

04

## Поперечная электрическая проводимость и диэлектрическая проницаемость поликристаллического металла

© Лам Тхи Ньонг, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет,  
Мытищи, Московская обл., Россия  
e-mail: nhunglam279@gmail.com, yushkanov@inbox.ru

Поступило в Редакцию 23 декабря 2020 г.  
В окончательной редакции 23 декабря 2020 г.  
Принято к публикации 26 января 2021 г.

Рассмотрено поведение вырожденной электронной плазмы под действием переменного поперечного электрического поля слабой интенсивности. Рассмотрено линеаризованное кинетическое уравнение для электронов в поликристаллическом металле. Это кинетическое уравнение учитывает рассеяние электронов на границах кристаллитов поликристаллического металла. На основе этого уравнения получено выражение для поперечной проводимости и поперечной диэлектрической проницаемости поликристаллического металла.

**Ключевые слова:** кинетическое уравнение, металл, поперечная проводимость, поперечная диэлектрическая проницаемость.

DOI: 10.21883/JTF.2021.06.50863.122-20

### Введение

В настоящее время наблюдается растущий интерес к электромагнитным свойствам поликристаллического металла [1–10]. Обычно для анализа проблемы используется приближение, разработанное в [11]. При этом вклады в процессы, обусловленные рассеянием электронов на примесях и фононах и на границах зерен поликристаллического металла, учитываются путем их формального сложения. Однако такой подход не применим для описания сложных кинетических процессов, при которых пространственная и временная зависимости функции распределения нетривиальны. Это касается, в частности, диэлектрической проницаемости электронного газа с учетом временной и пространственной дисперсий.

Такая ситуация характерна для изучения диэлектрических свойств поликристаллического металла. При этом необходим подход, при котором различные вклады в кинетические процессы учитывались бы единым образом. Такой подход рассмотрен в настоящей работе.

Рассматривается кинетическое уравнение для вырожденной электронной плазмы. Поле считается достаточно слабым для возможности линеаризации имеющихся уравнений. При этом будет рассмотрен случай, когда электроны после рассеяния в той или иной степени сохраняют информацию о своей первоначальной скорости. Это происходит при учете электрон-электронного рассеяния, а так же при рассмотрении сильно гранулированных сред. В последнем случае существенно рассеяние электронов на границе зерен, когда требуется учесть эффект отражения электронов от этих границ.

Линеаризованное кинетическое уравнение для вырожденного электронного газа широко используется для исследования различных явлений в металлах. Например, для исследования скин-эффекта [12–17], для ис-

следования электрических свойств металлических пленок [18–20]. Также линеаризованное кинетическое уравнение используется для описания колебания электронной плазмы под действием электрического поля [21,22].

### 1. Кинетическое уравнение для поликристаллического металла

Рассмотрим кинетическое уравнение для электронов в  $\mathbf{v}$ ,  $\tau$ -приближении для функции распределения электронов  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  [12,23–25]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu (f_{eq} - f). \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $e$  — скорость и заряд электронов,  $\nu$  — частота рассеяния электронов,  $\nu = 1/\tau$ ,  $\tau$  — среднее время свободного пробега электронов,  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля.

Функция  $f_{eq}$  описывает локально равновесное распределение вырожденного Ферми-газа электронов:

$$f_{eq}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = \Theta[\mu(\mathbf{r}, t) - \mathcal{E}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t))].$$

Здесь

$$\mathcal{E}(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) = \frac{m}{2} [\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)]^2,$$

$\mu(\mathbf{r}, t)$  — химический потенциал электронного газа. Функция  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  учитывает тот факт, что равновесная скорость электронного газа при наличии явлений переноса может быть отлична от нуля,  $\Theta(x)$  — функция Хэвисайда,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

При этом считается, что поверхность Ферми металла имеет сферическую форму.

Однако в общем случае после рассеяния средняя скорость электрона будет отлична от нуля. То есть электрон будет „помнить“ о скорости, которую он имел до рассеяния.

В случае, когда доминирует электрон-электронное рассеяние, электрон после рассеяния приобретает в среднем скорость, пропорциональную исходной, хотя и меньшую по абсолютной величине.

Будем предполагать, что равновесная скорость электронов после рассеяния  $\mathbf{u}$  пропорциональна средней скорости электронов  $\langle \mathbf{v} \rangle$ :

$$\mathbf{u} = \beta \langle \mathbf{v} \rangle.$$

В величине  $\beta$  учитывалось то, что электроны рассеяния частично сохраняют свою память о своей скорости до рассеяния. В данном подходе величина  $\beta$  является эмпирическим коэффициентом.

