01.1

Резонансы в двумерных квантовых волноводах, разделенных полупрозрачным барьером с малым отверстием

© *А.М. Воробьев, И.Ю. Попов* ¶

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: popov1955@gmail.com

Поступило в Редакцию 12 апреля 2021 г.
В окончательной редакции 5 мая 2021 г.
Принято к публикации 9 мая 2021 г.

Рассматривается пара связанных квантовых волноводов с общей полупрозрачной границей, имеющей малое отверстие, что приводит к резонансным явлениям при прохождении электрона. С помощью метода согласования асимптотических разложений получены формулы для первых членов разложений резонансов (квазисобственных значений) и резонансных состояний. Исследовано влияние геометрии системы и параметра прозрачности границы на время жизни резонансных состояний.

Ключевые слова: квантовый волновод, резонанс, потенциал, сосредоточенный на линии.

DOI: 10.21883/PJTF.2021.17.51376.18826

Разработка новых наноэлектронных устройств требует теоретического исследования электронного транспорта через мезоскопические системы, в частности квантовые волноводы [1]. При этом особое внимание следует уделять резонансным эффектам при прохождении электрона через рассматриваемую систему [2,3]. Одна из причин таких эффектов — локальные возмущения волноводов, например связь между несколькими волноводами через малые отверстия [4,5]. Настоящая работа посвящена анализу задачи о связанных волноводах асимптотическими методами. Задача о волноводах, связанных через малые отверстия, в случае граничных условий Дирихле и Неймана была рассмотрена ранее [4–9]. Однако физически более осмыслена не полностью непроницаемая граница, а барьер между волноводами. Простейшей моделью такого барьера является полупрозрачная граница или, другими словами, потенциал, сосредоточенный на граничной линии (поверхности). В последнее время активно развивалась математическая теория таких потенциалов [10–16]. В настоящей работе используется метод согласования асимптотических разложений решений краевых задач, предложенный в [17] и развитый впоследствии для волноводов (см., например, [6,7,9,13,18]).

Мы рассматриваем систему из двух двумерных квантовых волноводов, соединенных общей полупрозрачной границей, в которой имеется малое отверстие. Вызываемые его существованием резонансы мы и рассматриваем. С математической точки зрения резонансные эффекты связаны с наличием у гамильтониана системы квазисобственных значений с малыми мнимыми частями. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить главные члены асимптотического разложения квазисобственного значения по малому параметру — ширине отверстия в границе. На внешних границах волноводов предполагается условие Дирихле.

Ширины волноводов равны d_+ и d_-, причем мы выбираем следующий диапазон их соотношения: $d_+ < d_- < 2d_+$. Это несущественное, чисто техническое ограничение. Рассматривается оператор Лапласа в полосе со следующими граничными условиями:

$$\psi\big|_{x_2=d_\pm}=0, \quad \psi\big|_{x_2=+0}=\psi\big|_{x_2=-0},$$
$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{x_2=+0}-\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_{x_2=-0}=\alpha\psi\big|_{x_2=\pm0}. \tag{1}$$

Полупрозрачность барьера описывается параметром α, причем $\alpha=0$ означает отсутствие стенки, а $\alpha=\infty$ — полностью непрозрачную стенку. Рассматривается возмущение данного оператора, прорезание малого отверстия в границе (рис. 1), которое приводит к появлению у оператора собственных значений и резонансов (квазисобственных значений), однако как локализованное возмущение не меняет непрерывный спектр, пороги которого определяются из условий (1). Мы будем

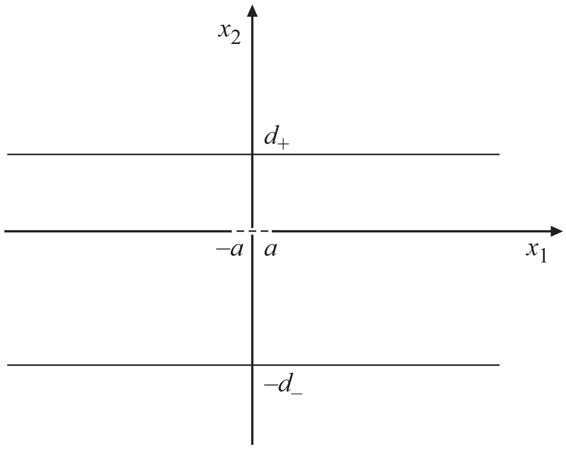

Рис. 1. Пара волноводов с общей полупрозрачной стенкой.

