

03

## Влияние нелинейности закона намагничивания феррожидкости на неустойчивость Кельвина–Гельмгольца

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия  
e-mail: verazhan@yandex.ru

Поступило в Редакцию 12 февраля 2021 г.  
В окончательной редакции 30 марта 2021 г.  
Принято к публикации 31 марта 2021 г.

Изучена неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, возникающая при движении однородного газового потока над горизонтальной поверхностью движущейся в том же направлении феррожидкости с заданными физическими свойствами при наличии приложенного однородного магнитного поля, параллельного векторам скоростей рассматриваемых сред. Диапазон напряженности поля включает значения, соответствующие интервалу выхода кривой намагничивания феррожидкости на величину намагниченности насыщения. В плоскости параметров напряженность поля–обезразмеренная относительная скорость сред построена область устойчивости.

**Ключевые слова:** гидродинамическая устойчивость, феррожидкость, магнитное поле, кривая намагничивания.

DOI: 10.21883/JTF.2021.08.51091.33-21

### Введение

Исследование устойчивости движения в поле тяжести находящихся один над другим однородных горизонтальных потоков идеальных несжимаемых жидкостей, имеющих различные скорости и плотности, является одной из классических задач гидродинамики [1,2]. В [1] этот вопрос рассматривается как задача о нахождении условия устойчивости тангенциального разрыва в поле тяжести с учетом поверхностного натяжения. Решение получено в рамках плоской задачи для периодических вдоль горизонтальной оси координат возмущений, наложенных на основное движение. В [2] на базе системы уравнений и граничных условий, описывающих поведение с ростом времени возмущений трех компонент скорости и давления, зависящих от трех пространственных переменных, исследовано развитие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Приведенные в [1,2] результаты, естественно, одинаковы. Физический механизм, вызывающий неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, описан в [3] в терминах динамики вихревых движений. Краткое изложение этого вопроса имеется в [4].

Исследование неустойчивости Кельвина–Гельмгольца при относительном движении находящихся в продольном однородном магнитном поле  $\mathbf{H}_0$  однородных феррожидкостей с различающимися между собой магнитными восприимчивостями, занимающих нижнее и верхнее полупространства, проведено в [5]. Случай слоев заданной толщины рассмотрен в [6]. При этом в отличие от [5] изучено поведение с ростом времени возмущений, у которых волновые векторы имеют любой угол с направлением относительной скорости  $\mathbf{u}_0$  слоев, а приложен-

ное горизонтальное магнитное поле имеет продольную (параллельную  $\mathbf{u}_0$ ) и поперечную компоненты.

В [5,6] предполагается, что магнитные восприимчивости являются константами. Ввиду этого использован линейный закон намагничивания. Такой подход оправдан лишь в случае слабых полей.

На практике кривые намагничивания, получаемые с использованием сильных полей, показывают нелинейную зависимость намагниченности феррожидкости от величины приложенного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ .

В настоящей работе не накладывается ограничение на напряженность магнитного поля. С целью охвата максимально широкого диапазона величины  $H_0$  применена аппроксимация экспериментальной кривой намагничивания феррожидкости функцией Ланжевена [7] от модифицированного аргумента [8], выраженного через  $H_0$  и полученные из эксперимента начальную магнитную восприимчивость  $\chi_i$  и намагниченность насыщения  $M_s$  рассматриваемой феррожидкости. Численные значения физических свойств феррожидкости взяты из экспериментальной работы [9] по исследованию турбулентности, вызываемой волнами на поверхности феррожидкости, граничащей с воздухом при наличии однородного горизонтального магнитного поля.

### 1. Постановка задачи

Анализ неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, возникающей при движении слоев феррожидкостей с различающимися между собой магнитными свойствами [6], показывает, что стабилизирующее воздействие внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  наиболее эффективно проявляется

в случае, когда магнитные силовые линии параллельны векторам скоростей слоев. В такой ситуации наиболее быстро растущее возмущение магнитного поля, вызываемое изменением формы поверхности раздела ввиду наличия волн, дает максимальный вклад в динамическое условие на поверхности раздела.