Близкий к подобному подход ранее использовался для учета электрон-электронных столкновений [26–28]. В случае электрон-электронных столкновений величина  $\beta$  положительна, так как рассеяние электронов происходит преимущественно вперед. В случае рассеяния электронов на границе кристаллитов поликристаллического металла величина  $\beta$  отрицательна, т.е.  $\beta < 0$ . Это связано с тем, что в данном случае рассеяние электронов происходит преимущественно в направлении, противоположном направлению первоначального движения электронов.

Пусть электрическое поле изменяется по закону

$$E_y = E_0 e^{i(kx - \omega t)}, \quad E_x = E_z = 0.$$

Рассмотрим, какой будет проводимость электронного газа в этом случае. Такая проводимость называется поперечной электронной проводимостью  $\sigma^{tr}$ .

В этом случае химический потенциал электронного газа будет постоянным.

Рассмотрим линеаризацию кинетического уравнения (1) в этом случае.

Равновесную функцию распределения линеаризуем относительно абсолютного (независящего от координат) распределения Ферми

$$f_F(\mathbf{v}) \equiv f_0(\mathbf{v}) = \Theta[\mu_0 - \mathcal{E}(\mathbf{v})].$$

При линеаризации локально равновесной функции распределения получаем:

$$f_{eq}(\mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v}) + \delta(\mathcal{E}_F - \mathcal{E}) m \mathbf{v} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t).$$

Здесь  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Для вырожденного Ферми-газа электронов в металле

$$\mu_0 = \mathcal{E}_F = \frac{mv_F^2}{2} = \frac{p_F^2}{2m}, \quad \mathcal{E}(\mathbf{v}) = \frac{mv^2}{2},$$

$v_F$  — скорость электронов на поверхности Ферми, которая считается сферической,  $\mathcal{E}_F$  — энергия электронов на поверхности Ферми,  $\mathcal{E}(\mathbf{v})$  — кинетическая энергия электронов.

Для вырожденного Ферми-газа электронов имеем

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_F) &= \delta \left[ \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_F^2}{2} \right] \\ &= \delta \left( \frac{m}{2} (v - v_F)(v + v_F) \right) = \frac{1}{mv_F} \delta(v - v_F) \\ &= \frac{1}{mv_F^2} \delta \left( \frac{v}{v_F} - 1 \right) = \frac{1}{2\mathcal{E}_F} \delta \left( \frac{v}{v_F} - 1 \right). \end{aligned}$$

Импульс электрона равен  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ . Соответственно на поверхности Ферми  $p_F = mv_F$ .

Введем безразмерный импульс (скорость) электронов

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{p_F} = \frac{\mathbf{v}}{v_F}.$$

Тогда

$$\delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_F) = \frac{1}{2\mathcal{E}_F} \delta \left( \frac{v}{v_F} - 1 \right) = \frac{1}{2\mathcal{E}_F} \delta(P - 1),$$

и линеаризованная локально равновесная функция распределения записывается в виде

$$f_{eq} = \Theta(1 - P^2) + \delta(P - 1) \mathbf{P} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{U}$  — безразмерная равновесная скорость электронов

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{u}}{v_F}.$$

Плотность электрического тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  можно представить в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \int f \mathbf{v} \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (3)$$

Равновесная концентрация электронов  $N$  находится по формуле

$$\int f_0 \frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = N.$$

При этом

$$N = \frac{8\pi p_F^3}{3(2\pi\hbar)^3}. \quad (4)$$

Данное соотношение позволяет найти связь между равновесной концентрацией электронов  $N$  и величиной импульса электрона на поверхности Ферми  $p_F$ .

В линейном приближении функцию распределения электронов можно искать в виде

$$f = \Theta(1 - P^2) + h(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) \delta(P - 1). \quad (5)$$

Здесь  $f_0(P) = \Theta(1 - P^2)$  — вырожденная статистика.

