Оптика и спектроскопия, 2021, том 129, вып. 7

03

Электромагнитные волны в волноводе с периодически модулированным магнитодиэлектрическим заполнением

© Э.А. Геворкян

Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова,
117997 Москва, Россия

e-mail: gevor_mesi@mail.ru

Поступила в редакцию 31.01.2021 г.
В окончательной редакции 17.03.2021 г.
Принята к публикации 22.03.2021 г.

Рассмотрено распространение электромагнитных волн в идеальном регулярном волноводе, магнитодиэлектрическое заполнение которого периодически модулировано в пространстве и во времени. Предполагается, что глубины модуляции — малые величины, и модуляция заполнения волновода не приводит к взаимодействию между различными волноводными модами. Получены волновые уравнения для поперечно-электрического (TE) и поперечно-магнитного (TM) полей в волноводе относительно продольных составляющих магнитного и электрического векторов соответственно. Они представляют дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с периодическими коэффициентами. Заменой переменных эти уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами типа Матье−Хилла. Найдены решения этих уравнений в первом приближении по малым глубинам модуляции в области „слабого“ взаимодействия между сигнальной волной и волной модуляции (условие Вульфа−Брэгга не выполняется). Полученные результаты показывают, что TE- и TM-поля в волноводе в указанном выше приближении представляются в виде суммы трех пространственно-временных гармоник (нулевая и плюс и минус первые) со сложными амплитудами и частотами.

Ключевые слова: волновод, электромагнитная волна, модулированное заполнение, волновое уравнение, уравнение типа Матье−Хилла, глубины модуляции.

DOI: 10.21883/OS.2021.07.51081.1865-21

Введение

В работах [1–8] были исследованы многие аспекты взаимодействия сигнальной электромагнитной волны с периодически модулированной диэлектрической средой в неограниченном пространстве и в регулярном волноводе произвольного поперечного сечения. Настоящая работа посвящена исследованию взаимодействия поперечно-электрической (TE) и поперечно-магнитной (TM) волн с периодически модулированной в пространстве и во времени магнитодиэлектрической средой в идеальном регулярном волноводе произвольного поперечного сечения. Подобное исследование представляет интерес не только с точки зрения развития теории электродинамики периодических сред, но и с точки зрения возможностей использования периодических сред в различных областях электроники СВЧ [2].

Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим регулярный идеальный волновод произвольного поперечного сечения, ось которого совпадает с осью OZ некоторой прямоугольной системы координат, а магнитодиэлектрическая среда в волноводе периодически модулирована в пространстве и во времени по закону

$$\varepsilon(z,t) = \varepsilon^0[1 + m_\varepsilon \cos k_0(z - ut)], \quad (1)$$

$$\mu(z,t) = \mu^0[1 + m_\mu \cos k_0(z - ut)], \quad (2)$$

где k_0 и u — волновые числа и скорость волны модуляции, m_ε и m_μ — малые глубины модуляции ($m_\varepsilon \ll 1$, $m_\mu \ll 1$), ε^0 и μ^0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости заполнения волновода в отсутствие модуляции. Пусть электромагнитная волна с частотой ω_0 распространяется в подобном волноводе вдоль его оси в положительном направлении оси OZ.

Как известно [4,6] TE- и TM-поля в волноводе можно описывать с помощью продольных компонент магнитного и электрического векторов соответственно. Волновые уравнения для указанных компонент можно получить из системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon(z,t)\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0\mu(z,t)\mathbf{H}, \quad (4)$$

где $\varepsilon(z,t)$ и $\mu(z,t)$ выражаются формулами (1) и (2), $\varepsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1} F/m$ — электрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$ — магнитная постоянная. Вычисления приводят к следующим дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка:

$$\Delta_\perp \tilde{H}_z + \mu \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial z}\right) - \varepsilon_0\mu_0\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial t}\right) = 0, \quad (5)$$

$$\Delta_\perp \tilde{E}_z + \varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial z}\right) - \varepsilon_0\mu_0\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial t}\right) = 0, \quad (6)$$