Принимая во внимание это обстоятельство, исследование неустойчивости Кельвина–Гельмгольца при относительном движении газа и феррожидкости будем проводить в рамках плоской задачи, как и в [1] при исследовании устойчивости тангенциального разрыва. Предполагается, что скорости сред имеют одинаковое направление, а скорость газа больше скорости феррожидкости.

Введем подвижную прямоугольную систему координат  $x, z$ , связанную с однородным потоком феррожидкости. Ось  $x$  направим параллельно относительной скорости газа  $\mathbf{u}_0$ , ось  $z$  вертикальна, а начало координат находится на плоской в момент  $t = 0$  поверхности раздела между феррожидкостью и газом. Будем отмечать индексами  $j = 1, 2$  магнитное и гидродинамическое поля, а также физические свойства соответственно феррожидкости ( $j = 1$ ) и газа ( $j = 2$ ). При записи характеристик феррожидкости, связанных с эффектом намагничивания, индекс  $j = 1$  опускаем.

При плоской поверхности раздела векторы магнитной индукции и намагниченности феррожидкости обозначим  $\mathbf{B}_{01} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H}_0$ ,  $\mathbf{M}_0 = \chi\mathbf{H}_0$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/м — магнитная постоянная, а  $\chi = \chi(H_0)$  — магнитная восприимчивость. Как и в гидростатике, давление  $p_{0j}$  выражается линейной функцией от  $z$ .

Вследствие развития начальных бесконечно малых возмущений плоская при  $t = 0$  поверхность раздела  $z = 0$  с ростом времени деформируется. При наличии на поверхности раздела волн используем следующие обозначения:  $\mathbf{H}_j(x, z, t) = (H_{jx}, H_{jz})$  — магнитные поля,  $\mathbf{B}_1(x, z, t) = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}_1)$ ,  $\mathbf{B}_2(x, z, t) = \mu_0\mathbf{H}_2$  — векторы магнитной индукции,  $\mathbf{M}(x, z, t) = \chi(H_1)\mathbf{H}_1$  — вектор намагниченности. Учитывается зависимость магнитной восприимчивости  $\chi$  от  $H_1 = \sqrt{H_{1x}^2 + H_{1z}^2}$ . Используются также дифференциальная проницаемость  $\mu_t(H_1) = dB_1/dH_1$  и дифференциальная магнитная восприимчивость  $\chi_t(H_1) = dM/dH_1$ , причем  $\mu_t(H_1) = \mu_0[1 + \chi_t(H_1)]$ . Реализующаяся в экспериментах кривая намагничивания  $M = \chi(H_1)H_1$  любой феррожидкости является выпуклой кверху, ввиду чего  $\chi_t(H_1) < \chi(H_1)$ .

Поскольку в рассматриваемых средах электрические токи отсутствуют, существует потенциал магнитного поля  $\Psi_j(x, z, t)$ . Имеем

$$\mathbf{H}_j = \nabla\Psi_j, \quad \mathbf{B}_1 = \mu\nabla\Psi_1, \quad \mathbf{B}_2 = \mu_0\nabla\Psi_2, \quad \mathbf{M} = \chi\nabla\Psi_1, \quad (1)$$

где  $\mu(H_1) = \mu_0[1 + \chi(H_1)]$  — магнитная проницаемость феррожидкости.

С учетом (1) условие соленоидальности вектора магнитной индукции приводит к следующим уравнениям:

$$\mu\Delta\Psi_1 + \frac{\mu_t - \mu}{|\nabla\Psi_1|} \nabla|\nabla\Psi_1| \cdot \nabla\Psi_1 = 0, \quad \Delta\Psi_2 = 0. \quad (2)$$

Положим  $\Psi_j(x, z, t) = H_0x + f_j(x, z, t)$ . Считая  $|\nabla f_j| \ll H_0$ , после линеаризации первого уравнения и преобразования второго уравнения (2) получаем

$$\sigma^2(H_0) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = 0, \quad \Delta f_2 = 0, \quad (3)$$

где

$$\sigma(H_0) = \sqrt{\frac{1 + \chi_t(H_0)}{1 + \chi(H_0)}}.$$

Для вычисления  $\sigma$  требуются полученные из эксперимента параметры  $\chi(H_0)$ ,  $\chi_t(H_0)$ .

