

09.1

Излучение дробного осциллятора

© С.Ш. Рехвиашвили¹, А.В. Псху¹, З.Ч. Маргушев²¹ Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия² Институт информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

E-mail: rsergo@mail.ru

Поступило в Редакцию 20 июля 2021 г.

В окончательной редакции 29 июля 2021 г.

Принято к публикации 15 августа 2021 г.

В дипольном приближении вычислена спектральная плотность энергии излучения осциллятора, движение которого описывается уравнением с дробным интегро-дифференцированием. Модель дробного осциллятора может описывать различные типы излучения, в том числе и с неэкспоненциальным законом релаксации. Найдена форма спектральной линии излучения. Проведено сравнение полученного результата с классическим лоренцевским спектром и экспериментальными спектрами излучения монохроматического и люминофорного светодиодов. Порядок дробного интегро-дифференцирования в модели задает величину уширения спектра излучения.

Ключевые слова: дробный осциллятор, дробное интегро-дифференцирование, контур спектральной линии, дипольное излучение.

DOI: 10.21883/PJTF.2021.22.51728.18964

Математическая модель дробного осциллятора (от англ. fractional oscillator) может конструктивно применяться для описания колебательных процессов как с медленным, так и с быстрым затуханием [1–17]. Суть этой модели заключается в том, что закон эволюции механической или динамической системы задается с учетом эффекта динамической памяти: считается, что импульс системы в текущий момент времени t устанавливается в результате действия каких-либо сил в предшествующие моменты времени $t' < t$. В наших работах [11–13] было показано, что степенная функция памяти учитывает диссипацию энергии колебаний осциллятора. Уравнение движения такого осциллятора представляет собой дифференциальное уравнение дробного порядка. При этом обнаружено, что порядок дробного интегро-дифференцирования взаимосвязан с добротностью и коэффициентом затухания осциллятора. Этот вывод качественно и количественно подтвержден в работах [14–17].

Из классической электродинамики [18] и теории люминесценции [19] известно, что затухающие колебания в системе, состоящей из положительных и отрицательных зарядов, например в плазме твердого тела, являются причиной уширения спектра соответствующего дипольного излучения. Закон затухания такого излучения определяется динамикой возбужденного состояния, которая формируется в зависимости от конкретных физико-химических свойств системы и условий внешнего возбуждения. В связи с этим возникают закономерные вопросы относительно интенсивности и формы спектральной линии излучения дробного осциллятора, а также возможного применения этой модели к описанию реальных излучательных систем. Решению этих актуальных вопросов посвящена настоящая работа.

Запишем уравнение движения электрона в интегральной форме

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(0) + \int_0^t G(t-t')\mathbf{F}(\mathbf{r}, t')dt', \quad (1)$$

где \mathbf{p} и \mathbf{F} — векторы импульса и силы, G — функция памяти. Выберем функцию памяти в степенном виде [20,21]:

$$G(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, τ — некоторая константа процесса. Подставляя (2) в (1), получаем уравнение движения дробного порядка

$$\frac{d^\alpha \mathbf{p}(t)}{dt^\alpha} = \tau^{1-\alpha} \mathbf{F}(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

