

01.1;05.2;12.1;15.1;15.2

## Метод расчета пондеромоторных сил и взаимных индуктивностей в коаксиальных осесимметричных магнитных системах

© А.К. Андреев

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),  
Москва, Россия

E-mail: alexande\_andreev@yahoo.com

Поступило в Редакцию 8 февраля 2021 г.

В окончательной редакции 3 марта 2021 г.

Принято к публикации 3 марта 2021 г.

Предложен метод, основанный на модели аксиально намагниченного цилиндра. В представленном методе силовые характеристики взаимодействующих цилиндров и/или катушек эквивалентны при равенстве плотностей их поверхностных токов  $j$ . Магнитная система может состоять из  $n \geq 2$  цилиндров и/или катушек. Взаимные индуктивности катушек следуют из взаимной энергии цилиндров, определяемой через 3D-поля. Поля рассчитываются через функции Бесселя. Обсуждены особенности численных расчетов с использованием функций Бесселя и эллиптических интегралов. Показано, что при расчетах через функции Бесселя имеют место осцилляции поля над торцевыми поверхностями цилиндра и проявляются локальные нарушения сплошности графиков сил.

**Ключевые слова:** пондеромоторные силы, взаимная индуктивность, 3D-поля, функции Бесселя.

DOI: 10.21883/PJTF.2021.11.51001.18729

Силовые взаимодействия в осесимметричных магнитных системах обычно определяются для токовых систем: катушек и соленоидов [1–3]. Расчеты базируются на методах классической электродинамики (раздел „Магнитостатика, взаимодействие постоянных токов“). Магнитные системы взаимодействуют посредством магнитных полей, определяемых через специальные функции. Сложность расчетов полей приводит к необходимости упрощения задач и получению результатов с использованием рядов, аппроксимирующих формулы, либо графоаналитических методов [4,5].

В настоящей работе приведен альтернативный аналитический метод определения пондеромоторных сил и взаимной индуктивности сложных коаксиальных магнитных систем. Метод основан на модели аксиально намагниченного цилиндра и применим для катушек с плотной намоткой [6]. В скалярной записи связь между намагниченностью цилиндра  $M_z$  и эквивалентной поверхностной плотностью тока  $j_s$  определяется соотношением  $M_z = j_s$  [7]. Задавая плотность поверхностного тока катушки  $j = wI/L$ , можно определить намагниченность эквивалентного цилиндра  $M_z = j$  ( $j = j_s$ ) ( $w$  — число витков,  $I$  — ток в витке [A/turn],  $L$  — длина катушки). При условии  $j = j_s$  равноразмерная катушка эквивалентна цилиндру, и далее токовая модель (катушка) в расчетах не используется.

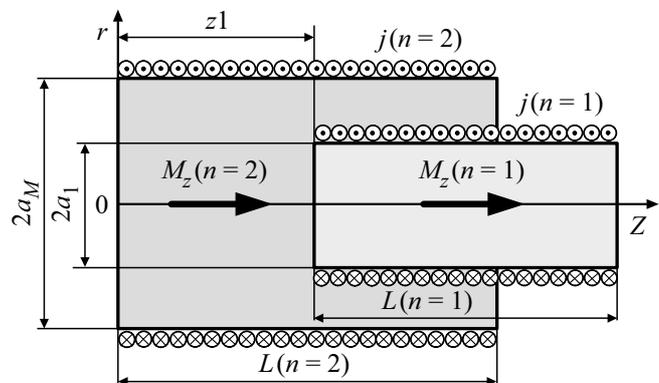
Метод расчета пондеромоторных сил основан на равенстве взаимных энергий аксиально намагниченных цилиндров. Задача сводится к расчету взаимной энергии  $n$ -го цилиндра в поле  $i$ -го  $E_{ni}$ . Взаимные энергии цилиндров равны и вычисляются через 3D-индукцию цилиндров. Этот метод использовался в [8] для расчетов взаимной индуктивности системы соосных катушек.

Индукция определялась через эллиптические интегралы, записанные в адаптированной для программирования форме.

Схема расчета пондеромоторных сил в осевом направлении для двух магнитных систем показана на рис. 1. Цилиндром (катушкам), соответствующим им параметрам и расчетным формулам присваивается индивидуальный номер  $n$ . При однородной намагниченности  $M_z$  поле цилиндра равно

$$H_p(\mathbf{r}) = -M_z N(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где  $N(\mathbf{r})$  — безразмерная величина, зависящая от формы образца ( $0 \leq N \leq 1$ ). Величина  $N(\mathbf{r})$  связывает компоненты поля в объеме цилиндра (размагничивающий фактор) с его намагниченностью:  $H_i = -N_{iz} M_z$ ,  $i = r, z$ .