На поверхности раздела феррожидкость–газ граничные условия магнитостатики в линейном приближении записываются следующим образом:

$$z = 0: \quad f_1 = f_2, \quad \mu(H_0) \frac{\partial f_1}{\partial z} - \mu_0 \frac{\partial f_2}{\partial z} = \mu_0 M_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (4)$$

где  $\xi(x, t)$  — отклонение поверхности раздела от плоскости  $z = 0$ . Вдали от поверхности раздела  $z = \xi(x, t)$  возмущение магнитного поля исчезает.

Аппроксимируем экспериментальную кривую намагничивания функцией Ланжевена [7]  $L_\infty(a) = \text{cth } a - 1/a$  от модифицированного аргумента  $a = 3\chi_t H_0/M_s$ , где  $\chi_t = \chi$  при  $H_0 \rightarrow 0$  и  $M_s = M$  при  $H_0 \rightarrow \infty$  [8]. В результате получаем

$$M(H_0) = M_s L_\infty(3\chi_t H_0/M_s),$$

$$\chi(H_0) = \frac{M_s}{H_0} L_\infty(3\chi_t H_0/M_s),$$

$$\chi_t(H_0) = \frac{1}{3\chi_t H_0^2} \left\{ M_s^2 - \left[ 3\chi_t H_0 \cos \text{ech} \left( \frac{3\chi_t H_0}{M_s} \right) \right]^2 \right\}. \quad (5)$$

Используя разложение функции Ланжевена при малых значениях аргумента

$$L_\infty(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + O(a^5), \quad \text{III},$$

в случае слабых полей имеем

$$M(H_0) = \chi_t H_0 [1 - 0.6(\chi_t H_0/M_s)^2] \quad \text{при } H_0 \ll M_s/(3\chi_t).$$

Опуская в этом выражении малую величину, приходим к линейному закону намагничивания.

При слабых полях  $\sigma = 1$ , поскольку физические параметры  $\chi(H_0)$ ,  $\chi_t(H_0)$  отличаются друг от друга величинами четвертого порядка малости.

Линеаризованные уравнения гидродинамики записываются следующим образом:

$$\text{div} \mathbf{u}_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

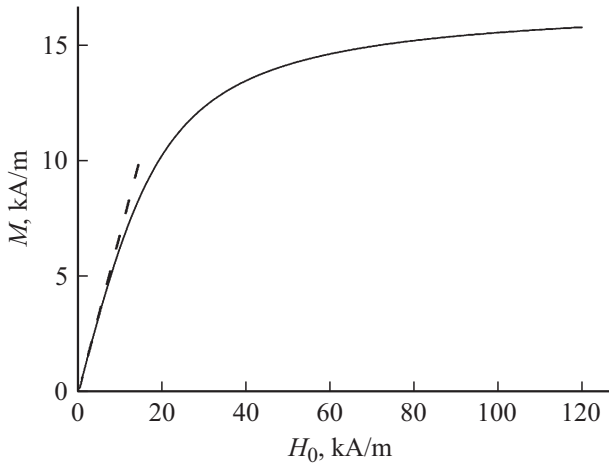
$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} &= -\nabla p_1 + \rho_1 \mathbf{g} + \mu_0 M_0 \nabla \frac{\partial f_1}{\partial x}, \\ \rho_2 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x} \right) &= -\nabla p_2 + \rho_2 \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\rho_j$  — плотность,  $p_j = p_j(x, z, t)$  — возмущение давления,  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(x, z, t) = (u_{1x}, u_{1z})$  — скорость феррожидкости,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(x, z, t) = (u_{2x}, u_{2z})$  — возмущение скорости газа,  $\mathbf{g} = (0, -g)$  — ускорение свободного падения.

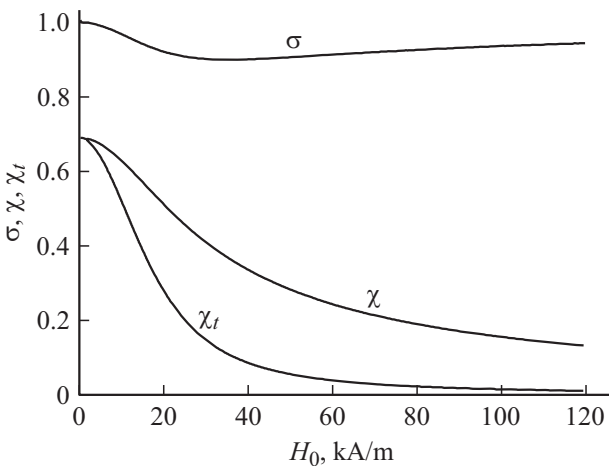
В рассматриваемом приближении кинематические и динамические условия на поверхности раздела записываются следующим образом:

$$z = 0: \frac{\partial \xi}{\partial t} = u_{1z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = u_{2z}, \quad p_2 - p_1 = \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (7)$$

