с периодом  $2\pi$ . После введения вещественных амплитуд волн  $\mathbf{E}_m = \mathbf{A}_m \exp(i\alpha_m)$ ,  $\mathbf{A}_m = |\mathbf{E}_m|$ , и новых поперечных координат  $x + \delta k_z z + \alpha_1 - \alpha_3 \rightarrow x$ ,  $y + \delta k_z z + \alpha_2 - \alpha_3 \rightarrow y$  находим

$$\mathbf{E} = [\mathbf{A}_1 \exp(ix) + \mathbf{A}_2 \exp(iy) + \mathbf{A}_3] \exp(i\alpha_3). \quad (4)$$

С изменением продольной координаты происходит только линейный по  $z$  сдвиг поперечной структуры, так что достаточно ограничиться рассмотрением только одного из поперечных сечений, например,  $z = 0$ . Как видно из (4), поле не меняется при одновременной замене

$$\mathbf{A}_1 \leftrightarrow \mathbf{A}_2, \quad x \leftrightarrow y. \quad (5)$$

Поляризационную структуру удобно определить с помощью параметров Стокса [9,11], которые в парааксиальном приближении имеют вид

$$s_0 = |E_x|^2 + |E_y|^2, \quad s_1 = |E_x|^2 - |E_y|^2, \\ s_2 = 2 \operatorname{Re}(E_x^* E_y), \quad s_3 = 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y). \quad (6)$$

Для круговой поляризации (С-точки)  $s_1 = s_2 = 0$ ,  $s_3 = \pm s_0$ , а для линейной поляризации (L-линии)  $s_3 = 0$ .

## Сингулярности поперечной структуры поля

Если каждая из трех волн имеет одну и ту же поляризацию, то этой же структурой обладает их суммарное поле. Поэтому изменение поляризационной структуры возможно, только если хотя бы одна из волн имеет поляризацию, отличающуюся от таковой для двух других волн. Рассмотрим сравнительно простой вариант, в котором имеют место поперечные изменения поляризационной структуры. А именно положим

$$\mathbf{A}_1 = A_1 \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{A}_2 = A_2 \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{A}_3 = A_3 \mathbf{e}_y. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{e}_{x,y}$  — единичные векторы в направлении соответствующих осей. Соответственно

$$E_x = A_1 \exp(ix) + A_2 \exp(iy), \quad E_y = A_3. \quad (8)$$

Очевидно, у декартовой  $y$ -компоненты напряженности фазовых сингулярностей нет. А у  $x$ -компоненты они возникают в виде прямой линии только при условии равенства амплитуд первой и второй волн,  $A_1 = A_2$  (краевая дислокация). Подчеркнем, что при  $A_1 \neq A_2$  декартовы компоненты поля не имеют фазовых сингулярностей.

L-линии, на которых поляризация линейна, определяются условием  $s_3 = 0$ , которое оказывается не зависящим от амплитуды  $A_3$ :

$$y = -\operatorname{Arcsin}(a \sin x), \quad a = A_1/A_2. \quad (9)$$

Напомним, что функция  $\operatorname{Arcsin}$  многозначна. L-линии имеют вид деформированных синусоид (рисунок). Ввиду

симметрии (5) замена  $a \rightarrow 1/a$  ведет к тем же линиям, но с заменой  $x \leftrightarrow y$ . При равенстве амплитуд волн  $A_1 = A_2$  они вырождаются в два набора прямых

$$x + y = 2\pi n, \quad x - y = (2n - 1)\pi, \quad (10)$$

где  $n$  — целые числа. Прямые каждого набора параллельны друг другу, будучи ортогональны прямым другого набора (рис. б). При пересечении каждой L-линии правая/левая эллиптическая поляризация меняется на левую/правую.