**Рис. 1.** Схема расчета пондеромоторных сил коаксиальных цилиндров. Приведены параметры отдельных цилиндров:  $n = 1$  и  $2$ . Начало координат расположено в торце цилиндра диаметром  $2a_M$  ( $n = 2$ ).  $z_1$  — относительный сдвиг цилиндров по оси  $Z$ .

Вне цилиндра  $N(r)$  есть коэффициент, по которому рассчитывается поле рассеяния. 3D-коэффициенты  $N_{zz}(r, z)$  и  $N_{rz}(r, z)$  наряду с записью через эллиптические интегралы часто определяются через функции Бесселя, обеспечивающие более компактную запись формул [6]. Коэффициенты  $N_{iz}$  равны

$$N_{zz}(n, r, z') = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n \int_0^\infty J_0(tr)J_1[ta_n][e^{-tz'} + e^{-t[L_n-z']}]dt, & \text{если } 0 \leq z' \leq L_n, \\ \frac{1}{2}a_n \int_0^\infty J_0(tr)J_1[ta_n][e^{-tz'} - e^{t[L_n-z']}]dt, & \text{если } z' > L_n, \\ \frac{1}{2}a_n \int_0^\infty J_0(tr)J_1[ta_n][e^{-t[L_n-z']} - e^{tz'}]dt, & \text{если } z' < 0, \\ -\frac{1}{2} \left[ \frac{L_n - z'}{\sqrt{[L_n - z']^2 + a^2}} + \frac{z'}{\sqrt{z'^2 + a^2}} - \frac{L_n - z'}{|L_n - z'|} \right] - \frac{z'}{|z'|} & \text{везде,} \end{cases} \quad (2a)$$

$$N_{rz}(n, r, z') = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n \int_0^\infty J_0(tr)J_1[ta_n][e^{-tz'} + e^{-t[L_n-z']}]dt, & \text{если } 0 \leq z' \leq L_n, \\ \frac{1}{2}a_n \int_0^\infty J_0(tr)J_1[ta_n][e^{-tz'} - e^{t[L_n-z']}]dt, & \text{если } z' > L_n, \\ \frac{1}{2}a_n \int_0^\infty J_0(tr)J_1[ta_n][e^{-t[L_n-z']} - e^{tz'}]dt, & \text{если } z' < 0 \end{cases} \quad (2b)$$

где  $a_n, L_n$  — радиус и длина  $n$ -го цилиндра соответственно;  $z' = z - z_1$ ;  $z$  и  $r$  — компоненты полей:

$$\begin{aligned} H_z(n, r, z') &= -M_{zn}N_{zz}(n, r, z'), \\ N_r(n, r, z') &= -M_{zn}N_{rz}(n, r, z'). \end{aligned} \quad (3)$$

Поле  $H_r$  перпендикулярно  $M_z$ , не вносит вклада в энергию и в дальнейших расчетах не учитывается. Индукция  $\mathbf{B}$  связана с  $\mathbf{H}_p$  и  $\mathbf{M}_z$  соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_p + \mathbf{M}_z), \quad (4)$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная. Формулы (3), (4) определяют  $\mathbf{B}$  как в объеме цилиндра, так и вне его. С учетом (1), (2a) получаем  $z$ -компоненту индукции

$$B_z(n, r, z') = \begin{cases} \mu_0(H_z(n, r, z') + M_{zn}), & \text{если } 0 < z' \leq L_n \wedge |r| < a_n, \\ \mu_0 H_z(n, r, z') & \text{везде.} \end{cases} \quad (5)$$

Далее в расчетных формулах введены следующие обозначения.  $M$  — число слоев катушки (цилиндров),  $n$  — порядковый номер слоя ( $n = 1, \dots, M$ ),  $2a_1$  — диаметр первого слоя,  $2a_n$  — диаметр  $n$ -го слоя,  $2a_M$  — диаметр внешнего слоя,  $L_n$  — длина  $n$ -й катушки,  $w_n$  — число

витков  $n$ -го слоя,  $M_{zn}$  — намагниченность  $n$ -го слоя цилиндра. Ток в витке  $n$ -го слоя  $I_n = M_{zn}L_n/w_n$ . В модели не накладываются какие-либо ограничения на число слоев. В настоящей работе для демонстрации модели принято число слоев  $M = 2$ . Для задания расстояния между слоями по  $r$  выбрана степенная функция

$$Funk(a_M, a_1, n, k) = [(n - 1/M - 1)^k](a_M - a_1),$$

где  $k$  — показатель степени ( $k = 1$  соответствует равным расстояниям между слоями). Радиус  $n$ -го слоя определяется как

$$a_n = \begin{cases} a_1, & \text{если } n = 1 \vee M = 1, \\ \text{не число,} & \text{если } n > M, \\ a_1 + Funk(a_M, a_1, n, k) & \text{везде.} \end{cases}$$

