

01
Реконструкция пространственного распределения источников излучения в пропорциональной рассеивающей среде

© С.А. Терещенко, А.Ю. Лысенко

Национальный исследовательский университет „Московский институт электронной техники“,
124498 Москва, Россия
e-mail: tsa@miee.ru

Поступило в Редакцию 17 октября 2020 г.
В окончательной редакции 5 декабря 2020 г.
Принято к публикации 7 декабря 2020 г.

Исследован новый метод реконструкции изображений для однофотонной эмиссионной компьютерной томографии в пропорциональной рассеивающей среде. Показания детектора получены с помощью моделирования методом Монте-Карло с использованием ядерно-физического программного комплекса Geant4, что избавляет от необходимости применения реального томографа, радиофармпрепарата и исследуемого фантома. При этом показания детектора, полученные с помощью Geant4, практически не отличаются от тех, которые были бы получены в натурном эксперименте для реальной рассеивающей среды. Исследовано влияние поглощающих и рассеивающих свойств тринадцати различных веществ в качестве среды, в которую погружено пространственное распределение источников излучения, на точность реконструкции томограмм. Показано существенное преимущество предложенного алгоритма реконструкции эмиссионных томограмм по сравнению с традиционным.

Ключевые слова: эмиссионная томография, уравнение переноса излучения, поглощение и рассеяние излучения, метод Монте-Карло, экспоненциальное преобразование Радона.

DOI: 10.21883/JTF.2021.05.50683.294-20

Введение

Однофотонная эмиссионная компьютерная томография (ОФЭКТ) является мощным инструментом исследования пространственных распределений источников излучения [1–6]. При этом такое исследуемое распределение источников излучения либо уже существует (в случае промышленной томографии), либо должно быть сформировано с помощью введения радиофармпрепаратов (РФП) в тело пациента (в случае медицинской томографии). В основе ОФЭКТ лежит уравнение переноса излучения (УПИ), описывающее взаимодействие излучения с веществом и позволяющее определить показания детектора для произвольного распределения источников излучения [7–12]. Для перехода к реконструкции пространственного распределения источников излучения на основе полученных показаний детектора (решению обратной томографической задачи) необходимо аналитическое решение УПИ. Однако УПИ, учитывающее два основных процесса взаимодействия излучения с веществом, поглощение и рассеяние, является интегро-дифференциальным и не имеет точного аналитического решения в общем случае. Поэтому используют различные приближения, накладывающие дополнительные условия на физические характеристики среды, вид УПИ и само искомое решение. Очевидно, что чем меньше будет таких дополнительных условий, тем точнее полученное приближенное решение будет описывать реальную ситуацию.

Самым простым и эффективным приближением в настоящее время является приближение чисто поглощающей среды (ЧПС) [1–6]. В этом приближении предполагается, что рассеяния излучения нет, и единственным процессом взаимодействия излучения с веществом является поглощение. Такое предположение преобразует УПИ в дифференциальное уравнение в частных производных, которое имеет точное аналитическое решение в общем случае. При этом можно получить и точное решение обратной томографической задачи, сводящееся к обратному экспоненциальному преобразованию Радона с коэффициентом поглощения в качестве параметра [13–15].

Основным недостатком приближения ЧПС является полное пренебрежение процессом рассеяния. Частично влияние рассеяния можно учесть, если считать, что фотон, испытавший акт рассеяния, выбывает из рассмотрения и никогда не попадает на детектор, т.е. его можно считать поглощенным. При этом решением УПИ будет решение для ЧПС с заменой всех вхождений коэффициента поглощения на коэффициент ослабления [13–16]. Именно в таком виде используется обратное экспоненциальное преобразование Радона во всех интегральных алгоритмах реконструкции современных томографов. Существующий подход на основе итерационных алгебраических алгоритмов решения системы линейных алгебраических уравнений большого порядка значительно уступает интегральным алгоритмам по скорости работы [17].

Очередной шаг более точного учета влияния рассеяния был сделан в работе [18]. Он основан на рассмотрении индикатрисы рассеяния специального вида, соответствующей пропорциональной рассеивающей среде (ПРС). Оказывается, для такой среды можно получить не только точное аналитическое решение УПИ в общем случае, но и на его основе точно решить обратную томографическую задачу. При этом необходимо оценить эффективность предложенного алгоритма на основе сравнения с традиционным алгоритмом для источников излучения, погруженных в реальную среду, которая не обязана соответствовать предположению о свойстве ПРС.

Исследование алгоритма реконструкции изображения в ОФЭКТ можно разделить на два этапа. На первом этапе в качестве объекта создают так называемый фантом, представляющий собой физическую модель исследуемого объекта: пространственное распределение источников излучения, погруженное в рассеивающую среду. Это позволяет оценить точность реконструкции путем сравнения с известным распределением источников излучения в фантоме. Затем получают показания позиционно-чувствительного детектора (ПЧД) в заданной геометрической схеме измерений (проекционные данные). На втором этапе измеренные данные используются для томографической реконструкции пространственного распределения источников излучения, и определяется точность реконструкции.

Наилучшим способом получения показаний детектора является проведение натурального эксперимента, в котором обеспечивается максимальное соответствие условиям работы реального томографа [2,4–6]. Однако у данного способа есть несколько недостатков. Первый недостаток заключается в неточности информации об истинном распределении источников излучения и параметров среды, что вносит дополнительную погрешность в оценку точности реконструкции. Вторым недостатком является необходимость иметь томограф, РФП и исследуемый фантом, что делает этот подход весьма дорогостоящим.

Другим способом получения показаний детектора является их вычисление в соответствии с аналитическим решением УПИ [7–11]. Несмотря на то, что этот способ получения данных детектора является эффективным и быстрым, он предполагает выполнение всех предположений, сделанных для получения этого аналитического решения. В связи с этим вычисленные показания детектора будут сильно отличаться от данных, получаемых в реальных томографах для реальных объектов.

Третий, наиболее привлекательный, способ — это численное моделирование траекторий движения отдельных фотонов в рассеивающей среде методом Монте-Карло [19–21]. При этом будут получены не только показания детектора, но и дополнительная информация о траектории и деталях взаимодействия со средой каждого фотона. К недостаткам этого подхода можно отнести большое время вычислений.