С-точки находим из условий  $s_1 = s_2 = 0$ , которые в рассматриваемом случае принимают вид

$$A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 + 2A_1A_2 \cos(y - x) = 0,$$

$$A_1 \cos x + A_2 \cos y = 0. \quad (11)$$

Первое из этих условий запишем так:

$$\cos(y - x) = \beta. \quad (12)$$

Здесь

$$\beta = -\frac{A_1^2 + A_2^2 - A_3^2}{2A_1A_2}. \quad (13)$$

Решение (12) возможно только при  $|\beta| < 1$ , что отвечает упомянутому выше „правилу треугольника“. Это решение имеет вид

$$y - x = \pm\Delta + 2\pi n, \quad (14)$$

где  $\cos \Delta = \beta$ ,  $\sin \Delta = \sqrt{1 - \beta^2}$ . Подставив это соотношение во второе условие (11), находим в варианте верхнего знака в (14)

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\beta + (A_1/A_2)}{\sqrt{1 - \beta^2}} + n\pi,$$

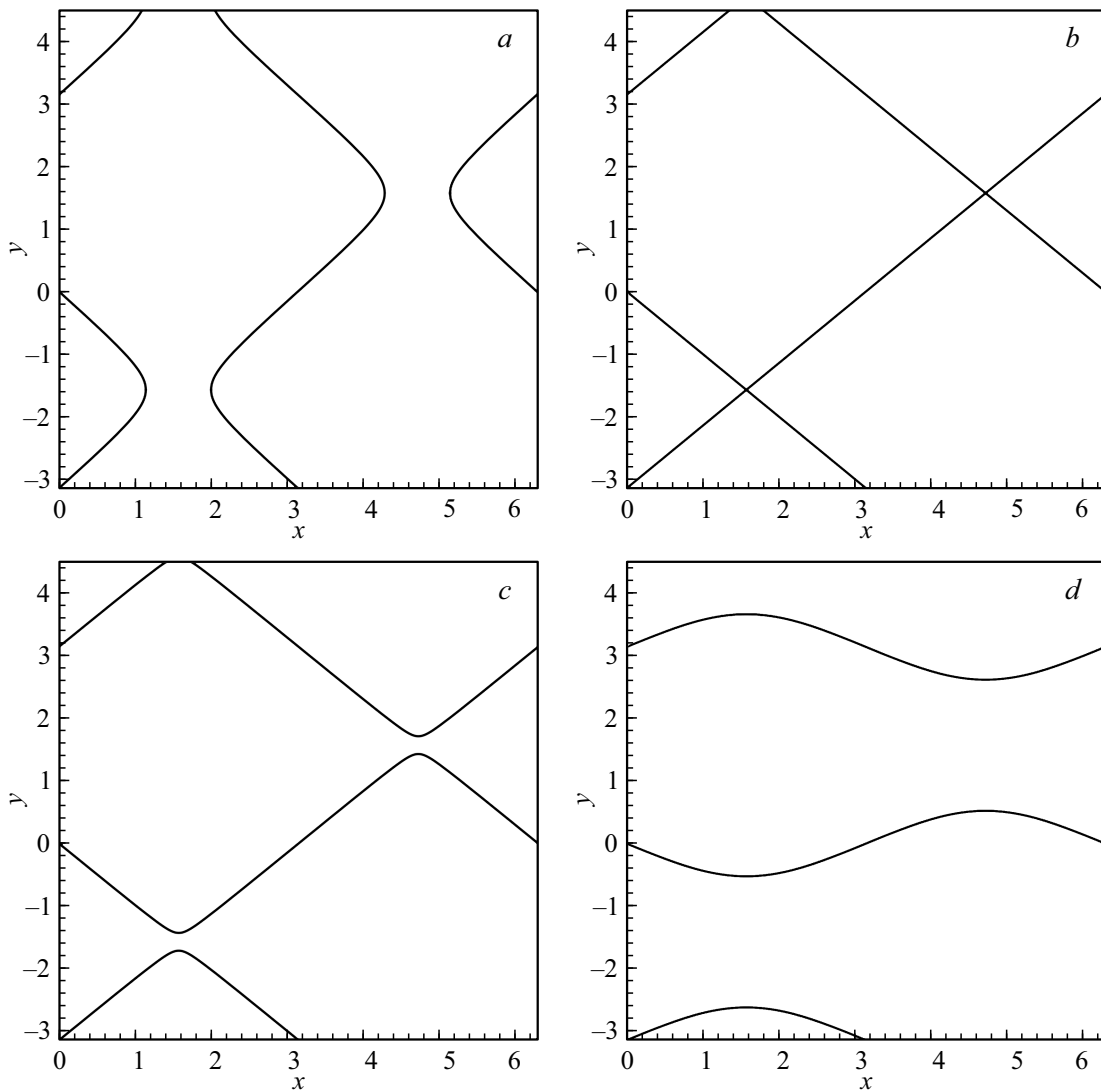
$$y = -\operatorname{arctg} \frac{\beta + (A_2/A_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} + n\pi. \quad (15)$$