Далее приведены результаты расчетов для следующих параметров системы:

$$\begin{aligned} a_n &= \begin{cases} 2.5 \text{ см}, & n = 1, \\ 5 \text{ см}, & n = 2, \end{cases} & L_n &= \begin{cases} 12 \text{ см}, & n = 1, \\ 15 \text{ см}, & n = 2, \end{cases} \\ w_n &= \begin{cases} 50, & n = 1, \\ 200, & n = 2, \end{cases} & M_{zn} &= \begin{cases} 1.667 \text{ А/м}, & n = 1, \\ 6.667 \text{ А/м}, & n = 2, \end{cases} \end{aligned}$$

$$I_n = \begin{cases} 4 \text{ A}, n = 1, \\ 5 \text{ A}, n = 2, \end{cases}$$

$$Func(k(a_M, a_1, n, k)) = \begin{cases} 0 \text{ cm}, n = 1 \\ 2.5 \text{ cm}, n = 2. \end{cases}$$

Энергия второго цилиндра ( $n = 2$ ) в поле первого ( $n = 1$ ) равна

$$E_{21cyl}(n, z_1) = 2\pi \int_0^{L_n} \int_0^{a_n} \frac{M_{zn}[B_z(n-1, r, z, z_1)]}{2} r dr dz. \tag{6}$$

Из (6) следует пондеромоторная сила  $F$  и как дополнение взаимная индуктивность токовой системы  $M_{21ind}$

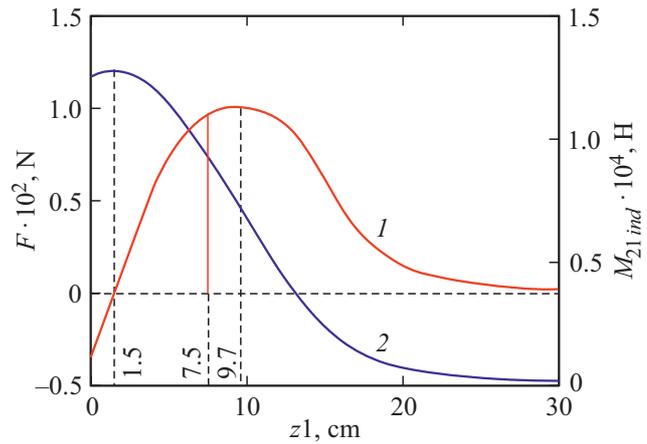
$$F(n, z_1) = -\frac{d}{dz_1} E_{21cyl}(n, z_1),$$

$$M_{21ind}(n, z_1) = \frac{2E_{21cyl}(n, z_1)}{I_1 I_2}. \tag{7}$$

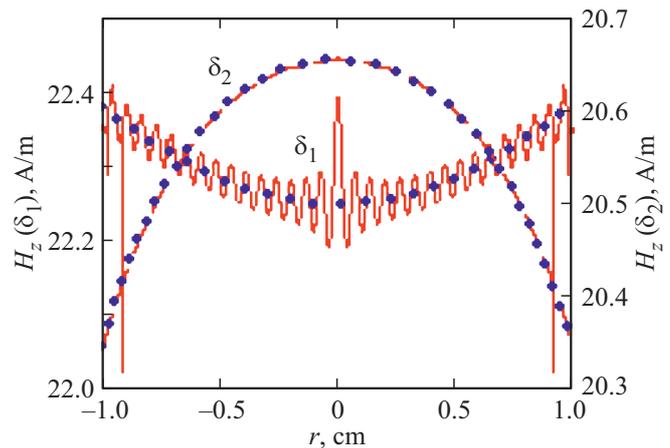
На рис. 2 приведены результаты расчетов по формулам (7). При концентрическом расположении цилиндров ( $z_1 = 1.5 \text{ cm}$ ) сила  $F = 0$  (кривая 1), а значение взаимной индуктивности катушек  $M_{21ind}$  максимально (кривая 2). Профили графиков энергии  $E_{21cyl}$  и  $M_{21ind}$  идентичны. Максимум сил (в данном случае сил притяжения) имеет место при  $z_1 = 9.7 \text{ cm}$  и совпадает с точкой перегиба  $E_{21cyl}$ .