где  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения. Вдали от поверхности раздела  $\mathbf{u}_1 \rightarrow 0, \mathbf{u}_2 \rightarrow 0$ .



**Рис. 1.** Законы намагничивания феррожидкости. Сплошная линия — кривая намагничивания рассматриваемой феррожидкости, находящейся в магнитном поле с напряженностью  $H_0$ ; штриховая прямая — линейный закон намагничивания.



**Рис. 2.** Графики зависимости безразмерных параметров  $\sigma, \chi, \chi_t$  от напряженности приложенного магнитного поля.

Следует отметить, что известный в феррогидродинамике магнитный скачок давления [10] в динамическом условии — последнее равенство (7) — опущен ввиду малости.

На рис. 1 сплошная линия представляет кривую намагничивания — первое равенство (5) — рассматриваемой феррожидкости, находящейся в магнитном поле с напряженностью  $H_0$ . Штриховой прямой показан линейный закон намагничивания.

На рис. 2 показаны графики функций  $\sigma = \sigma(H_0), \chi = \chi(H_0)$  и  $\chi_t = \chi_t(H_0)$ .

При построении графиков на рис. 1, 2 рассматривается использованная в экспериментах [9] феррожидкость. У этой феррожидкости  $\chi_t = 0.69, M_s = 16.9$  кА/м.

С использованием потенциала скорости  $\mathbf{u}_j = \nabla \phi_j$  задача (6), (7) записывается следующим образом:

$$\Delta \phi_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

$$z = 0: \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial z}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho_2 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) + g \xi (\rho_1 - \rho_2) - \mu_0 M_0 \frac{\partial f_1}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Далее рассматривается задача феррогидродинамики (3), (4), (8), (9).

## 2. Исследование неустойчивости

Пусть плоская в начальный момент времени поверхность раздела испытывает малое возмущение, при котором координаты точек самой поверхности и все искомые величины, фигурирующие в уравнениях (3), (8), являются периодическими функциями, пропорциональными  $\exp\{i[kx - \omega(k)t]\}$ :

$$\begin{aligned} (\xi(x, t), f_j(x, z, t), \phi_j(x, z, t)) &= (Z(k), F_j(z), \Phi_j(z)) \\ &\times \exp\{i[kx - \omega(k)t]\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $Z$  — константа,  $i$  — мнимая единица,  $k > 0$  — действительный параметр (волновое число), а частота  $\omega(k)$  является искомой функцией.

Подставив выражения (10) в уравнения Лапласа (3), (8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_1}{dz^2} - (\sigma k)^2 F_1 &= 0, \quad \frac{d^2 F_2}{dz^2} - k^2 F_2 = 0, \\ \frac{d^2 \Phi_j}{dz^2} - k^2 \Phi_j &= 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом (10) граничные условия (4), (9) записываются следующим образом:

$$z = 0: F_1 = F_2, \quad (1 + \chi) \frac{dF_1}{dz} - \frac{dF_2}{dz} = ikM_0 Z, \quad (12)$$

$$i\omega Z + \frac{d\Phi_1}{dz} = 0, \quad i(u_0 k - \omega)Z = \frac{d\Phi_2}{dz},$$

$$i\rho_1\Phi_1\omega - i\rho_2\Phi_2(\omega - u_0 k) - Z[\alpha k^2 + g(\rho_1 - \rho_2)] + ik\mu_0 M_0 F_1 = 0.$$