Для того чтобы смоделированные показания детекторов были близки к измерениям, полученным с помощью реального томографа, в методе Монте-Карло должны быть учтены все основные особенности физических процессов взаимодействия излучения с веществом: материал и атомную структуру среды объекта, характеристики источников излучения, поглощение излучения, комптоновское и рэлеевское многократное рассеяние излучения и другие. Наиболее полно это можно осуществить при использовании последней версии ядерно-физического программного комплекса Geant4 для моделирования методом Монте-Карло, разработанного в Европейской организации по ядерным исследованиям (ЦЕРН) [22]. При этом смоделированные траектории определяются не макроскопическими характеристиками (коэффициентом поглощения и индикатрисой рассеяния) среды, а реальным взаимодействием каждого гамма-кванта со всеми атомами среды и сцинтиллятора детектора, лежащими на его пути. Полученные в результате численного моделирования проекционные данные практически не отличаются от данных, получаемых при проведении натурального эксперимента. Это позволяет оценить эффективность различных методов реконструкции томограмм и предположений, использованных при их разработке.

Целью настоящей работы является исследование точности алгоритма реконструкции в ОФЭКТ на основе приближения пропорциональной рассеивающей среды [18] в сравнении с традиционным алгоритмом реконструкции на основе обратного экспоненциального преобразования Радона. При этом исходные проекционные данные (показания детектора) моделируются методом Монте-Карло (Geant4), обеспечивающего учет всех основных особенностей взаимодействия излучения с реальной рассеивающей средой, а также характеристик реального детектора.

1. Уравнение переноса излучения и формирование проекционных данных

Однородная пропорциональная рассеивающая среда определяется следующей индикатрисой рассеяния [18]:

$$\mu_s(\Omega' \rightarrow \Omega) = \mu_s \delta_2(-\Omega' \Omega) = \beta \mu \delta_2(-\Omega' \Omega), \quad (1)$$

где $\mu = \mu_a + \mu_s$ — коэффициент ослабления (экстинкции) излучения, μ_a — коэффициент поглощения излучения, μ_s — коэффициент рассеяния излучения, $\beta = \mu_s / \mu$, $\delta_2(\bullet)$ — поверхностная дельта-функция (двумерная дельта-функция на поверхности единичной сферы [7]), Ω — направление движения фотона до рассеяния, Ω' — направление движения фотона после рассеяния. Такая индикатриса рассеяния описывает рассеивающую среду со свойством „рассеяние прямо назад“, в которой при каждом акте рассеяния фотон меняет направление своего движения на прямо противоположное. Индикатриса

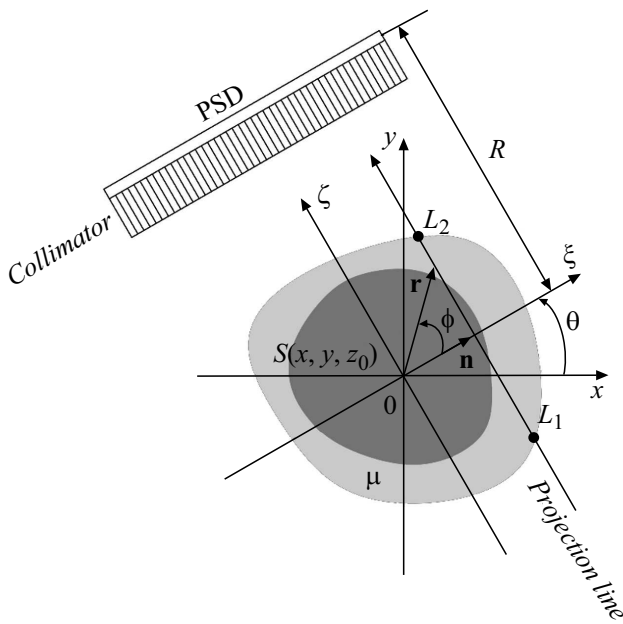


Рис. 1. Сечение объекта при $z = z_0$: неподвижная (x, y) и вращающаяся (ξ, ζ) системы координат в плоскости $z = z_0$. L_1, L_2 — границы объекта на линии проецирования, R — радиус вращения ПЧД, \mathbf{n} — нормаль к линии проецирования, \mathbf{r} — вектор произвольной точки на линии проецирования, φ — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{r} .

рассеяния (1) преобразует интегро-дифференциальное УПИ в дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\Omega \text{grad}(\Phi(\mathbf{r}, \Omega)) + \mu \Phi(\mathbf{r}, \Omega) - \beta \mu \Phi(\mathbf{r}, -\Omega) = S(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где $\Phi(\mathbf{r}, \Omega)$ — плотность потока фотонов в точке \mathbf{r} , двигающихся по направлению Ω , $S(\mathbf{r}, \Omega)$ — функция распределения источников излучения.

Тогда, учитывая, что излучение порождается только источниками внутри рассеивающей области, а также нет излучения, входящего внутрь рассеивающей области, можно записать следующие точные граничные условия:

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{r}_1, \Omega) = 0, \\ \Phi(\mathbf{r}_2, -\Omega) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответствуют пересечению линии проецирования с границей рассеивающей среды в направлении Ω . Заметим, что в ПРС понятие линии проецирования, соответствующей отдельному отсчету на детекторе, сохраняется в отличие от произвольной рассеивающей среды (рис. 1).

Сохранение понятия линии проецирования позволяет перейти к обычной томографической схеме измерений [18]. Во вращающейся системе координат (рис. 1) точка детектирования $\mathbf{r}_d = (\xi, R, z_0)$, $\mathbf{r}_1 = (\xi, L_1, z_0)$, $\mathbf{r}_2 = (\xi, L_2, z_0)$, $\Omega = (0, 1, 0)$. Тогда получим следующее

выражение:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}_d, \Omega) &= \\ &= \int_{L_1}^{L_2} \frac{k \operatorname{ch}(k\mu(\xi - L_1)) + (1 + \beta) \operatorname{sh}(k\mu(\xi - L_1))}{(k \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1)))} \\ &\times S_\theta(\xi, \zeta, z_0) d\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

где $k = \sqrt{1 - \beta^2}$, а $\operatorname{sh}(\bullet)$ и $\operatorname{ch}(\bullet)$ — гиперболические синус и косинус соответственно, $S_\theta(\xi, \zeta, z_0) = S(\xi \cos \theta - \zeta \sin \theta, \xi \sin \theta + \zeta \cos \theta, z_0)$ — распределение источников излучения во вращающейся системе координат, $S(x, y, z_0)$ — распределение источников излучения в неподвижной системе координат.