С помощью (5) запишем кинетическое уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_F \mathbf{P} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{mv_F} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} = v \delta(P - 1) [\mathbf{P} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) - h(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t)]. \quad (6)$$

Очевидно:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

В линейном приближении по электрическому полю можно записать

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{P}} = -\mathbf{P} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \delta(P - 1).$$

При выводе этого уравнения было учтено, что

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{P}} = -\mathbf{P} \delta(P - 1).$$

Учитывая эти соотношения, кинетическое уравнение (6) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_F \mathbf{P} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{mv_F} \mathbf{P} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = v [\mathbf{P} \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) - h(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t)]. \quad (7)$$

Уравнение (7) преобразуем к виду

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v_F \mathbf{P} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} - \left( \frac{e}{mv_F} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + v \mathbf{U}(\mathbf{r}, t) \right) \mathbf{P} = -v h(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t). \quad (8)$$

Ищем решение в виде

$$h = e^{i(kx - \omega t)} H, \quad U_y = e^{i(kx - \omega t)} W, \quad j_y = e^{i(kx - \omega t)} j.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (8), получаем

$$-i\omega H + ikv_F P_x H - \frac{e}{mv_F} \left( E_0 + \frac{vmv_F}{e} W \right) P_y = -vH.$$

Отсюда следует, что плотность тока  $j$  можно представить в следующем виде:

$$j = \sigma_0^{\text{tr}} \left( E_0 + \frac{vmv_F}{e} W \right). \quad (9)$$

Здесь  $\sigma_0^{\text{tr}}$  поперечная проводимость в случае, когда рассеяние на границах зерен отсутствует, т.е.  $\beta = 0$  так как  $W \sim \beta$ .

Но

$$W = \frac{\beta j}{eNv_F}.$$

Тогда из уравнения (9) получаем

$$j = \sigma_0^{\text{tr}} \left( E_0 + \frac{\beta vm}{e^2 N} j \right).$$

Отсюда следует

$$j = \frac{\sigma_0^{\text{tr}}}{\left( 1 - \frac{\beta vm}{e^2 N} \sigma_0^{\text{tr}} \right)} E_0.$$

По определению

$$\sigma^{\text{tr}} = \frac{j_y}{E_y} = \frac{j}{E_0}.$$

Поэтому последнюю формулу можно переписать в виде

$$\sigma^{\text{tr}} = \frac{\sigma_0^{\text{tr}}}{\left( 1 - \frac{\beta \sigma_0^{\text{tr}}}{\sigma} \right)}. \quad (10)$$

Здесь  $\sigma = e^2 N / (vm)$  — статическая проводимость электронного газа.

При  $\beta = 0$  получаем  $\sigma^{\text{tr}} = \sigma_0^{\text{tr}}$ . Таким образом, полученный результат переходит в ранее известный для поперечной проводимости при отсутствии рассеяния на границах зерен.

По мере того как параметр  $\beta$  растет по модулю (оставаясь отрицательным), величина  $\sigma^{\text{tr}}$  уменьшается. Это связано с тем, что границы зерен увеличения по модулю параметра  $\beta$  становятся все менее проницаемыми и рассеяние электронов в направлении, противоположном исходному, все более доминирует.

Для случая отсутствия рассеяния электронов на границах зерен, т.е. когда  $\beta = 0$ , имеем

$$-i\omega H + ikv_F P_x H - \frac{e}{mv_F} E_0 P_y = -vH.$$

Отсюда находим функцию  $H$

$$H = \frac{e P_y}{mv_F (v - i\omega + ikv_F P_x)} E_0. \quad (11)$$

Выражение для плотности тока имеет вид

$$j = eN \int v_y H \delta(P - 1) \frac{2d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Учитывая соотношение (11), получаем

$$j = \frac{3e^2 N E_0}{4\pi m} \int \frac{P_y^2}{(v - i\omega + ikv_F P_x)} \delta(P - 1) d^3 p.$$

Данное выражение можно преобразовать к виду

$$j = \frac{3e^2 N E_0}{4m} \int_{-1}^1 \frac{1 - t^2}{v - i\omega + ikv_F t} dt.$$

В случае  $k = 0, \omega = 0$  получаем:

$$\sigma_0^{\text{tr}} = \sigma = \frac{e^2 N}{vm}.$$

Это стандартное выражение для статической проводимости электронного газа.

В общем случае для  $\sigma_0^{\text{tr}}$  получаем следующее выражение:

$$\sigma_0^{\text{tr}} = \frac{3e^2 N}{4m} \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{v-i\omega+ikv_F t} dt.$$

Поперечная диэлектрическая проницаемость описывается соотношением [24]

$$\epsilon_{\text{tr}} = 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{\text{tr}}.$$

Поведение плазмы характеризует величина  $\omega_p$  — плазменная (ленгмюровская) частота. Тогда  $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$ ,  $\sigma = \omega_p^2/(4\pi\nu)$ .