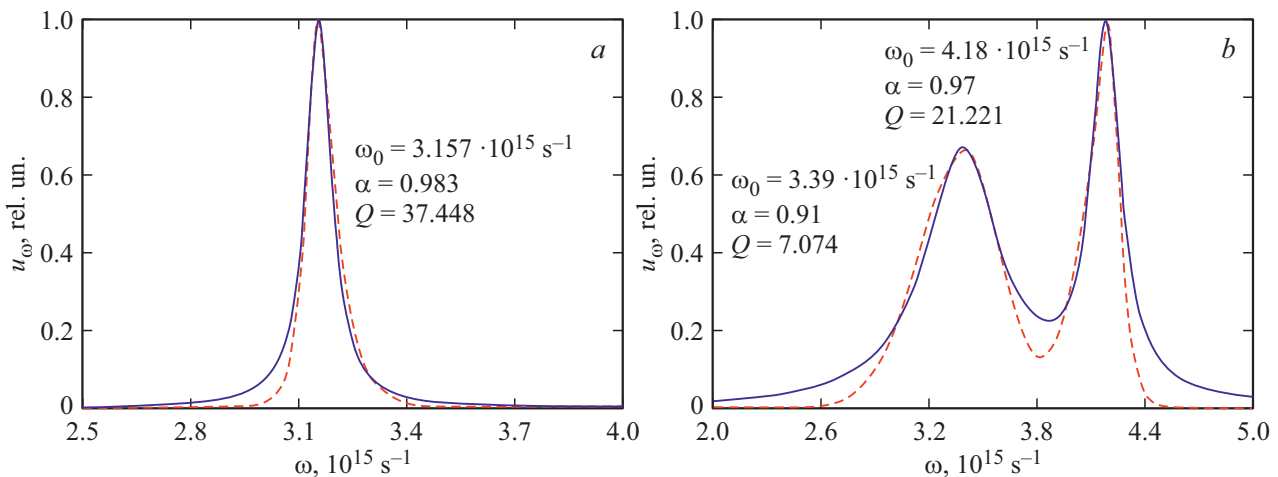
В (3) содержится дробная производная Капуто, которая по определению при $\alpha < 1$ есть

$$\frac{d^{n+\alpha} y(t)}{dt^{n+\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{y^{(n+1)}(t') dt'}{(t-t')^\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Обширную информацию о дробных операторах и их применении в различных физических задачах можно отыскать в работах [22–26]. В отсутствие внешних полей из (3) следует уравнение одномерного дробного осциллятора

$$\frac{d^{1+\alpha} x(t)}{dt^{1+\alpha}} + \omega_0^{1+\alpha} x(t) = 0, \quad (4)$$

где $\omega_0 = 1/\tau$ — частота незатухающих колебаний при $\alpha = 1$. Будем предполагать, что движение электрона



Спектры излучения монохроматического оранжевого (а) и люминофорного „белого“ (б) светодиодов. Штриховые кривые — эксперимент, сплошные кривые — расчет по формуле (8).

и излучение начинаются в момент $t = 0$. Аналогично классическому случаю [18,19] примем начальные условия $x(0) = x_0$ и $x'(0) = i\omega_0 x_0$, где x_0 — комплексная амплитуда. Тогда решение уравнения (4) запишется в виде

$$x(t) = x_0 \{ E_{1+\alpha,1} [-(\omega_0 t)^{1+\alpha}] + i\omega_0 t E_{1+\alpha,2} [-(\omega_0 t)^{1+\alpha}] \},$$

$$E_{\beta,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta k + \mu)}, \quad (5)$$

где $E_{\beta,\mu}(z)$ — функция типа Миттаг–Леффлера.

Спектральная плотность энергии дипольного излучения задается формулой

$$u_{\omega} = \frac{q^2}{3\epsilon_0 c^3} |\ddot{x}_{\omega}|^2, \quad (6)$$

$$\ddot{x}_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t) \exp(i\omega t) dt, \quad (7)$$

где q — заряд электрона, c — скорость света в вакууме, ϵ_0 — электрическая постоянная. В (7) подразумевается, что $x(t) = 0$ при $t < 0$. Из (5)–(7) получаем

$$u_{\omega} = \frac{q^2 \omega_0^{2(1+\alpha)} |x_0|^2}{12\pi^2 \epsilon_0 c^3} \times \frac{(\omega + \omega_0)^2}{\omega^{2(1+\alpha)} - 2(\omega\omega_0)^{1+\alpha} \sin(\pi\alpha/2) + \omega_0^{2(1+\alpha)}}. \quad (8)$$

Для (8) имеет место условие нормировки

$$\int_0^{\infty} u_{\omega} d\omega = \frac{q^2 \omega_0^3 |x_0|^2}{12\pi \epsilon_0 c^3 (1+\alpha)} \left[\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \left(\csc\left(\frac{\pi}{1+\alpha}\right) - \csc\left(\frac{3\pi}{1+\alpha}\right) \right) - 2\csc\left(\frac{2\pi}{1+\alpha}\right) \right],$$