Выражение (4) является точным аналитическим решением УПИ (2) в ПРС с точными граничными условиями (3). Это решение позволяет получить и точное решение обратной томографической задачи.

При $\beta \rightarrow 0$ выражение (4) преобразуется в классическое ослабленное экспоненциальное преобразование Радона с параметром μ_a для ЧПС:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}_d, \Omega) &= \exp(-\mu_a L_2) \int_{L_1}^{L_2} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(\mu_a \xi) d\xi \\ &= \exp(-\mu_a L_2) \mathcal{R}_{\mu_a} \{S(x, y, z_0)\}, \end{aligned} \quad (5a)$$

где $\mathcal{R}_{\mu_a} \{\bullet\}$ — экспоненциальное преобразование Радона с параметром μ_a . Тогда в ЧПС реконструированное пространственное распределение источников излучения $\hat{S}(x, y, z_0)$ можно получить с помощью обратного экспоненциального преобразования Радона (ОЭПР) с параметром μ_a . Как уже отмечалось, в рассеивающей среде частичный учет рассеяния можно осуществить при замене всех вхождений коэффициента поглощения μ_a в (5a) на коэффициент ослабления μ :

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}_d, \Omega) &= \exp(-\mu L_2) \int_{L_1}^{L_2} S_\theta(\xi, \zeta, z_0) \exp(\mu \xi) d\xi \\ &= \exp(-\mu L_2) \mathcal{R}_\mu \{S(x, y, z_0)\}. \end{aligned} \quad (5b)$$

Несмотря на частичность такой замены, использование формулы (5b) демонстрирует значительное превосходство по сравнению с (5a). Поэтому далее сравнение будет проводиться для реконструкции с помощью ОЭПР с параметром μ , соответствующей традиционному методу.

Для ПРС комбинация прямого (4) и оппозитного (при повороте на 180°) измерений позволяет получить выражение для проекций $p(\xi, \zeta)$ через экспоненциальное

преобразование Радона [18]:

$$p(\xi, \theta) = \int_{L_1}^{L_2} S_{\theta}(\xi, \xi, z_0) \exp(k\mu\xi) d\xi = \mathcal{R}_{k\mu}\{S(x, y, z_0)\} = \frac{\Phi(\mathbf{r}_d, \Omega)(a+b) \exp(k\mu L_2) - \Phi'(\mathbf{r}'_d, \Omega')(a-b) \exp(k\mu L_1)}{2ab \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + (a^2 + b^2) \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1))}, \quad (6)$$

где $\Phi'(\mathbf{r}'_d, \Omega')$ — опозитное для $\Phi(\mathbf{r}_d, \Omega)$ измерение,

$$a = \frac{k}{k \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1))},$$

$$b = \frac{(1 + \beta)}{(k \operatorname{ch}(k\mu(L_2 - L_1)) + \operatorname{sh}(k\mu(L_2 - L_1)))}.$$

Заметим, что в формуле (6) используется экспоненциальное преобразование Радона с параметром $k\mu$ вместо μ_a в ЧПС или вместо μ при частичном учете рассеяния.

Таким образом, в ПРС для реконструкции пространственного распределения источников излучения $S(x, y, z_0)$ можно использовать хорошо разработанный аппарат обратного экспоненциального преобразования Радона с параметром $k\mu$:

$$S(x, y, z_0) = \mathcal{R}_{k\mu}^{-1}\{p(\xi, \theta)\}, \quad (7)$$

где $\mathcal{R}_{k\mu}^{-1}\{\bullet\}$ — обратное экспоненциальное преобразование Радона с параметром $k\mu$.

2. Моделирование методом Монте-Карло

Для моделирования методом Монте-Карло с помощью Geant4 необходимо задать целый ряд различных параметров. К этим параметрам, в первую очередь, относятся условия выбывания фотонов из рассмотрения в случае их ухода из моделируемого объема, минуя детектор. Затем должно быть описано вещество объекта. При этом оно может состоять как из простых химических элементов, так и из композитов нескольких химических элементов в заданных пропорциях, что обеспечивает задание практически любой материал. Кроме этого, указываются математические модели описания взаимодействия гамма-квантов с отдельными атомами для основных процессов: фотоэлектрического эффекта (поглощение), комптоновского и рэлеевского рассеяния [22–25]. Задается количество детекторных сборок, их форма и вещество, включая сцинтиллятор и коллиматор, а также верхнее и нижнее энергетические окна, пространственное разрешение, энергетическое разрешение и другие параметры. Описывается изменение томографической системы во времени, в частности, скорость вращения детектора вокруг объекта. Задаются параметры источника излучения, такие как пространственное распределение и активность в каждой точке. Поскольку

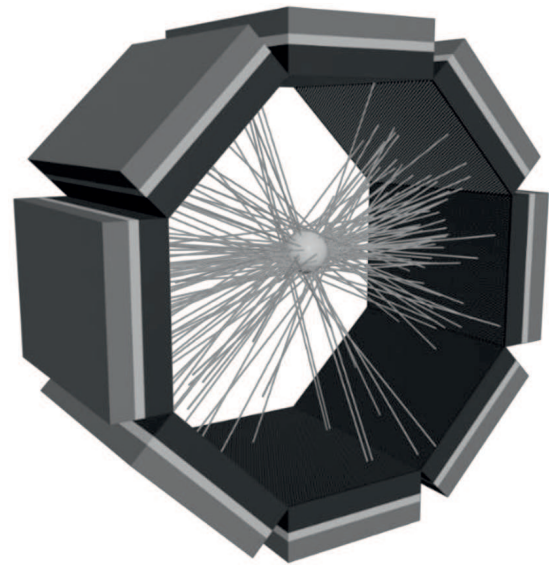


Рис. 2. Моделируемая система.

Таблица 1. Параметры детекторной сборки

Параметр	Значение
Габариты, mm	95 × 190 × 280
Длина канала коллиматора, mm	60
Количество каналов коллиматора	4576
Материал коллиматора	Pb
Сцинтиллятор	NaI (Tl)
Толщина сцинтиллятора, mm	10
Энергетическое разрешение	10% при энергии в 140.5 keV
Пространственное разрешение, mm	2
Нижнее энергетическое окно, keV	80
Верхнее энергетическое окно, keV	160

настройка Geant4 на моделирование траекторий фотонов в ОФЭКТ представляет собой достаточно сложный и трудоемкий процесс, существуют специальные программные средства, существенно сокращающие эту работу [26].