Легко указать обращающиеся в нуль при  $z \rightarrow +\infty$  решения уравнений (11)

$$\Phi_1 = A_1 \exp(kz), \quad \Phi_2 = A_2 \exp(-kz), \quad (13)$$

$$F_1 = D_1 \exp(\sigma k z), \quad F_2 = D_2 \exp(-kz),$$

где  $A_1, A_2, D_1, D_2$  — произвольные константы. При подстановке решений (13) в граничные условия (12) получаем систему линейных однородных уравнений относительно  $A_1, A_2, D_1, D_2, Z$ :

$$D_1 - D_2 = 0, \quad (1 + \chi)\sigma k D_1 + k D_2 - ik M_0 Z = 0, \quad (14)$$

$$k A_1 + i\omega Z = 0, \quad k A_2 + i(\omega - u_0 k)Z = 0,$$

$$i\rho_1\omega A_1 - i\rho_2(\omega - u_0 k)A_2 + ik\mu_0 M_0 D_1 - [\alpha k^2 + g(\rho_1 - \rho_2)]Z = 0.$$

Система (14) тогда и только тогда обладает решениями, отличными от нулевого, когда ее определитель равен нулю. Вычислив определитель и приравняв его нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 - 2 \frac{\rho_2 u_0 k}{\rho_1 + \rho_2} \omega - \frac{k}{\rho_1 + \rho_2} \left\{ \alpha k^2 + \frac{\mu_0 M_0^2}{1 + \sigma(H_0)[1 + \chi(H_0)]} - \rho_2 u_0^2 \right\} k + g(\rho_1 - \rho_2) = 0. \quad (15)$$

Из (15) находим

$$\omega(k) = \frac{\rho_2 u_0 k}{\rho_1 + \rho_2} \pm \frac{k}{\sqrt{\rho_1 + \rho_2}} \left\{ \alpha k + \frac{\mu_0 M_0^2}{1 + \sigma(H_0)[1 + \chi(H_0)]} - \frac{\rho_1 \rho_2 u_0^2}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k} \right\}^{1/2}. \quad (16)$$

Положим

$$\beta(k) = \alpha k + \frac{\mu_0 M_0^2}{1 + \sigma(H_0)[1 + \chi(H_0)]} - \frac{\rho_1 \rho_2 u_0^2}{\rho_1 + \rho_2} - \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k}.$$

При  $\beta(k) \geq 0$  функция  $\omega(k)$  вещественна. Ввиду этого в случае, когда

$$u_0^2 \leq \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} q(k), \quad (17)$$

$$q(k) = \alpha k + \frac{\mu_0 M_0^2}{1 + \sigma(H_0)[1 + \chi(H_0)]} + \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{k}, \quad k > 0,$$

относительное движение сред, имеющих плоскую поверхность раздела, устойчиво.

Стационарная точка  $k_c = \sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)/\alpha}$  функции  $q(k)$  является точкой минимума. Подставив в (17)  $k = \sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)/\alpha}$ , находим условие устойчивости

$$u_0^2 \leq \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left\{ 2\sqrt{\alpha g(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{\mu_0 M^2(H_0)}{1 + \sigma(H_0)[1 + \chi(H_0)]} \right\}. \quad (18)$$

Неравенство (18) является обобщением на случай феррогидродинамики условия устойчивости тангенциального разрыва в гидродинамике [1]. Если же

$$u_0^2 > \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left\{ 2\sqrt{\alpha g(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{\mu_0 M^2(H_0)}{1 + \sigma(H_0)[1 + \chi(H_0)]} \right\},$$

то движение неустойчиво. Ввиду этого в плоскости параметров  $(H_0, u_0)$  уравнение кривой нейтральной устойчивости имеет вид

$$u_0(H_0) = \left\{ \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left\{ 2\sqrt{\alpha g(\rho_1 - \rho_2)} + \frac{\mu_0 M^2(H_0)}{1 + \sigma(H_0)[1 + \chi(H_0)]} \right\} \right\}^{1/2},$$

Если электромагнит, создающий поле, выключен, то движение феррожидкости описывается уравнениями гидродинамики. В этом случае наибольшая относительная скорость сред, при которой капиллярные силы подавляют рост волновых возмущений плоской поверхности раздела, равна

$$U = \left\{ \frac{4\alpha g(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 + \rho_2)^2}{\rho_1^2 \rho_2^2} \right\}^{1/4} = 6.78 \text{ m/s}.$$

В плоскости параметров  $(H_0, (u_0(H_0)/U))$  уравнение кривой нейтральной устойчивости можно записать следующим образом:

$$\frac{u_0(H_0)}{U} = \left\{ 1 + \frac{\mu_0 M^2(H_0)}{2\sqrt{\alpha g(\rho_1 - \rho_2)}\{1 + \sigma(H_0)[1 + \chi(H_0)]\}} \right\}^{1/2}.$$

На рис. 3 изображен график этой функции. Область, лежащая ниже кривой, является областью устойчивости.