рассматривать асимптотику квазисобственного значения вблизи второго порогового значения непрерывного спектра $\lambda_2 = \nu_2^2$ (выбрано значение выше первого порога непрерывного спектра, чтобы в волноводе существовали решения типа бегущих волн). В этой формуле ν_j является j-м положительным корнем (они пронумерованы в порядке возрастания) уравнения

$$-\nu\,\mathrm{ctg}(d_+\nu) - \nu\,\mathrm{ctg}(d_-\nu) = \alpha. \qquad (2)$$

Асимптотическое разложение ищем в следующем виде:

$$\sqrt{\lambda_2 - k_a^2} = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{i=0}^{[j/2]-1} k_{ji} a^j \ln^i \frac{a}{a_0}. \qquad (3)$$

Здесь a — полуширина отверстия, a_0 — величина, выбранная в качестве единицы длины для асимптотических формул, k_a^2 — искомое квазисобственное значение. Появление в анзаце (3) логарифма связано с наличием логарифмических членов в асимптотике функции Грина (см., например, [6,7,9]). Коэффициенты этого разложения находятся методом согласования асимптотических разложений решений краевых задач, которое производится в малой окрестности отверстия, а именно строятся окружности радиусов $\sqrt{a}$ и $2\sqrt{a}$ с центрами в центре отверстия. Во внешности малого круга строится внешнее разложение решения, а во внутренности большого круга — внутреннее разложение решения. В пересечении данных областей производится согласование разложений, из которого и находятся коэффициенты. Особенно интересно найти мнимую часть квазисобственного значения, которая обратно пропорциональна времени жизни соответствующего квазисвязанного состояния. Первым коэффициентом, обладающим мнимой частью, является k_{40}. Коэффициенты находятся последовательно, поэтому для отыскания мнимой части квазисобственного значения требуется найти и предыдущие коэффициенты. Опуская эти весьма длинные выкладки, приведем лишь результат

$$\mathrm{Im}k_{40} = \frac{\pi d_- d_+ C_1^4 \nu^4 \sin^2(2d_+\nu)\sin^2(2d_-\nu)}{4\sqrt{d_-^2 - d_+^2}}. \qquad (4)$$

В этой формуле ν является вторым положительным решением уравнения (2), т.е. отражает зависимость от α. C_1 — нормировочный коэффициент собственных функций.

Как видно из формулы (4), время жизни резонансного состояния, которое в главном члене пропорционально $(\mathrm{Im}k_{40})^{-1}$, зависит от трех основных параметров системы: ширин обоих волноводов и параметра полупрозрачности α. Для удобства выберем в качестве единицы длины ширину верхнего волновода: $d_+ = 1$. Тогда с учетом принятых нами ограничений d_- может меняться в диапазоне $1 < d_- < 2$.

Исследуем зависимость $(\mathrm{Im}k_{40})^{-1}$ от d_- при фиксированных значениях α: 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2 и 5. Расчеты проведены численно с помощью программного комплекса SMath Studio. Из формулы (4) ясно, что при каждом фиксированном α найдется такое значение d_-, при котором $\mathrm{Im}k_{40} = 0$. В частности, это будет в том случае, когда мы имеем не квазисобственное значение, а собственное. В этих точках, положение которых зависит от параметра прозрачности барьера α, вычисления не производились, поэтому бесконечности на рис. 2 не показаны.