Можно ввести безразмерную частоту  $\Omega = \omega/\omega_p$  и безразмерную частоту столкновений  $\epsilon = \nu/\omega_p$ . А также безразмерное волновое число  $\kappa = kv_F/\omega_p$ .

Тогда получаем

$$\sigma_0^{\text{tr}} = \frac{3\omega_p}{16\pi} \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{\epsilon-i\Omega+ikt} dt.$$

Это выражение можно представить в виде

$$\sigma_0^{\text{tr}} = \frac{3\omega_p}{16\pi} \Sigma_0^{\text{tr}}, \quad \Sigma_0^{\text{tr}} = \int_{-1}^1 \frac{1-t^2}{\epsilon-i\Omega+ikt} dt.$$

Отметим, что  $\Sigma_0^{\text{tr}}$  — безразмерная величина.

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{tr}} &= \frac{\sigma_0^{\text{tr}}}{\left(1 - \frac{\beta\nu m}{e^2 N} \sigma_0^{\text{tr}}\right)} = \frac{\sigma_0^{\text{tr}}}{\left(1 - \frac{4\pi\beta\nu}{\omega_p^2} \sigma_0^{\text{tr}}\right)} \\ &= \frac{\sigma_0^{\text{tr}}}{\left(1 - \frac{3\beta\epsilon}{4\omega_p} \Sigma_0^{\text{tr}}\right)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\sigma^{\text{tr}} = \frac{3\omega_p}{16\pi} \frac{\Sigma_0^{\text{tr}}}{\left(1 - \frac{3\beta\epsilon}{4} \Sigma_0^{\text{tr}}\right)}.$$

Перепишем это выражение в виде

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{tr}} &= \frac{3\omega_p}{16\pi} \Sigma_0^{\text{tr}} \Sigma_{\text{tr}}, \\ \Sigma_{\text{tr}} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{3\beta\epsilon}{4} \Sigma_0^{\text{tr}}\right)}. \end{aligned}$$

Поперечная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_{\text{tr}}$  следующим образом выражается через поперечную электрическую проводимость  $\Sigma_{\text{tr}}$  [24]

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{tr}} &= 1 + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma^{\text{tr}} = 1 + \frac{3i}{4\Omega} \Sigma_{\text{tr}}, \\ \Sigma_{\text{tr}} &= \Sigma_0^{\text{tr}} \Sigma_{\text{tr}}. \end{aligned}$$

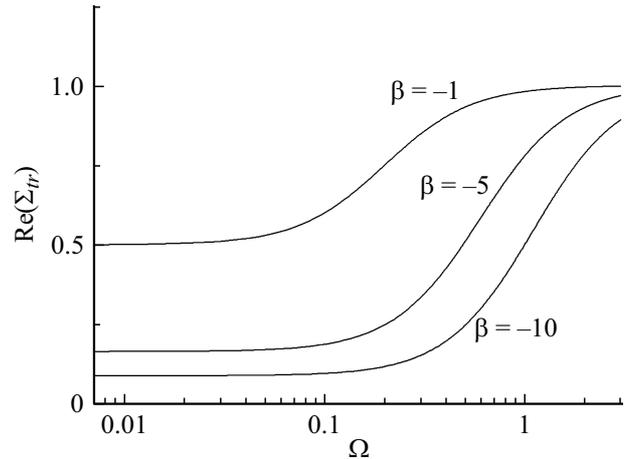


Рис. 1. Зависимость действительной части безразмерной поперечной проводимости  $\Sigma_{\text{tr}}$  от безразмерной частоты  $\Omega$ . Здесь  $\epsilon = 0.1$ ,  $\kappa = 0.01$ .