При построении графика на рис. 3 рассмотрена использованная в экспериментах [9] феррожидкость, имеющая границу с воздухом. У этой феррожидкости  $\rho_1 = 1324 \text{ kg/m}^3$ ,  $\alpha = 0.059 \text{ N/m}$ . Плотность воздуха  $\rho_2 = 1.205 \text{ kg/m}^3$  [3].

По сравнению со случаем слабых полей, когда выполняется линейный закон намагничивания (рис. 1), при сильных полях за счет нелинейности закона намагничивания стабилизирующее воздействие магнитных сил существенно возрастает и область устойчивости (рис. 3) расширяется. При этом подавление неустойчивости Кельвина-Гельмгольца происходит при значительно большей относительной скорости потоков газа и феррожидкости.

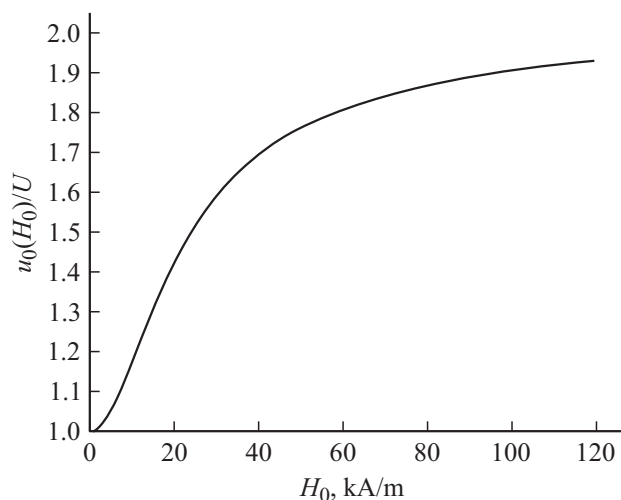


Рис. 3. Кривая нейтральной устойчивости.

При сильном магнитном поле на кривой нейтральной устойчивости появляется точка перегиба. После прохождения точки перегиба при дальнейшем увеличении напряженности магнитного поля кривая нейтральной устойчивости выходит на плато.

## Заключение

Изучена неустойчивость Кельвина–Гельмгольца при относительном движении потоков воздуха и феррожидкости с заданными физическими свойствами при наличии продольного магнитного поля любой технически достижимой в экспериментах напряженности.

Нелинейность закона намагничивания обеспечивает подавление неустойчивости Кельвина–Гельмгольца при существенно большей относительной скорости потоков газа и феррожидкости, чем в случае линейного намагничивания феррожидкости.

Получено уравнение кривой нейтральной устойчивости в плоскости параметров напряженность магнитного поля — безразмерная относительная скорость сред. Показано, что эта кривая выходит на плато с ростом напряженности поля.

## Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Гидродинамика* (Наука, М., 1988)
- [2] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Oxford University Press: Clarendon Press, 1961)
- [3] Дж. Бэтчелор. *Введение в динамику жидкости* (Мир, М., 1973)

- [4] Ф. Дразин. *Введение в теорию гидродинамической устойчивости* (Физматлит, М., 2005)
- [5] Р. Розенцвейг. *Феррогидродинамика* (Мир, М., 1989)
- [6] В.Г. Баштовой. *ПМТФ*, **1**, 81 (1978).
- [7] Д.В. Сивухин. *Электричество* (Наука, М., 1983)
- [8] B. Abou, G. Néron de Surgy, J.E. Wesfreid. *J. Phys. II France*, **7** (8), 1159 (1997).
- [9] S. Dorbolo, E. Falcon. *Phys. Rev. E*, **83** (4), 046303 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevE.83.046303
- [10] Б.М. Берковский, В.Ф. Медведев, М.С. Краков. *Магнитные жидкости* (Химия, М., 1989)