04.2

Одномерное квазилинейное уравнение для описания генерации токов увлечения в плазме токамака геликонами

© А.Ю. Попов, Е.З. Гусаков

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.popov@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 17 сентября 2021 г.
В окончательной редакции 1 октября 2021 г.
Принято к публикации 1 октября 2021 г.

Получено квазилинейное уравнение, которое позволяет описать эволюцию функции распределения электронов и генерацию токов увлечения под действием быстрой моды промежуточного частотного диапазона (геликона). Показано, что в анализируемом случае уравнение Фоккера–Планка может быть приближенно сведено к одномерному в пространстве продольных скоростей электронов, в котором коэффициент диффузии пропорционален мощности, поглощаемой при взаимодействии частиц с волнами, фазовая скорость которых равна проекции скорости частиц на направление магнитного поля.

Ключевые слова: генерация тока, токамак, электромагнитные волны, геликон, квазилинейная диффузия.

DOI: 10.21883/PJTF.2022.02.51916.19028

В настоящее время актуальной задачей является разработка эффективных методов стационарной безындукционной генерации токов увлечения в плазме токамака термоядерных параметров. Наиболее перспективной считается возможность поддержания тока с помощью быстрой моды с частотой, много меньшей частоты нижнего гибридного резонанса, но существенно большей частоты ионного циклотронного резонанса [1]. Использование этой волны — геликона — позволит уменьшить влияние линейного взаимодействия с ионами и нелинейных (параметрических) эффектов. Для описания генерации тока геликонами требуется анализ квазилинейной эволюции функции распределения электронов в результате резонансного взаимодействия с этими волнами. Последняя задача (задача взаимодействия волн и частиц) очень обширная и часто встречается в физике плазмы и астрофизике [2]. В частных случаях генерации тока и взаимодействия волны накачки с альфа-частицами при нижнегибридном нагреве [3] и генерации тока электронными циклотронными волнами [4] общее уравнение в частных производных по проекциям скорости, описывающее квазилинейную диффузию, редуцируется до одномерного уравнения. В случае распространения медленной продольной волны коэффициент диффузии этого уравнения пропорционален мощности, теряемой на магнитной поверхности в результате резонансного взаимодействия волнами, продольная фазовая скорость которых совпадает с продольной скоростью частиц [5]. Это обстоятельство значительно упрощает расчет профиля плотности генерируемого тока, поскольку не требует знания структуры высокочастотных полей в плазме токамака и позволяет ограничиться при исследовании волновой части задачи применением метода лучевых траекторий [6]. К сожалению, до сих пор отсутствует обоснование такого подхода для случая быстрой моды промежуточного частотного диапазона (геликона), которое необходимо для применения эффективных кодов [6], разработанных для описания генерации токов в плазме токамака медленной модой промежуточного частотного диапазона, при планировании экспериментов с геликонами. В настоящей работе мы восполним этот пробел и получим соответствующее одномерное квазилинейное кинетическое уравнение.

Рассмотрим пакет электромагнитных волн промежуточного диапазона частот $\omega_{ci} \ll \omega < \omega_{LH} \ll |\omega_{ce}|$ ($\omega_{LH} = \omega_{pi}/\sqrt{1+\omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2}$ — нижнегибридная частота, $\omega_{pi,pe}$, $\omega_{ci,ce}$ — ионная и электронная плазменные и циклотронные частоты), который распространяется под углом к внешнему магнитному полю $\mathbf{B} = Be_z$ в однородной плазме:

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{4\pi} \mathbf{A}(k_z) \exp(ik_x(k_z)x + ik_z z - i\omega t) + c.c., \tag{1}$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{e}_G A_0$, A_0 — амплитуда,

$$\mathbf{e}_G = \big(1, -ig/(n_z^2 + n_x^2 - \varepsilon), n_x n_z/(n_x^2 - \eta)\big)$$