где $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — двумерный оператор Лапласа, а $\tilde{H}_z$ и $\tilde{E}_z$ определяются формулами

$$\tilde{H}_z(x, y, z, t) = \mu(z, t) H_z(x, y, z, t), \quad (7)$$

$$\tilde{E}_z(x, y, z, t) = \mu(z, t) E_z(x, y, z, t). \quad (8)$$

Если в уравнения (5) и (6) ввести новые переменные по формулам

$$\xi = z - ut, \quad \eta = \frac{z}{u} - \frac{1}{u}\int_0^\xi \frac{d\xi}{1 - \beta^2\varepsilon(\xi)\mu(\xi)}, \quad (9)$$

где $\beta^2 = u^2\varepsilon_0\mu_0$, то они относительно переменных ξ и η преобразуются к виду

$$\Delta_\perp \tilde{H}_z + \mu \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{\mu}(1 - \beta^2\varepsilon\mu)\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \xi}\right] - \frac{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}{1 - \beta^2\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 \tilde{H}_z}{\partial \eta^2} = 0, \quad (10)$$

$$\Delta_\perp \tilde{E}_z + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{\varepsilon}(1 - \beta^2\varepsilon\mu)\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial \xi}\right] - \frac{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}{1 - \beta^2\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 \tilde{E}_z}{\partial \eta^2} = 0. \quad (11)$$

Решения уравнений (10) и (11) ищем в виде

$$\tilde{H}_z(x, y, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi) e^{i\eta\gamma} \widehat{\psi}_n(x, y), \quad (12)$$

$$\tilde{E}_z(x, y, \xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\xi) e^{i\eta\gamma} \psi_n(x, y), \quad (13)$$

где $\widehat{\psi}_n(x, y)$ и $\psi_n(x, y)$ являются ортонормированными собственными функциями краевых задач Неймана (вторая) и Дирихле (первая) для поперечного сечения волновода и удовлетворяют уравнениям Гельмгольца с соответствующими граничными условиями:

$$\Delta_\perp \widehat{\psi}_n(x, y) + \widehat{\lambda}_n^2 \widehat{\psi}_n(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \widehat{\psi}_n(x, y)}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_\Sigma = 0, \quad (14)$$

$$\Delta_\perp \psi_n(x, y) + \lambda_n^2 \psi_n(x, y) = 0, \quad \psi_n(x, y)\big|_\Sigma = 0. \quad (15)$$

Отметим, что в (14) и (15) $\widehat{\lambda}_n$ и λ_n — собственные значения краевых задач, соответствующих собственным функциям $\widehat{\psi}_n(x, y)$ и $\psi_n(x, y)$, Σ — контур поперечного сечения волновода, $\mathbf{n}$ — нормаль к Σ.

Любопытно заметить, что если решения волновых уравнений (5) и (6) искали бы в виде

$$\tilde{H}_z(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(z, t) \widehat{\psi}_n(x, y), \quad (16)$$

$$\tilde{E}_z(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(z, t) \psi_n(x, y), \quad (17)$$

то из уравнений Максвелла (3) и (4) с учетом (14) и (15) для поперечных составляющих TE- и TM-полей в волноводе получили бы следующие выражения:

$$\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{TE}} = \frac{1}{\mu(z, t)} \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\lambda}_n^{-2} \frac{\partial[\mu(z, t) H_n(z, t)]}{\partial z} \nabla \widehat{\psi}_n(x, y), \quad (18)$$

$$\mathbf{E}_\tau^{\mathrm{TE}} = \mu_0 \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\lambda}_n^{-2} \frac{\partial[\mu(z, t) H_n(z, t)]}{\partial z} [\mathbf{z}_0 \nabla \widehat{\psi}_n(x, y)], \quad (19)$$

$$\mathbf{H}_\tau^{\mathrm{TE}} = -\varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \frac{\partial[\varepsilon(z, t) E_n(z, t)]}{\partial z} [\mathbf{z}_0 \nabla \psi_n(x, y)], \quad (20)$$

$$\mathbf{E}_\tau^{\mathrm{TE}} = \frac{1}{\varepsilon(z, t)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-2} \frac{\partial[\varepsilon(z, t) E_n(z, t)]}{\partial z} \nabla \psi_n(x, y), \quad (21)$$

где $\nabla = \mathbf{i}(\partial/\partial x) + \mathbf{j}(\partial/\partial y)$ — двумерный оператор набла, $\mathbf{z}_0$ — орт оси OZ индекс τ указывает на поперечные составляющие.