На кривой  $F$  при  $z_1 = 7.5 \text{ cm}$  происходит локальный разрыв графика. При шаблонных расчетах это явление нивелируется и не влияет на результат расчета сил, за исключением областей вблизи поверхности цилиндра. При определении полей вблизи поверхности расчеты через функции Бесселя могут приводить к значительным погрешностям [9]. На это указывалось также в других публикациях [10]. Анализ особенностей графиков при численных расчетах функций Бесселя выходит за рамки представленной работы. Эти особенности никоим образом не связаны с физикой рассматриваемых явлений. Формулы расчетов через эллиптические интегралы [8] обеспечивают получение стабильных результатов при любых входных параметрах системы, но их запись заняла бы значительную часть объема рукописи и здесь не приводится.

В качестве примера на рис. 3 представлены профили полей  $H_z$  в радиальном направлении  $r$  над торцевой поверхностью цилиндра, рассчитанные с использованием функций Бесселя (сплошные линии) и эллиптических интегралов (точки). При удалении от поверхности  $\delta_1 = 0.01 \text{ cm}$  имеют место осцилляции и разрывы кривой  $H_z$ , построенной с использованием функций Бесселя (формула (2a)). При  $\delta_2 = 0.15 \text{ cm}$  графики функций Бесселя и эллиптических интегралов практически совпадают. Минимум поля в приповерхностной области торца цилиндра  $\delta_1 = 0.01 \text{ cm}$  можно объяснить с привлечением электростатического аналога — конденсатора конечных



**Рис. 2.** Графики пондеромоторных сил и взаимной индуктивности двух магнитных систем, построенные в диапазоне  $0 \leq z_1 \leq 30 \text{ cm}$  с шагом  $0.01 \text{ cm}$ ,  $r = 0.1 \text{ cm}$ . Кривая 1 — пондеромоторная сила  $F$  ( $F_{\max} = 0.01 \text{ N}$  при  $z_1 = 9.7 \text{ cm}$ ). Кривая 2 — взаимная индуктивность эквивалентных цилиндру катушек  $M_{21ind}$  ( $M_{21ind \max} = 1.276 \cdot 10^{-4} \text{ H}$  при  $z_1 = 1.5 \text{ cm}$ ).



**Рис. 3.** Профили поля  $H_z$  в радиальном направлении  $r$  над торцевой поверхностью цилиндра диаметром  $2a = 4 \text{ cm}$  и длиной  $L = 4 \text{ cm}$ . Расстояния над поверхностью  $\delta_1 = 0.01 \text{ cm}$ ,  $\delta_2 = 0.15 \text{ cm}$ . Сплошные линии — графики функций Бесселя, точки — графики эллиптических интегралов.

размеров и учетом краевых эффектов. При удалении от поверхности  $\delta_2 = 0.15 \text{ cm}$  профиль поля приобретает „стандартный“ вид [6].

Относительно расчетов  $M_{21ind}$  следует отметить, что в публикациях [1,3,4] и справочнике [5] для различных геометрических параметров катушек и их взаимного расположения при расчете взаимной индуктивности катушек (как правило, двух) используются многочисленные индивидуальные для каждого случая аппроксимирующие функции (ряды) или монограммы. Модель заменяет такие расчеты и делает их неактуальными. Контрольные расчеты взаимной индуктивности токовых систем с различной конфигурацией совпадают с примерами, приведенными в [5].

Новизна метода позволяет решать и ряд других задач, например определение силовых взаимодействий и распределение магнитной системы от электромагнитных или магнитных экранов методами зеркальных изображений.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] Д. Монтгомери, *Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов* (Мир, М., 1971).
- [2] В.Р. Карасик, *Физика и техника сильных магнитных полей* (Наука, М., 1964).
- [3] Д. Паркинсон, Б. Малхолл, *Получение сильных магнитных полей* (Атомиздат, М., 1971).
- [4] Б.Л. Алиевский, А.М. Октябрьский, В.Л. Орлов, В.А. Постников, *Моделирование магнитных полей осесимметричных систем*, под ред. Б.Л. Алиевского (Изд-во МАИ, М., 2007).
- [5] П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин, *Расчет индуктивностей* (Энергоатомиздат, Л., 1986).
- [6] А.К. Андреев, Пробл. машиностроения и надежности машин, № 1, 34 (2019). DOI: 10.1134/S0235711919010036
- [7] Э. Парселл, *Электричество и магнетизм* (Наука, М., 1975).
- [8] А.К. Андреев, Письма в ЖТФ, **46** (21), 48 (2020). DOI: 10.21883/PJTF.2020.21.50198.18042
- [9] А.К. Андреев, *Магнитостатика ферромагнетиков* (Изд-во МАИ, М., 2011).
- [10] В.И. Нецветов, К.Л. Метлов, В.А. Хохлов, Ю.В. Медведев, В.Н. Варюхин, *Электронная обработка материалов*, **44** (1), 70 (2008). <https://com.ifa.md/ru/journal/shortview/310>