в котором должно выполняться неравенство $1/2 < \alpha < 1$. Выпишем также в наших обозначениях выражение для спектра лоренцевского типа

$$u_{\omega} = \frac{q^2 \Omega^4 |x_0|^2}{12\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{(\omega - \Omega)^2 + \gamma^2}, \quad (9)$$

где γ — коэффициент затухания, $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ — частота затухающих колебаний. В режиме слабого затухания $\omega_0 \gg \gamma$ [19]. Для этого режима в (9) можно принять $\Omega \approx \omega_0$. В предельном случае при $\alpha \rightarrow 1$ и $\gamma \rightarrow 0$, т.е. в отсутствие затухания, формулы (8) и (9) совпадают.

Дальнейшая задача заключается в том, чтобы сравнить между собой спектральные линии, полученные с помощью выражений (8) и (9), а также провести сравнение с какими-либо образцовыми экспериментальными данными по излучению. Из результатов [11–13] следует, что согласование между спектральными линиями (8) и (9) должна обеспечивать приближенная формула

$$\alpha \approx 1 - \frac{2}{\pi Q} = 1 - \frac{4\gamma}{\pi\omega_0}, \quad (10)$$

где Q — добротность осциллятора. Численные расчеты показывают, что при соблюдении (10) удовлетворительное соответствие между (8) и (9) достигается уже при $Q > 5$. При $Q \geq 10$ спектральные линии, рассчитанные по формулам (8) и (9), практически неразличимы. Следовательно, в режиме слабого затухания влияние динамической памяти, которая задается формулой (2), ослабевает и модель дробного осциллятора приблизительно дает экспоненциальный закон релаксации [11–13]. Математически это выражается в экспоненциальном убывании осциллирующей функции (5) в области существования ее нулей, если значение α близко к единице [27].

В настоящей работе была проведена экспериментальная проверка модели дробного осциллятора. В качестве

источников излучения были выбраны SMD-светодиоды. Измерения спектров излучения светодиодов проводились с помощью спектрометра HR4000 с волоконным входом. Экспериментальные спектры излучения монохроматического оранжевого и люминофорного „белого“ светодиодов и теоретические расчеты по формуле (8) продемонстрированы на рисунке. В случае монохроматического оранжевого светодиода спектр был аппроксимирован одной спектральной линией (см. рисунок, *a*). Тогда как спектр люминофорного „белого“ светодиода (см. рисунок, *b*) аппроксимировался суммой двух спектральных линий с различными параметрами. Численные значения рассчитанных параметров для формул (8) и (10) указаны на рисунке. Можно видеть, что расчеты успешно воспроизводят основные (верхние) части спектров излучения. Для полупроводниковых светодиодов, которые можно отнести к высокодобротным излучательным системам с $Q \gg 1/2$, точность описания экспериментальных спектров оказывается такой же, как и в лоренцевской модели.