Система детектирования состоит из 8 детекторных сборок, расположенных на расстоянии 280 mm от центра вращения (рис. 2). Структура детекторной сборки показана на рис. 3, а ее параметры представлены в табл. 1. Используемые параметры детекторной сборки близки к соответствующим параметрам реальных эмиссионных томографов.

Для исследования точности алгоритма реконструкции в ОФЭКТ на основе приближения ПРС в сравнении с традиционным алгоритмом реконструкции на основе обратного экспоненциального преобразования Радона в применении к показаниям детектора, соответствующим реальному эксперименту, смоделированному методом Монте-Карло, было выбрано цилиндрическое простран-

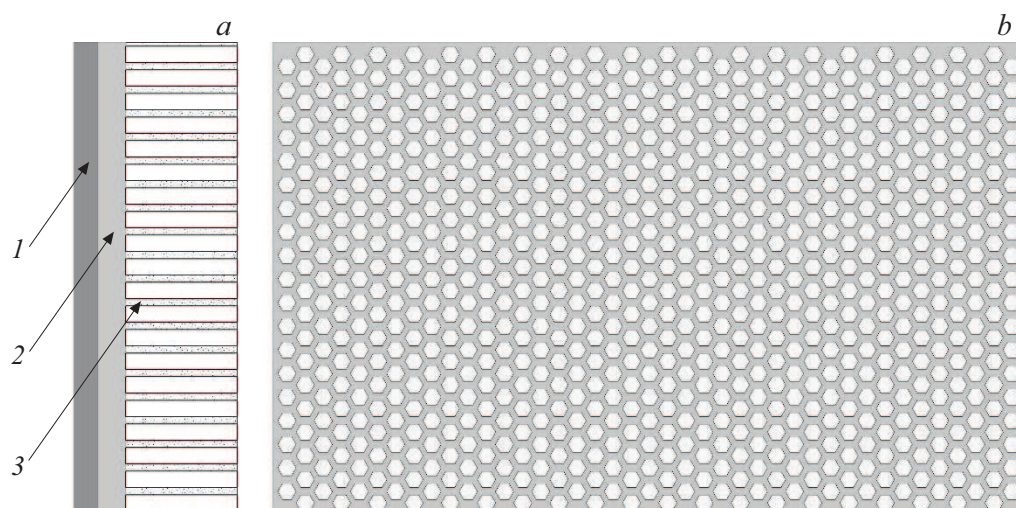


Рис. 3. Фрагмент детекторной сборки: **a** — вид сбоку, **b** — вид со стороны коллиматора (1 — экран (стекло), 2 — сцинтиллятор, 3 — коллиматор).

Таблица 2. Параметры поглощающей и рассеивающей среды

№	Рассеивающая среда	Коэффициент поглощения μ_a, cm^{-1}	Коэффициент рассеяния μ_s, cm^{-1}	Коэффициент ослабления μ, cm^{-1}
1	Вакуум	0.0000	0.0000	0.0000
2	Li	0.0000	0.0618	0.0618
3	Na	0.0025	0.1256	0.1282
4	K	0.0175	0.1189	0.1364
5	H ₂ O	0.0007	0.1498	0.1505
6	Be	0.0001	0.2201	0.2202
7	Mg	0.0066	0.2357	0.2423
8	B	0.0003	0.2585	0.2588
9	Ca	0.0388	0.2207	0.2595
10	C	0.0006	0.2823	0.2829
11	S	0.0223	0.2789	0.3012
12	Si	0.0158	0.3201	0.3359
13	Al	0.0135	0.3586	0.3721
14	P	0.0230	0.3623	0.3852

Примечание. P — черный фосфор.

ственное распределение источников излучения ^{99m}Tc с энергией гамма-квантов 140.5 keV и толщиной 1 mm с сечениями в виде диска (рис. 4). Источники излучения были погружены в различные однородные цилиндры поглощающей и рассеивающей среды толщиной 4 cm. Для исследования в качестве рассеивающей среды были взяты следующие вещества: литий, натрий, калий, вода, бериллий, магний, бор, кальций, углерод, сера, кремний, алюминий и фосфор. Параметры этих веществ приведены в табл. 2 [27], в которую для полноты также добавлен вакуум. При этом сам объект был смещен на 1 cm от оси вращения с целью уменьшения эффекта кольцевых артефактов для радиально-симметричных объектов.

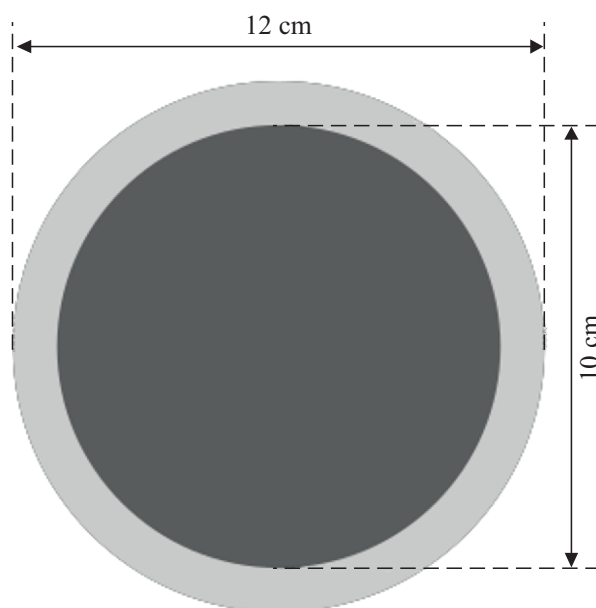


Рис. 4. Объект типа диск с однородным распределением источников излучения в круге диаметра 10 cm и однородным распределением коэффициента ослабления в круге диаметра 12 cm.

Наиболее эффективным способом вычисления ОЭПР является метод фильтрованных обратных проекций со сверткой, выполняемой в фурье-пространстве в соответствии с теоремой о свертке, и взвешенным обратным проецированием. Фурье-образ ядра свертки (идеальный фильтр) для вычисления ОЭПР с параметром μ ($\mathcal{R}_\mu^{-1}\{\bullet\}$) выражается следующей формулой:

$$H_1^\mu(\chi) = \begin{cases} 0, & |\chi| < \mu \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} |\chi|, & |\chi| \geq \mu' \end{cases}$$

где χ — координата в фурье-пространстве [3]. При этом некорректная задача вычисления ОЭПР регуляризировалась с помощью окна Ханна.