Во втором варианте (нижний знак)

$$x = -\operatorname{arctg} \frac{(A_1/A_2) + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} + n\pi,$$

$$y = \operatorname{arctg} \frac{\beta + (A_2/A_1)}{\sqrt{1 - \beta^2}} + n\pi. \quad (16)$$

На одном периоде по  $x$  и  $y$  (период  $2\pi$ ) имеются четыре С-точки, две из которых отвечает правой поляризации и две — левой. При изменении амплитуды  $A_3$  положение этих точек изменяется, но они ни при каких условиях не накладываются на L-линии.



L-линии при  $A_1/A_2 = 1.1$  (a), 1 (b), 0.99 (c) и 0.5 (d). Линии периодичны по  $x$  и  $y$  с периодом  $2\pi$ .

## Обсуждение результатов

Таким образом, анализ показывает, что поляризационные сингулярности — L-линии и C-точки — могут возникать уже при интерференции в вакууме трех плоских монохроматических волн с линейной поляризацией. L-линии могут быть сформированы при любом соотношении амплитуд волн, тогда как для возможности наличия C-точек в рассмотренной ситуации амплитуды волн должны удовлетворять „правилу треугольника“, известному как условие существования фазовых сингулярностей при интерференции скалярных волн [10]. Сингулярности, возникающие при интерференции плоских волн, периодически повторяются на поперечном сечении пучка неограниченное число раз. При переходе от плоских волн к пучкам число значимых (в окрестности которых интенсивность выше уровня шума) ограничено. Наиболее стабильные фазовые и поляризационные син-

гулярности могут наблюдаться в диссипативных (лазерных) солитонах [12,13].

## Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-12-00075.

## Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] M.V. Berry. *Nature*, **403**, 21 (2000).
- [2] J.F. Nye, M.V. Berry. *Proc. Roy. Soc. London A*, **336** (5), 165 (1974).
- [3] M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov. *Progr. Opt.*, **42**, 219 (2001).
- [4] I. Freund. *Opt. Commun.*, **201**, 251 (2002).

- [5] M.V. Berry, M.R. Dennis. Proc. Roy. Soc. London A, **457**, 141 (2001).
- [6] Н.Б. Баранова, Б.Я. Зельдович. ЖЭТФ, **80** (5), 1789 (1981).
- [7] P. Coullet, L. Gil, F. Rocca. Opt. Commun., **73** (5), 403 (1989).
- [8] D.S. Simon. *Topology in Optics: Tying Light in Knots* (IOP Publishing, 2021).
- [9] Ruchi, P. Senthilkumaran, S.K. Pal. Int. J. Optics, **2020**, 2812803 (2020).
- [10] Н.Н. Розанов. Опт. и спектр., **75** (4), 861 (1993).
- [11] М. Борн, Э. Вольф. *Основы оптики* (Наука, 1970) [пер. с англ. М. Born, E. Wolf. *Principles of Optics* (Cambridge University Press, 1999)].
- [12] Н.Н. Розанов. *Диссипативные оптические и родственные солитоны* (Физматлит, 2021).
- [13] Н.А. Веретенков, Н.Н. Розанов, С.В. Федоров. УФН, **192** (2), 143 (2022).