Подставляя (12) и (13) в (10) и (11) и учитывая (14) и (15), после несложных преобразований получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно величин $H_n(\xi)$ и $E_n(\xi)$:

$$\mu \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\mu}(1 - \beta^2\varepsilon\mu)\frac{dH_n(\xi)}{d\xi}\right] + \frac{\widehat{\chi}_n^2}{1 - \beta^2\varepsilon\mu} H_n(\xi) = 0, \quad (22)$$

$$\varepsilon \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\varepsilon}(1 - \beta^2\varepsilon\mu)\frac{dE_n(\xi)}{d\xi}\right] + \frac{\chi_n^2}{1 - \beta^2\varepsilon\mu} E_n(\xi) = 0, \quad (23)$$

где

$$\widehat{\chi}_n^2 = \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\gamma^2 - \widehat{\lambda}_n^2(1 - \beta^2\varepsilon\mu), \quad (24)$$

$$\chi_n^2 = \varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\gamma^2 - \lambda_n^2(1 - \beta^2\varepsilon\mu). \quad (25)$$

Если в уравнения (22) и (23) ввести новые переменные по формулам

$$\widehat{s} = \frac{k_0(1 - \beta^2)}{2\mu_0}\int_0^\xi \frac{\mu d\xi}{1 - \beta^2\varepsilon\mu},$$

$$s = \frac{k_0(1 - \beta^2)}{2\varepsilon_0}\int_0^\xi \frac{\varepsilon d\xi}{1 - \beta^2\varepsilon\mu}, \quad (26)$$

и учитывая, что ε и μ выражаются формулами (1) и (2), то (22) и (23) преобразуются к дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами типа Матье–Хилла. В первом приближении по малым глубинам модуляции они имеют вид

$$\frac{d^2 H_n(\widehat{s})}{d\widehat{s}^2} + \left(\sum_{k=-1}^{1} \widehat{\theta}_k^n e^{2ik\widehat{s}}\right) H_n(\widehat{s}) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{d^2 E_n(s)}{ds^2} + \left(\sum_{k=-1}^{1} \theta_k^n e^{2iks}\right) E_n(s) = 0, \quad (28)$$

где

$$\widehat{\theta}_0^n = \frac{4}{k_0^2(1-\beta^2)^2}(\widehat{\chi}_0^n)^2, \quad \theta_0^n = \frac{4}{k_0^2(1-\beta^2)^2}(\chi_0^2)^2, \quad (29)$$

$$\widehat{\theta}_{\pm 1}^n = \frac{2}{k_0^2(1-\beta^2)^2}\left\{\left[\frac{\gamma^2}{u^2} - (\widehat{\chi}_0^n)^2\right] l - 2(\widehat{\chi}_0^n)^2 m_\mu\right\}, \quad (30)$$

$$\theta_{\pm 1}^n = \frac{2}{k_0^2(1-\beta^2)^2}\left\{\left[\frac{\gamma^2}{u^2} - (\chi_0^n)^2\right] l - 2(\chi_0^n)^2 m_\varepsilon\right\}, \quad (31)$$

$$(\widehat{\chi}_0^n)^2 = \gamma^2\varepsilon^0\mu^0\varepsilon_0\mu_0 - \widehat{\lambda}_n^2(1-\beta^2),$$
$$(\chi_0^n)^2 = \gamma^2\varepsilon^0\mu^0\varepsilon_0\mu_0 - \lambda_n^2(1-\beta^2), \quad (32)$$

а величина $l = [(m_e + m_\mu)\beta^2/(1-\beta^2)] \ll 1$ так как $u \le (0,8)/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon^0\mu^0}$. Решения уравнений (27) и (28) ищем в виде

$$H_n(\widehat{s}) = e^{i\widehat{\mu}_n\widehat{s}} \sum_{k=-1}^{1} \widehat{c}_k^n e^{2ik\widehat{s}}, \quad (33)$$

$$E_n(s) = e^{i\mu_n s} \sum_{k=-1}^{1} c_k^n e^{2iks}, \quad (34)$$

где характеристические числа $\widehat{\mu}_n, \mu_n$ и коэффициенты $\widehat{c}_k^n, c_k^n$ — пока неизвестные величины. Для их определения потребуем, чтобы (33) и (34) удовлетворяли уравнениям (27) и (28). Это приводит к дисперсионным уравнениям задачи для определения $\widehat{\mu}_n, \mu_n$ и к системе алгебраических уравнений для определения $\widehat{c}_k^n, c_k^n$.