При численном выполнении всех операций необходимо найти компромисс между точностью реконструкции и объемом вычислений. Использованные параметры дискретизации, приведенные в табл. 3, близки к соответствующим параметрам реальных эмиссионных томографов.

Для количественной характеристики точности реконструкции был выбран критерий среднеквадратичного отклонения D для всего изображения в целом и D' для линии в изображении:

$$D = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (S_{ij} - \tilde{S}_{ij})^2}, \quad (8)$$

$$D' = \sqrt{\sum_{j=1}^N (S_{i_0j} - \tilde{S}_{i_0j})^2}, \quad (9)$$

где S_{ij} — истинное пространственное распределение источников излучения в точке (ij) , \tilde{S}_{ij} — реконструированное пространственное распределение источников

излучения в точке (ij) , i_0 — номер линии, N — количество дискрет в изображении по каждой оси.

3. Результаты численных экспериментов

Для получения проекций каждого фантома были смоделированы $\sim 5 \cdot 10^7$ траекторий квантов. Гамма-кванты

Таблица 3. Параметры реконструкции изображения

Поле реконструкции, mm	190 × 190
Дискретизация поля реконструкции	128 × 128
Размер пикселя, mm	1.5 × 1.5
Фильтр	Ханна
Относительная частота обрезания	0.8
Интерполяция при обратном проецировании	Линейная
Количество ракурсов	144

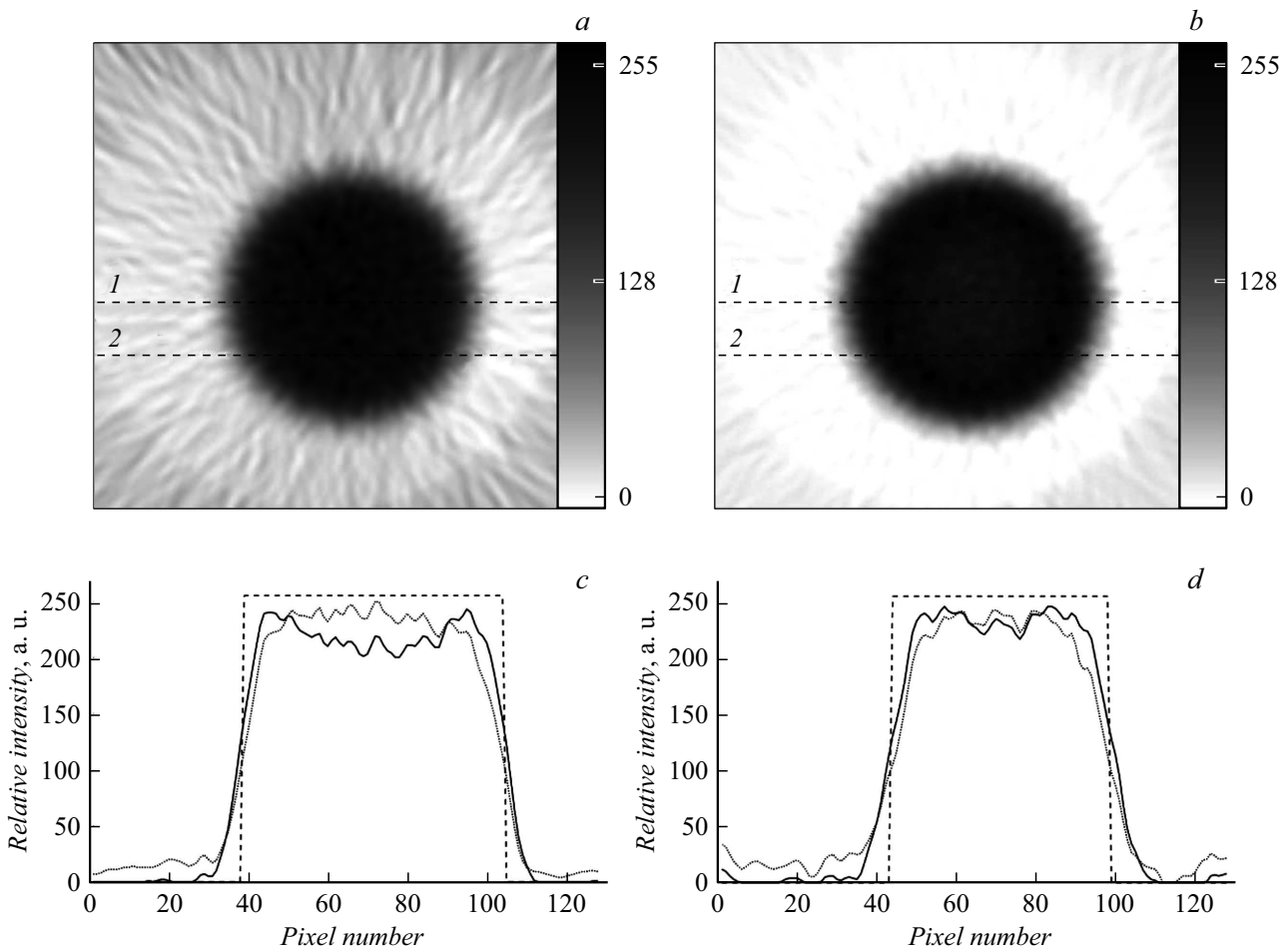


Рис. 5. Реконструированные томограммы распределения источников излучения в воде: *a* — с помощью ОЭПР с параметром μ ; *b* — по формуле (7); *c* — сечение по линии 1; *d* — сечение по линии 2. Истинное распределение источников излучения, реконструированное с помощью ОЭПР с параметром μ и с помощью формулы (7), показаны пунктирной, штриховой и сплошной линиями соответственно.