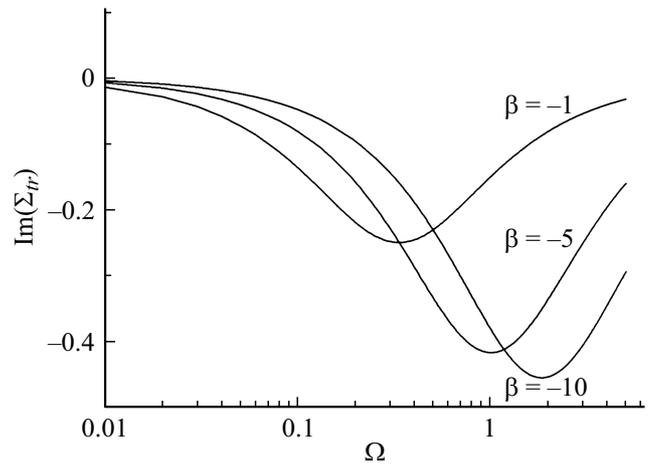
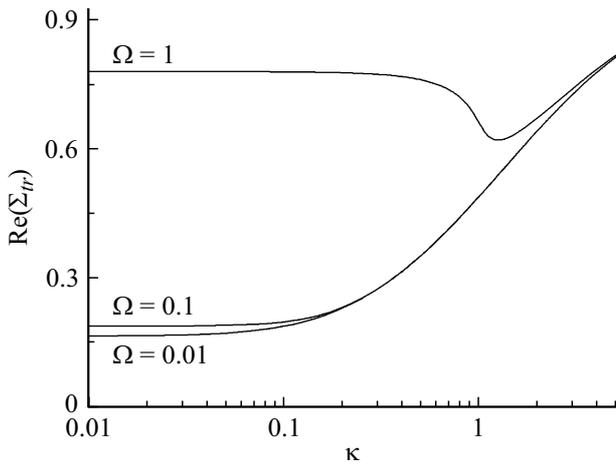


Рис. 2. Зависимость мнимой части безразмерной поперечной проводимости  $\Sigma_{\text{tr}}$  от безразмерной частоты  $\Omega$ . Здесь  $\epsilon = 0.1$ ,  $\kappa = 0.01$ .

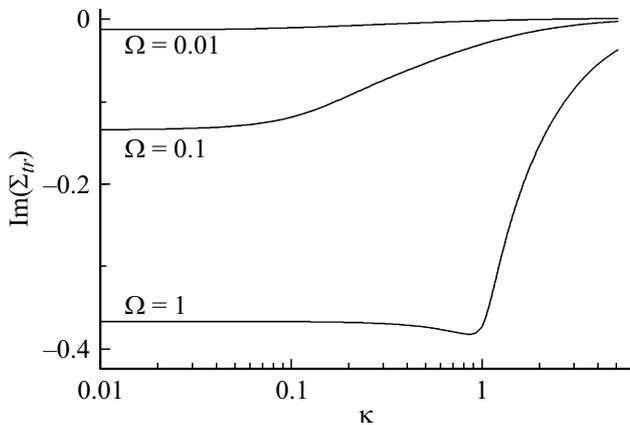
На рис. 1 и 2 представлены графики зависимости действительной и мнимой части безразмерной поперечной электрической проводимости  $\Sigma_{\text{tr}}$  от безразмерной частоты  $\Omega$ . Из рис. 1 видно, что действительная часть безразмерной поперечной электрической проводимости  $\Sigma_{\text{tr}}$  стремится к единице с ростом безразмерной частоты  $\Omega$ . Это связано с тем, что при росте частоты  $\Omega$  величина  $\Sigma_0^{\text{tr}} \sim 1/\Omega$  стремится к нулю. При этом  $\Sigma_{\text{tr}} \rightarrow 1$ . Так что в этом пределе  $\text{Re}(\Sigma_{\text{tr}}) \rightarrow 1$ , а  $\text{Im}(\Sigma_{\text{tr}}) \rightarrow 0$ . Это происходит при всех значениях величины  $\beta$ .

То, что  $\text{Im}(\Sigma_{\text{tr}}) \rightarrow 0$  при  $\Omega \rightarrow \infty$  и при  $\Omega \rightarrow 0$  проявляется на характере кривых на рис. 2.

На рис. 3 и 4 приведены графики зависимости действительной и мнимой части безразмерной поперечной электрической проводимости  $\Sigma_{\text{tr}}$  от безразмерной величины  $\kappa$  при различных частотах  $\Omega$ . При этом параметр  $\beta$  был принят равным  $-5$ . Из графиков видно, что мнимая и действительная части безразмерной поперечной элек-



**Рис. 3.** Зависимость действительной части безразмерной поперечной проводимости  $\Sigma_{tr}$  от безразмерной величины  $\kappa$ . Здесь  $\epsilon = 0.1$ ,  $\beta = -5$ .



**Рис. 4.** Зависимость мнимой части безразмерной поперечной проводимости  $\Sigma_{tr}$  от безразмерной частоты  $\Omega$ . Здесь  $\epsilon = 0.01$ ,  $\beta = -5$ .

трической проводимости имеют существенно различную зависимость от величины  $\Omega$  при различных значениях параметра  $\kappa$ .