В заключение сформулируем основные выводы. Из сравнения расчетов с экспериментальными данными следует, что модель дробного осциллятора пригодна для описания спектральных линий дипольного излучения. Порядок дробного интегро-дифференцирования в (8) при $\alpha < 1$ определяет уширение спектральной линии излучения. Главным достоинством рассмотренной модели является то, что в ней отсутствует необходимость вводить динамическую (линейно зависящую от скорости) силу трения в уравнение движения; снижение порядка дробного интегро-дифференцирования в (4) эффективно учитывает диссипацию энергии колебаний осциллятора.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] F. Mainardi, *Chaos Solitons Fract.*, **7** (9), 1461 (1996). DOI: 10.1016/0960-0779(95)00125-5
- [2] B.N. Narahari Achar, J.W. Hanneken, T. Enck, T. Clarke, *Physica A*, **297** (3-4), 361 (2001). DOI: 10.1016/S0378-4371(01)00200-X
- [3] B.N. Narahari Achar, J.W. Hanneken, T. Clarke, *Physica A*, **309** (3-4), 275 (2002). DOI: 10.1016/S0378-4371(02)00609-X
- [4] B.N. Narahari Achar, J.W. Hanneken, T. Clarke, *Physica A*, **339** (3-4), 311 (2004). DOI: 10.1016/j.physa.2004.03.030
- [5] A.A. Stanislavsky, *Phys. Rev. E*, **70** (5), 051103 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevE.70.051103
- [6] M. Li, S.C. Lim, Sh. Chen, *Math. Probl. Eng.*, **2011**, 657839 (2011). DOI: 10.1155/2011/657839
- [7] V.E. Tarasov, *Cent. Eur. J. Phys.*, **10** (2), 382 (2012). DOI: 10.2478/s11534-012-0008-0
- [8] J.F. Gomez-Aguilar, J.J. Rosales-Garcia, J.J. Bernal-Alvarado, T. Cordova-Fraga, R. Guzman-Cabrera, *Rev. Mex. Fis.*, **58**, 348 (2012).
- [9] J.E. Escalante-Martinez, J.F. Gomez-Aguilar, C. Calderon-Ramon, L.J. Morales-Mendoza, I. Cruz-Orduna, J.R. Laguna-Camacho, *Adv. Mech. Eng.*, **8** (4), 1 (2016). DOI: 10.1177/1687814016643068
- [10] M. Berman, L.S. Cederbaum, *Physica A*, **505**, 744 (2018). DOI: 10.1016/j.physa.2018.03.044
- [11] S. Rekhviashvili, A. Pskhu, P. Agarwal, Sh. Jain, *Turk. J. Phys.*, **43** (3), 236 (2019). DOI: 10.3906/fiz-1811-16
- [12] A.B. Псху, С.Ш. Рехвиашвили, *Письма в ЖТФ*, **45** (1), 34 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.01.47154.17540 [A.V. Pskhu, S.Sh. Rekhviashvili, *Tech. Phys. Lett.*, **44** (12), 1218 (2018). DOI: 10.1134/S1063785019010164].
- [13] С.Ш. Рехвиашвили, А.В. Псху, *ЖТФ*, **89** (9), 1314 (2019). DOI: 10.21883/JTF.2019.09.48055.284-18 [S.Sh. Rekhviashvili, A.V. Pskhu, *Tech. Phys.*, **64** (9), 1237 (2019). DOI: 10.1134/S1063784219090135]
- [14] Р.И. Паровик, *Письма в ЖТФ*, **45** (13), 25 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.13.47953.17811 [R.I. Parovik, *Tech. Phys. Lett.*, **45** (7), 660 (2019). DOI: 10.1134/S1063785019070095].
- [15] Р.И. Паровик, *ЖТФ*, **90** (7), 1059 (2020). DOI: 10.21883/JTF.2020.07.49436.233-19 [R.I. Parovik, *Tech. Phys.*, **65** (7), 1015 (2020). DOI: 10.1134/S1063784220070154].
- [16] R. Parovik, *Mathematics*, **8** (11), 1879 (2020). DOI: 10.3390/math8111879
- [17] L.F.A. da Silva, V.R. Pedrozo, Jr., J.V.B. Ferreira, *Chin. J. Phys.*, **66**, 673 (2020). DOI: 10.1016/j.cjph.2020.04.020
- [18] J. Jackson, *Classical electrodynamics* (Wiley, N.Y., 1999).
- [19] Б.И. Степанов, В.П. Грибковский, *Введение в теорию люминесценции* (Изд-во АН БССР, Минск, 1963).
- [20] Р.Р. Нигматуллин, *ТМФ*, **90** (3), 354 (1992). DOI: 10.1007/BF01036529
- [21] А.И. Олемской, А.Я. Флат, *УФН*, **163** (12), 1 (1993). DOI: 10.1070/PU1993v036n12ABEN002208
- [22] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения* (Наука и техника, Минск, 1987).
- [23] А.М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение* (Физматлит, М., 2003).
- [24] А.В. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка* (Наука, М., 2005).
- [25] В.В. Учайкин, *Метод дробных производных* (Артишок, Ульяновск, 2008).
- [26] В.Е. Тарасов, *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка* (РХД, М.—Ижевск, 2010).
- [27] А.Ю. Попов, А.М. Седлецкий, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **40**, 3 (2011). DOI: 10.1007/s10958-013-1255-3