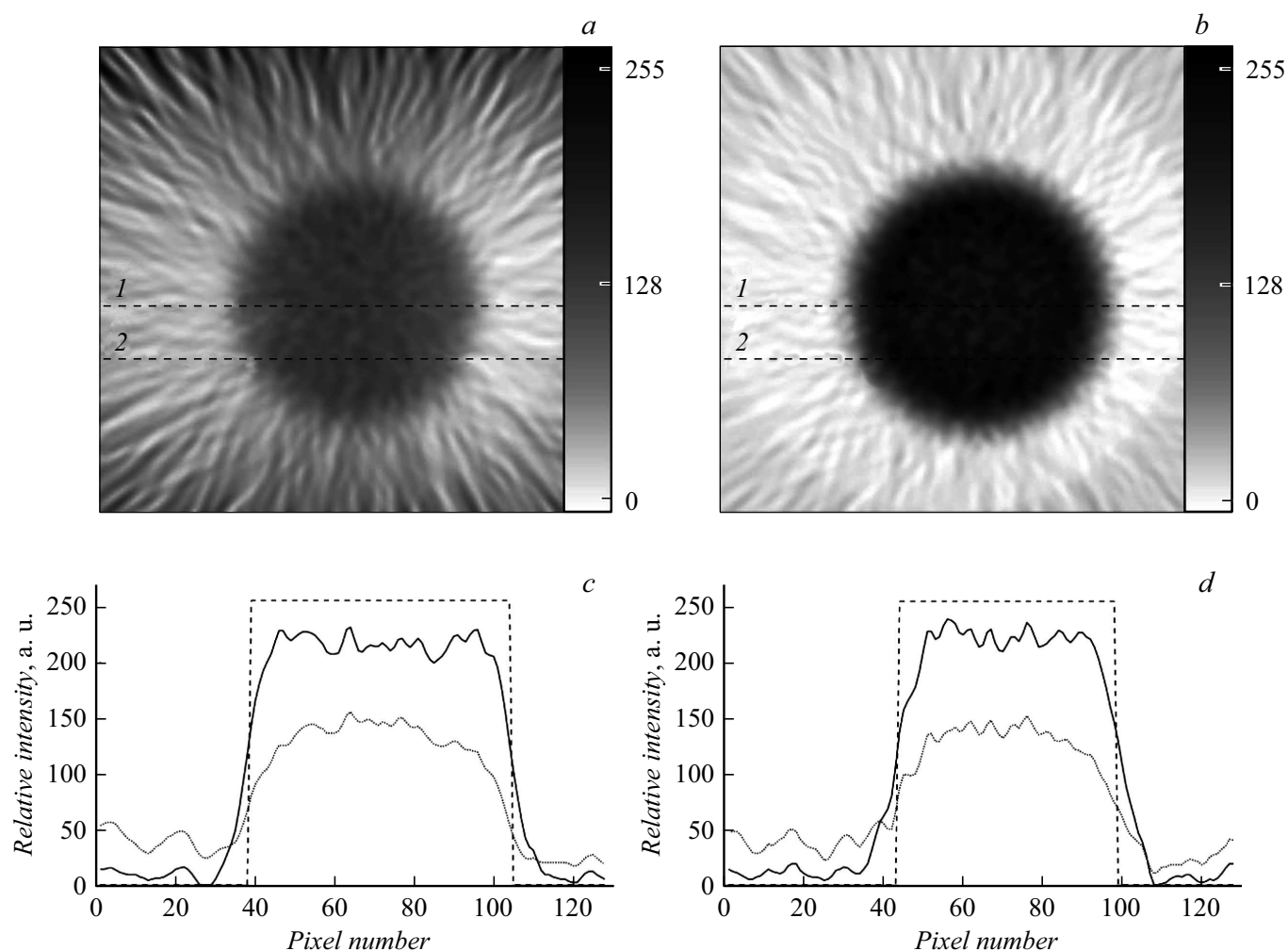


Рис. 6. Реконструированные томограммы распределения источников излучения в сере: *a* — с помощью ОЭПР с параметром μ ; *b* — по формуле (7); *c* — сечение по линии 1; *d* — сечение по линии 2. Истинные распределения источников излучения, реконструированные с помощью ОЭПР с параметром μ и с помощью формулы (7), показаны пунктирной, штриховой и сплошной линиями соответственно.

от распавшихся атомов ^{99m}Tc могут взаимодействовать как с атомами рассеивающей среды, так и нераспавшимися атомами ^{99m}Tc . Однако из-за ничтожной концентрации атомов ^{99m}Tc по сравнению с концентрацией атомов рассеивающей среды вклад такого взаимодействия в показания детектора будет пренебрежимо мал. Поэтому такое взаимодействие не учитывалось при моделировании траекторий фотонов.

Результаты реконструкции модельных распределений источников излучения в воде показаны на рис. 5, в сере — на рис. 6 и в фосфоре — на рис. 7. Показаны истинное распределение источников излучения, реконструкция с помощью обратного экспоненциального преобразования Радона и реконструкция по формуле (7). Для профилей по оси абсцисс указан номер пикселя. По оси ординат указана относительная интенсивность с нормировкой на максимум по всему двумерному изображению (относительный макси-

мум всегда равен 255), поэтому на отдельных профилях максимум может не достигаться. Для остальных исследуемых элементов получены аналогичные результаты.

Несмотря на то, что реальная среда не является средой со свойством ПРС, результаты реконструкции во всех случаях показывают преимущество нового метода. При небольших значениях коэффициента ослабления томограммы реконструированные новым методом имеют значительно меньшую амплитуду артефактов вне объекта. Это улучшение наиболее заметно по краям реконструированных пространственных распределений источников излучений (рис. 5–7). С увеличением коэффициента ослабления преимущество нового метода становится заметнее еще и за счет улучшения визуальной различимости деталей внутри объекта (рис. 5–7). В целом новый метод демонстрирует явное превосходство над традиционным.