### Заключение

Получены выражения для поперечной электрической проводимости и поперечной диэлектрической проницаемости поликристаллического металла. При этом проведен учет возможности того, что после столкновения электроны частично сохраняют информации о своей скорости до столкновения. Такая ситуация возникает при рассеянии электронов на границе раздела кристаллитов. Проведено графическое исследование полученных результатов. Показано, что учет зависимости поперечной электрической проводимости и поперечной диэлектрической проницаемости поликристаллического металла от рассеяния электронов на границах зерен оказывает существенное влияние на значения этих величин и частот-

ные зависимости. При некоторых значениях параметров зависимость поперечной электрической проводимости от волнового числа  $\kappa$  становится немонотонной.

Рассмотренное кинетическое уравнение может быть использовано при изучении проводимости тонких металлических проволок и пленок. Оно также может быть применено для исследования скин-эффекта в поликристаллическом металле и при анализе взаимодействия электромагнитного излучения с тонкими металлическими пленками.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] J.S. Chawla, F. Gstrein, K.P. O'Brien, J.S. Clarke, D. Gall. *Phys. Rev. B*, **84**, 235423 (2011).
- [2] S. Canulescu, C.N. Borca, K. Rechendorff, S. Davipsdyttir, K. Pagh Almtoft, L.P. Nielsen, J. Schou. *Appl. Phys. Lett.*, **108**, 141909 (2016).
- [3] B. Feldman, S. Park, M. Haverty, S. Shankar, S. Dunham. *Physica Status Solidi B*, **247** (7), 1791 (2010).
- [4] A.K. Majee, C.J. Foss, Z. Aksamija. *Sci. Rep.*, **7**, 16597 (2017).
- [5] S.K. Mandal, T.K. Nath, V.V. Rao. *J. Phys: Condens Matter*, **20** (38), 385203 (2008).
- [6] M.Z. Liu, K.W. Xu. *J. Mater. Res.*, **23** (6), 1658 (2008).
- [7] S.W. Ng, K.P. Lim, S.A. Halim, H. Jumiah. *Res. Phys.*, **9**, 1192 (2018).
- [8] N. Mikhuri, V. Agarwal, A. Gaur, H.K. Singh. *J. Rare Earth*, **29**, 654 (2011).
- [9] C. Durkan, M.E. Welland. *Phys. Rev. B*, **61**, 14215 (2000).
- [10] W. Xue, W. Gua. *AIP Adv.*, **6**, 115001 (2016).
- [11] A.F. Mayadas, M. Shatzkes, J.F. Janak. *Appl. Phys. Lett.*, **14** (11), 345 (1969).
- [12] А.А. Абрикосов *Основы теории металла* (Наука, М. 1977)
- [13] G.E.H. Reuter, E.H. Sondheimer. *Proc. Roy. Soc.*, **195**, 336 (1948).
- [14] K.L. Kliewer, R. Fuchs. *Phys. Rev.*, **172** (3), 607 (1968).
- [15] А.В. Латышев, А.А. Юшканов. *Ж. выч. матем. и матем. физики*, **39** (6), 989 (1999).
- [16] А.В. Латышев, А.А. Юшканов. *ЖТФ*, **70** (8), 1 (2000).
- [17] А.В. Латышев, А.А. Юшканов. *ФТТ*, **51** 4, 630 (2009).
- [18] А. Паредес-Хуарес, Ф. Диас-Монхе, Н.М. Макаров, Ф. Перес-Родригес. *Письма в ЖЭТФ*, **90** 6, 687 (2009).
- [19] А.А. Yushkanov, N.V. Zverev. *Phys. Lett. A*, **381**, 679 (2017).
- [20] И.А. Кузнецова, О.В. Савенко, А.А. Юшканов. *ЖТФ*, **87** (12), 1769 (2017).
- [21] Ф. Платцман., П. Вольф. *Волны и взаимодействие в плазме твердых тел* (Мир, М. 1975), 436 с.
- [22] А.В. Латышев, А.А. Юшканов. *ФТТ*, **48** (12), 2113 (2006).
- [23] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Физическая кинетика* (Наука, М. 1979)
- [24] В.П. Силин, А.А. Рухадзе. *Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред* (Госатомиздат, М. 1961), 244 с.
- [25] E.H. Sondheimer. *Adv. Phys.*, **50** (6), 499 (2010).
- [26] E. Borch, S. De Gennaro. *J. Phys. F*, **10**, 271 (1980).
- [27] S. De Gennaro, A. Rettory. *J. Phys. F*, **14**, 237 (1984).
- [28] S. De Gennaro, A. Rettory. *J. Phys. F*, **15**, 227 (1985).