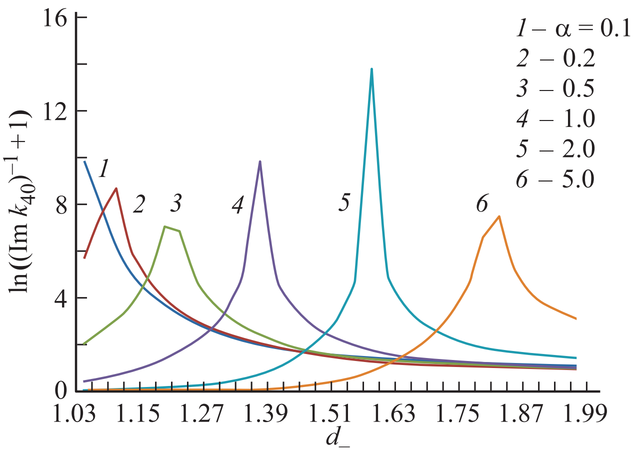

Рис. 2. Зависимость $(\mathrm{Im}k_{40})^{-1}$ от d_- (за единицу измерения по осям взято d_+).

Таким образом, в работе изучен резонанс для двумерных квантовых волноводов, разделенных полупрозрачной границей с малым отверстием, и найдена его асимптотика по ширине отверстия.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] J.B. Wang, S.J. Midgley, Comp. Theor. Nanosci., **4**, 408 (2007). DOI: 10.1166/jctn.2007.2326

[2] A. Delitsyn, B. Nguyen, D. Grebenkov, Eur. Phys. J. B, **85**, 371 (2012). DOI: 10.1140/epjb/e2012-30286-8

[3] Ch. Kunze, Phys. Rev. B, **48**, 14338 (1993). DOI: 10.1103/PhysRevB.48.14338

[4] P. Exner, S. Vugalter, Ann. Inst. Henri Poincare A, **65**, 109 (1996).

[5] P. Exner, P. Šeba, M. Tater, D. Vaněk, J. Math. Phys., **37**, 4867 (1996). DOI: 10.1063/1.531673

[6] И.Ю. Попов, Письма в ЖТФ, **25** (3), 57 (1999). [Пер. версия: 10.1134/1.1262397].

[7] И.Ю. Попов, С.В. Фролов, Письма в ЖТФ, **26** (1), 17 (2000). [Пер. версия: 10.1134/1.1262721].

[8] M.I. Gavrilov, L.V. Gortinskaya, A.A. Pestov, I.Yu. Popov, E.S. Tesovskaya, Phys. Part. Nucl. Lett., **4**, 137 (2007). DOI: 10.1134/S1547477107020082

[9] Е.С. Трифанова, Письма в ЖТФ, **35** (4), 60 (2009). [Пер. версия: 10.1134/S1063785009020242].

[10] И.Ю. Попов, ФТТ, **36** (7), 1918 (1994).

[11] P. Exner, D. Kreicirik, Rev. Math. Phys., **13**, 307 (2001). DOI: 10.1142/S0129055X01000703
[12] P. Exner, D. Kreicirik, J. Phys. A., **32**, 4475 (1999). DOI: 10.1088/0305-4470/32/24/312
[13] A.M. Vorobiev, A.S. Bagmutov, A.I. Popov, Nanosyst.: Phys. Chem. Math., **10**, 415 (2019). DOI: 10.17586/2220-8054-2019-10-4-415-419
[14] J. Behrndt, M. Langer, V. Lotoreichik, Nanosyst.: Phys. Chem. Math., **7**, 290 (2016). DOI: 10.17586/2220-8054-2016-7-2-290-302
[15] A. Mantile, A. Posilicano, Nanosyst.: Phys. Chem. Math., **7**, 315 (2016). DOI: 10.17586/2220-8054-2016-7-2-315-323
[16] P. Exner, S. Kondej, V. Lotoreichik, J. Math. Phys., **59**, 013051 (2018). DOI: 10.1063/1.5019931
[17] А.М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач* (Наука, М., 1989).
[18] D. Borisov, P. Exner, J. Math. Phys., **47**, 113502 (2006). DOI: 10.1063/1.2364179