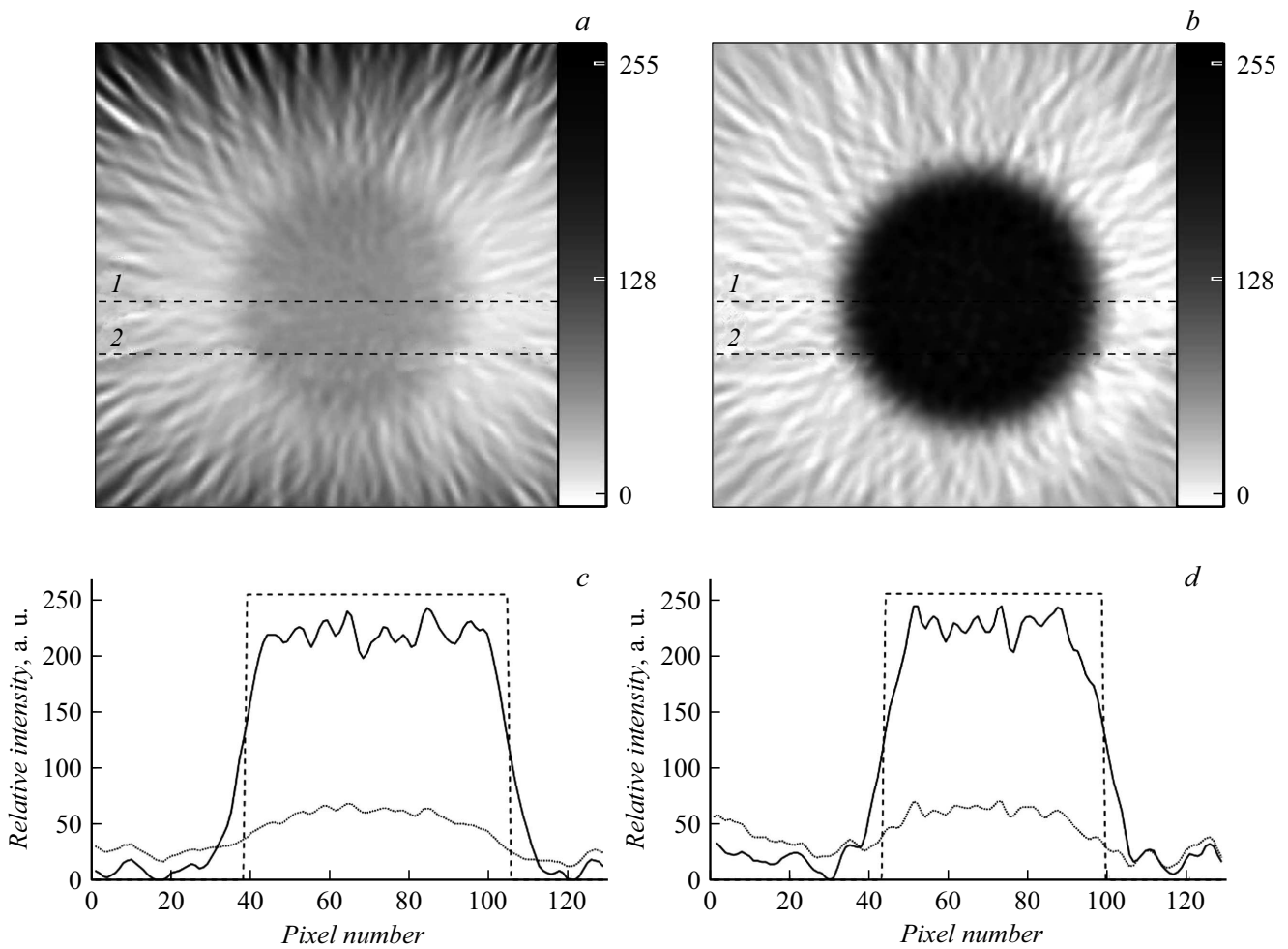


Рис. 7. Реконструированные томограммы распределения источников излучения в фосфоре: *a* — с помощью ОЭПР с параметром μ ; *b* — по формуле (7); *c* — сечение по линии 1; *d* — сечение по линии 2. Истинные распределения источников излучения, реконструированные с помощью ОЭПР с параметром μ и с помощью формулы (7), показаны пунктирной, штриховой и сплошной линиями соответственно.

Таблица 4. Значения критерия среднеквадратичного отклонения D для всего объекта и D' для сечений 1 и 2

Рассеивающая среда	Объект в целом		Сечение 1		Сечение 2	
	ОЭПР	ПРС	ОЭПР	ПРС	ОЭПР	ПРС
Вакуум	15.40	15.40	1.52	1.52	1.66	1.66
Li	16.51	15.16	1.67	1.58	1.79	1.59
Na	20.73	15.74	2.00	1.55	2.26	1.70
K	19.39	15.90	1.78	1.69	1.95	1.70
H ₂ O	20.50	15.69	1.78	1.75	1.95	1.66
Be	28.41	16.34	2.23	1.94	2.28	1.72
Mg	33.39	16.44	2.21	1.84	2.39	1.75
B	37.78	16.84	2.26	1.95	2.49	1.79
Ca	38.08	19.38	2.38	1.86	2.46	1.85
C	41.89	17.64	3.17	2.16	3.08	1.85
S	44.13	18.30	4.28	1.83	3.98	1.83
Si	49.29	17.51	5.57	1.69	5.13	1.73
Al	53.92	17.72	6.10	1.90	5.57	1.80
P	54.97	19.23	6.42	1.85	5.85	1.89

Сравнение нового метода реконструкции с традиционным по значениям критерия среднеквадратичного отклонения D для всего объекта и D' для сечений 1 и 2 показано в табл. 4. Для всех веществ значения критериев отклонения при использовании формулы (7) для ПРС всегда меньше, чем для ОЭПР с параметром μ .

На рис. 8 приведены графические иллюстрации к табл. 4: зависимости точности реконструкции D от коэффициента ослабления μ , коэффициента поглощения μ_a и коэффициента рассеяния μ_s . Хорошо видно преимущество предложенного метода по сравнению с традиционным, а также увеличение этого преимущества при возрастании коэффициента рассеяния (рис. 8, *a*) и соответственно коэффициента ослабления (рис. 8, *c*). Зависимость критерия среднеквадратичного отклонения от коэффициента поглощения (рис. 8, *b*) носит более сложный характер, тем не менее преимущество нового метода очевидно и в этом случае.