— компоненты вектора поляризации,

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} < 0, \ \ \eta = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 0$$

— диагональные, а $g = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}\omega} \gg 1$ — недиагональный компонент тензора диэлектрической проницаемости „холодной“ плазмы,

$$n_x = ck_x/\omega = \sqrt{\big(g^2/(n_z^2 - \varepsilon)\big) - (n_z^2 - \varepsilon)} \approx g/n_z,$$

$$n_z = k_z c/\omega$$

— компоненты коэффициента преломления. Рассмотрим далее кинетическое уравнение для однородной замагниченной плазмы, которое описывает функцию распределения электронов [2]:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{|e|}{m_e}(E_i+e_{ijk}v_jB_k)\frac{\partial}{\partial v_i}\right.$$
$$\left.-\omega_c e_{ijz}v_j\frac{\partial}{\partial v_i}\right)f_e=\mathrm{St}(f_e), \qquad (2)$$

где e_{ijz} — полностью антисимметричный единичный тензор, $\mathrm{St}(f_e)$ — столкновительный интеграл в форме Ландау. Будем искать решение уравнения (2) в виде $f_e=nf_0+f^{(1)}$, где n — плотность плазмы, f_0 — квазиравновесная, не зависящая от гироугла вращения частиц функция распределения, $f^{(1)}=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}dk_z f^{(1)}(k_z)$ — ее линейная поправка. Подставим это разложение в (2) и получим уравнения для парциальной линейной поправки к функции распределения, частота и волновое число которой навязаны полем волны:

$$\left(-i\alpha+i\lambda\cos\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\right)f^{(1)}(k_z)-\frac{n|e|}{2m_e\omega_c}$$
$$\times\left(\mathbf{A}(k_z)+\frac{\mathbf{v}\times\big(\mathbf{k}\times\mathbf{A}(k_z)\big)}{\omega}\right)\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{v}}=0, \qquad (3)$$

где $\alpha=(\omega-k_zv_z)/\omega_c$, $\lambda=k_xv_\perp/\omega_c$, $\omega_c=|\omega_{ce}|$, θ — азимутальный угол цилиндрической системы координат $(v_\perp,\theta,v_z)$ в пространстве скоростей. Проинтегрировав уравнение (3) и воспользовавшись представлением $\exp\big(i\lambda\sin\theta\big)=\Sigma_pJ_p(\lambda)\exp(ip\theta)$, найдем линейную поправку к функции распределения электронов

$$f^{(1)}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi}f^{(1)}(k_z)=i\frac{n|e|}{2m_e\omega_c}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi}\sum_p\frac{\exp(ip\theta-i\lambda\sin\theta)}{\alpha-p}\mathbf{a}_p(k_z)\cdot\mathbf{A}(k_z), \qquad (4)$$

где компоненты $\mathbf{a}_p$ равны

$$\big(a_{xp},a_{yp}\big)=\big(J_p^+(\lambda),-iJ_p^-(\lambda)\big)$$
$$\times\left(\left(1-\frac{k_zv_z}{\omega}\right)\frac{\partial}{\partial v_\perp}+\frac{k_zv_\perp}{\omega}\frac{\partial}{\partial v_z}\right)f_0,$$
$$a_{zp}=\left(J_p(\lambda)\frac{\partial}{\partial v_z}+\frac{pJ_p(\lambda)}{\lambda}\left(\frac{k_xv_z}{\omega}\frac{\partial}{\partial v_\perp}-\frac{k_xv_\perp}{\omega}\frac{\partial}{\partial v_z}\right)\right)f_0,$$
$$J_n^+(\lambda)=nJ_n(\lambda)/\lambda,\quad J_n^-(\lambda)=J_n'(\lambda).$$