Отметим, что далее нас будет интересовать частотная область слабого взаимодействия между сигнальной волной и волной модуляции заполнения волновода, когда величины $\widehat{\theta}_0^n$ и θ_0^n не очень близки к единице (не выполняется условие Вульфа–Брэгга первого порядка и не происходит усиление отраженных от периодических неоднородностей заполнения волновода волн при их интерференции). В этой области из дисперсионных уравнений

$$\widehat{\mu}_n^2 = \widehat{\theta}_0^n + \frac{(\widehat{\theta}_1^n)^2}{(\widehat{\mu}_n - 2)^2 - \widehat{\theta}_0^n} + \frac{(\widehat{\theta}_1^n)^2}{(\widehat{\mu}_n - 2)^2 - \widehat{\theta}_0^n}, \quad (35)$$

$$\mu_n^2 = \theta_0^n + \frac{(\theta_1^n)^2}{(\mu_n - 2)^2 - \theta_0^n} + \frac{(\theta_1^n)^2}{(\mu_n - 2)^2 - \theta_0^n}, \quad (36)$$

для характеристических чисел в первом приближении по малым глубинам модуляции получим

$$\widehat{\mu}_n^2 = \widehat{\theta}_0^n, \quad \mu_n^2 = \theta_0^n.$$

Выражения для коэффициентов $\widehat{c}_k^n$ и c_k^n в первом приближении по малым глубинам модуляции получаются из вышеуказанной системы алгебраических уравнений и имеют вид

$$\widehat{c}_{\pm 1}^n \simeq \frac{\widehat{\theta}_1^n \widehat{c}_0^n}{\left(\sqrt{\widehat{\theta}_0^n} \pm 2\right)^2 - \widehat{\theta}_0^n}, \quad c_{\pm 1}^n \simeq \frac{\theta_1^n c_0^n}{\left(\sqrt{\theta_0^n} \pm 2\right)^2 - \theta_0^n}, \quad (38)$$

где $\widehat{c}_0^n$ и c_0^n можно определить из условий нормировки.

Если теперь подставить (33) и (34) в (12) и (13), перейти к переменным z, t и одновременно пользоваться известным соотношением [9]

$$e^{i\Delta\sin\varphi} = \sum_{k=-1}^{1} J_h(\Delta)e^{ih\varphi}, \quad (39)$$

где Δ — малый параметр, $J_h(\Delta)$ — функция Бесселя порядка h, то из (7) и (8) для продольных составляющих H_z и E_z TE- и TM-полей в волноводе с периодически модулированным магнитодиэлектрическим заполнением в области слабого взаимодействия между сигнальной волной и волной модуляции получим следующие выражения:

$$H_z = \frac{1}{\mu^0}\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\psi}_n(x,y) e^{i(\widehat{p}_0^n z - \omega_0 t)} \widehat{c}_0^n \sum_{k=-1}^{1} \widehat{V}_k^n e^{ikk_0(z-ut)}, \quad (40)$$

$$E_z = \frac{1}{\varepsilon^0}\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x,y) e^{i(p_0^n z - \omega_0 t)} c_0^n \sum_{k=-1}^{1} V_k^n e^{ikk_0(z-ut)}, \quad (41)$$

где

$$\widehat{V}_k^n = \left(k\,\frac{\widehat{\Delta}_0^n}{2} + \frac{\widehat{c}_k^n}{\widehat{c}_0^n} - \frac{m_\mu}{2}\right)^{|k|}, \quad (42)$$

$$V_k^n = \left(k\,\frac{\Delta_0^n}{2} + \frac{c_k^n}{c_0^n} - \frac{m_\varepsilon}{2}\right)^{|k|}, \quad (43)$$

$$\widehat{\Delta}_0^n = \frac{\sqrt{\widehat{\theta}_0^n}}{2} m_\mu + \frac{\omega_0}{k_0 u} l, \quad \Delta_0^n = \frac{\sqrt{\theta_0^n}}{2} m_\varepsilon + \frac{\omega_0}{k_0 u} l, \quad (44)$$

$$\widehat{\theta}_{\pm 1}^n = \frac{2[(\widehat{\chi}_0^n)^2 + \widehat{\lambda}_n^2]}{k_0^2\beta^2(1-\beta^2)} l - \frac{4(\widehat{\chi}_0^n)^2}{k_0^2(1-\beta^2)^2} m_\mu, \quad (45)$$

$$\theta_{\pm 1}^n = \frac{2[(\chi_0^n)^2 + \lambda_n^2]}{k_0^2\beta^2(1-\beta^2)} l - \frac{4(\chi_0^n)^2}{k_0^2(1-\beta^2)^2} m_\varepsilon, \quad (46)$$

$$(\widehat{\chi}_0^n)^2 = (\widehat{p}_0^n u - \omega_0)^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon^0\mu^0 - \widehat{\lambda}_n^2(1-\beta^2), \quad (47)$$

$$(\chi_0^n)^2 = (p_0^n u - \omega_0)^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon^0\mu^0 - \lambda_n^2(1-\beta^2), \quad (48)$$

$$(\widehat{p}_0^n)^2 = \omega_0^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon^0\mu^0 - \widehat{\lambda}_n^2, \quad (p_0^n)^2 = \omega_0^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon^0\mu^0 - \lambda_n^2. \quad (49)$$

Заключение

Результаты, полученные в настоящей работе, показывают, что TE- и TM-поля в волноводе с периодически модулированным в пространстве и во времени магнитодиэлектрическим заполнением в частотной области слабого взаимодействия сигнальной волны с волной модуляции, представляют сумму пространственно-временны́х гармоник с различными сложными по характеру амплитудами и частотами. Показано, что амплитуда на основной (нулевой) гармонике не зависит от малых глубин модуляции, а на боковых (плюс и минус первых) гармониках амплитуды зависят от глубин модуляции в первой степени. Отметим также, что, основываясь на полученных в настоящей работе результатах, можно исследовать особенности распространения сигнальной волны в волноводе с периодически модулированным заполнением в области „сильного“ взаимодействия сигнальной волны с волной модуляции заполнения (выполняется условие Вульфа–Брэгга первого порядка). Развитый в настоящей работе аналитический метод позволит также решить задачу распространения электромагнитных волн в волноводе с многопериодически модулированным в пространстве и во времени магнитодиэлектрическим заполнением.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Барсуков К.А.* // Радиотехника и электроника. 1964. Т. 9. № 7. С. 1173.
[2] *Elachi Ch.* // Proc. IEEE. 1976. V. 64. N 12. P. 1666.
[3] *Gevorkyan E.A.* // Physica A. 1977. V. 241. P. 236.
[4] *Барсуков К.А., Геворкян Э.А.* // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. В. 2. С. 237; *Barsukov K.A., Gevorkyan E.A.* // Radio Engineering and Electronic Physics. 1983. V. 28. N 2. P. 19.
[5] *Столяров С.Н., Карпов С.Ю.* // УФН. 1993. Т. 163. № 1. С. 63.
[6] *Геворкян Э.А.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. В. 5. С. 134; *Gevorkyan E.A.* // Technical Physics. 2006. V. 51. N 5. P. 666.
[7] *Gevorkyan E.A.* // Acta Physica Polonica A. 2019. V. 135. N 4. P. 650. doi 10.12693/APhys PolA.135.650
[8] *Gevorkyan E.A.* // Proc. ICEAA-IEEE APWC-2019. 9-13 September 2019. Spain, Granada. IEEE Xplore Digital Library. 2019. P. 0031. doi 10.1109/ICEAA.2019.8879264
[9] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: МГУ, 2004. 800 с.