Для учета резонансного взаимодействия Ландау с электронами в бесконечном ряду по номерам электронных циклотронных гармоник в (4) достаточно удержать нулевой член $p=0$:

$$f^{(1)}=i\frac{n|e|}{2m_e\omega_c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi}\frac{\exp\big(-i\lambda\sin\theta\big)}{\alpha}\mathbf{b}(k_z)\cdot\mathbf{A}(k_z)\frac{\partial}{\partial v_z}f_0, \qquad (5)$$

где вектор $\mathbf{b}$ имеет компоненты $\mathbf{b}=[0,iJ_1(\lambda)k_zv_\perp/\omega,J_0(\lambda)]_{\omega=k_zv_z}$, в которых учтены только резонансные члены при $\omega=k_zv_z$. Подставим (5) в (2)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_i\frac{\partial}{\partial x_i}-\omega_ce_{ijz}v_j\frac{\partial}{\partial v_i}\right)nf_0-\frac{|e|}{2m_e}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi}\left(\mathbf{A}(k_z)+\frac{\mathbf{v}\times\big(\mathbf{k}\times\mathbf{A}(k_z)\big)}{\omega}\right)\frac{\partial f^{(1)}(k_z)^*}{\partial\mathbf{v}}$$
$$-\frac{|e|}{2m_e}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi}\left(\mathbf{A}(k_z)^*+\frac{\mathbf{v}\times\big(\mathbf{k}\times\mathbf{A}(k_z)^*\big)}{\omega}\right)\frac{\partial f^{(1)}(k_z)}{\partial\mathbf{v}}$$
$$=\mathrm{St}(nf_0). \qquad (6)$$

Усредним левую и правую части (6) по азимутальному углу, используем формулу Сохоцкого $(\omega-k_zv_z)^{-1}=P(\omega-k_zv_z)^{-1}-i\pi\delta(\omega-k_zv_z)$, где $\delta(\dots)$ — дельта-функция, усредним по случайной фазе $\langle\big(\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}(k_z)\big)^*\big(\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}(k_z')\big)\rangle=2\pi|\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}(k_z)|^2$ и получим уравнение квазилинейной диффузии функции распределения электронов из-за их взаимодействия с электромагнитной волной (геликонами) в присутствии столкновений

$$\frac{\partial}{\partial t}f_0-\frac{\omega_{pe}^2}{16\pi nm_e}\frac{\partial}{\partial v_z}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi}|\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}(k_z)|^2\right.$$
$$\left.\times\,\delta(\omega-k_zv_z)\right)\frac{\partial}{\partial v_z}f_0=\mathrm{St}(f_0). \qquad (7)$$

Видно, что в случае взаимодействия электронов с волной промежуточного диапазона частот это одномерное уравнение по продольным скоростям частиц, в котором коэффициент диффузии зависит от поперечной скорости. Тем не менее предположим, что функция распределения факторизуется, оставаясь максвелловской по поперечным скоростям, т.е. $f_0=f_M(v_\perp)f_{0z}(v_z)$, что соответствует случаю сильной диффузии, приводящей к образованию „плато“. По отношению к (7) выполним операцию $\int_0^{\infty}\dots v_\perp dv_\perp$

$$\frac{\partial}{\partial t}f_{0z}-\frac{\partial}{\partial v_z}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_z}{2\pi}D_{zz}(k_z)\delta(v_z-v_f)v_f\frac{\partial}{\partial v_z}f_{0z}=\mathrm{St}(f_{0z}), \qquad (8)$$

$$D_{zz}(k_z)=\frac{\omega_{pe}^2}{4nm_ev_{te}^2\omega}\int_0^{\infty}|\mathbf{b}\cdot\mathbf{A}(k_z)|^2\exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right)v_\perp dv_\perp. \qquad (9)$$

Для того чтобы выяснить физический смысл полученного коэффициента диффузии, рассмотрим величину удельных потерь пучка волн (1) в плазме в результате резонанса Ландау, которая равна $Q=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}dk_zQ(k_z)$, где $Q(k_z) = \langle A_m^*(k_z) j_m \rangle / (8\pi)$ — парциальный вклад компоненты поля k_z, $\mathbf{j} = -|e| \int \mathbf{v} f^{(1)} d\mathbf{v}$ — плотность тока электронов в поле волны. В результате получим

$$Q(k_z) = \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{4 v_{te}^2 k_z^2} \frac{\partial f_{0z}}{\partial v_z}\bigg|_{\omega/k_z} \int_0^\infty |\mathbf{b} \cdot \mathbf{A}(k_z)|^2 \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{te}^2}\right) v_\perp dv_\perp$$

$$= \frac{\varepsilon''_{yy} |A_y|^2 + \varepsilon''_{yz} \operatorname{Im}(A_y^* A_z) + \varepsilon''_{zz} |A_z|^2}{8\pi}. \quad (10)$$

Последний член в правой части (10) описывает затухание Ландау, первый — магнитную накачку, второй представляет собой интерференционный член [7]. Сравним (10) с (9) и отметим, что парциальный коэффициент диффузии (9) в уравнении (8) пропорционален парциальному вкладу $\mathbf{A}(k_z)$ в величину удельных потерь:

$$D_{zz}(k_z) = Q(k_z) \Bigg/ \left| n m_e \frac{\omega^2}{k_z^2} \frac{\partial f_{0z}}{\partial v_z} \right|_{w/k_z}. \quad (11)$$

Таким образом, и в рассматриваемом случае поглощения геликона, так же как и в случае медленной моды, парциальный коэффициент диффузии в пространстве скоростей может быть найден из анализа парциальной компоненты $Q(k_z)$ энерговыделения пучка волн и не требует расчета пространственного распределения электрических полей. Это обстоятельство позволяет ограничиться при анализе эффективности генерации безындукционного тока и его профиля рассмотрением поведения лучевых траекторий волн и поглощения энергии вдоль них.

Рассмотрено взаимодействие электронов с электромагнитными волнами промежуточного диапазона частот (геликонами) по резонансному механизму Ландау. В результате получено квазилинейное уравнение, которое позволяет описать эволюцию функции распределения электронов и генерацию токов увлечения при нагреве плазмы геликонами. Впервые показано, что, если в анализируемом случае функция распределения факторизуется, оставаясь максвелловской по поперечным скоростям, квазилинейное уравнение сводится к одномерному в пространстве продольных скоростей электронов. Коэффициент диффузии этого одномерного уравнения (11) пропорционален удельной мощности, поглощаемой при взаимодействии частиц с волнами (10).

Финансирование работы

Вывод полного квазилинейного уравнения для функции распределения в случае поглощения геликона поддержан в рамках государственного задания ФТИ им. А.Ф. Иоффе 0040-2019-0023, уравнение для одномерной функции распределения электронов получено в рамках государственного задания 0034-2021-0002.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] V.L. Vdovin, Plasma Phys. Rep., **39**, 95 (2013). DOI: 10.1134/S1063780X13020037
[2] А.И. Ахиезер, И.А. Ахиезер, Р.В. Половин, А.Г. Ситенко, К.Н. Степанов, *Электродинамика плазмы* (Наука, М., 1974).
[3] N.J. Fisch, J.M. Rax, Phys. Rev. Lett., **69**, 612 (1992). DOI: 10.1103/PhysRevLett.69.612
[4] C.F.F. Karney, N.J. Fisch, Nucl. Fusion, **21**, 1549 (1981). DOI: 10.1088/0029-5515/21/12/004
[5] N.J. Fisch, Rev. Mod. Phys., **59**, 175 (1981). DOI: 10.1103/RevModPhys.59.175
[6] A.D. Piliya, A.N. Saveliev, *Preprint JET-R(98) 01* (JET Joint Undertaking, Abingdon, 1998).
[7] T.H. Stix, *Waves in plasmas* (American Institute of Physics, N.Y., 1992).