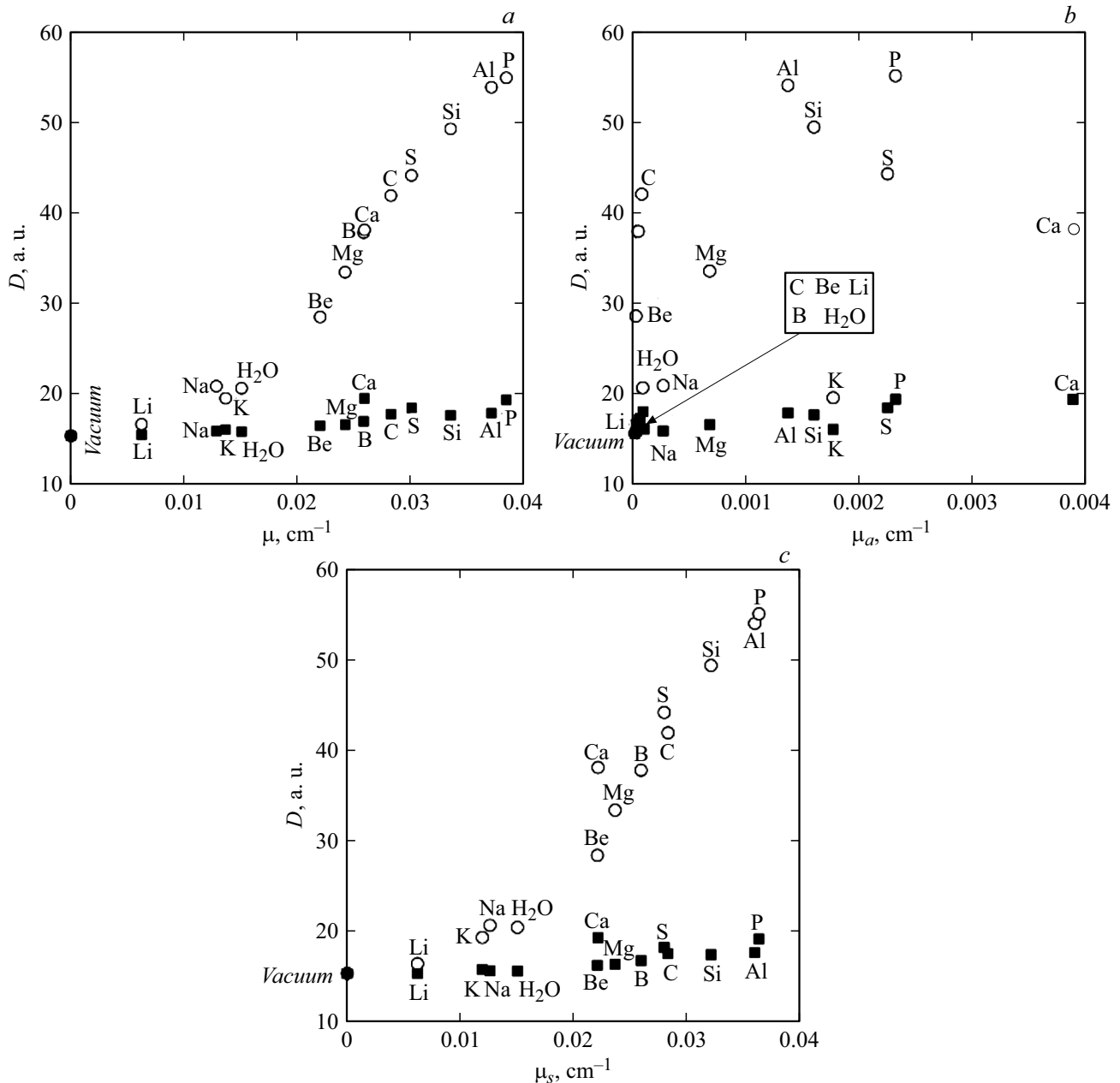


Рис. 8. Зависимость точности реконструкции по критерию D для объекта в целом от коэффициента ослабления (a), коэффициента поглощения (b) и коэффициента рассеяния (c): традиционная реконструкция с помощью ОЭПР с параметром μ (кружок) и с помощью формулы (7) (квадрат).

Заключение

Решение уравнения переноса и обратной томографической задачи в ОФЭКТ наиболее точно осуществлено для чисто поглощающей среды при единственном предположении равенства нулю индикатрисы рассеяния. Однако при этом полностью игнорируются процессы рассеяния излучения в среде. Частично учесть рассеяние излучения удается при дополнительном предположении, что рассеянные фотоны выбывают из рассмотрения. При этом, как и в ЧПС, реконструкция сводится к ОЭПР с заменой коэффициента поглощения на коэф-

фициент ослабления. Для более полного учета рассеяния излучения предложен новый метод, основанный на предположении об индикатрисе рассеяния специального вида (1), описывающую среду со свойством „рассеяние прямо назад“. Такая индикатриса рассеяния позволяет преобразовать интегро-дифференциальное УПИ общего вида, не имеющее аналитического решения, в дифференциальное уравнение в частных производных (2), допускающее точное аналитическое решение с точными граничными условиями (3) для произвольного пространственного распределения источников излучения и однородного распределения коэффициента

ослабления в пределах объекта. Это позволяет затем получить точное решение обратной томографической задачи.

Хотя для исследования характеристик нового метода реконструкции томограмм наиболее убедительным является натурный эксперимент, использование численного моделирования траекторий фотонов методом Монте-Карло с помощью ядерно-физической системы Geant4 избавляет от необходимости создавать реальный томограф, радиофармпрепарат и исследуемый фантом. При этом показания детектора, полученные с помощью Geant4, практически не отличаются от тех, которые были бы получены в реальном эксперименте. Кроме того, можно получить информацию, недоступную при проведении реального эксперимента, такую, как траектория и судьба каждого отдельного фотона.

Проведенное исследование точности реконструкции пространственного распределения источников излучения, погруженного в различные рассеивающие среды с разными значениями коэффициентов поглощения, рассеяния и ослабления, показало преимущество предложенного метода во всех случаях (табл. 4). Кроме того, с увеличением коэффициента ослабления превосходство предложенного метода увеличивается.

Интересно, что, несмотря на очень специальный вид индикатрисы рассеяния для среды со свойством „рассеяние прямо назад“, предложенный метод реконструкции эмиссионных томограмм явно превосходит традиционный метод. По-видимому, это обусловлено тем, что после единственного предположения об индикатрисе рассеяния (1) и прямая задача для УПИ, и обратная томографическая задача решаются точно без дополнительных предположений. С физической точки зрения можно предположить, что такая индикатриса рассеяния описывает большую часть попавших на детектор рассеянных фотонов за счет того, что рассеянные фотоны, значительно отклоняющиеся от нормали к плоскости ПЧД, поглощаются стенками каналов коллиматора.

Полученные результаты могут быть использованы для усовершенствования существующих алгоритмов реконструкции изображений в однофотонной эмиссионной томографии, а также для разработки новых конструкций эмиссионных томографов.

Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 19-32-90049).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] В.В. Пикалов, Т.С. Мельникова. *Томография плазмы* (Наука, Новосибирск, 1995)
- [2] *Emission Tomography: The Fundamentals of PET and SPECT*, ed. by M.N. Wernick, J.N. Aarsvold (San Diego, CA, Elsevier Academic Press, 2004)
- [3] С.А. Терещенко. *Методы вычислительной томографии* (Физматлит, М., 2004)
- [4] J. Prekeges. *Nuclear Medicine Instrumentation* (Jones & Bartlett Publishers, Burlington, MA, 2012)
- [5] S.R. Cherry, J.A. Sorenson, M.E. Phelps. *Physics in Nuclear Medicine e-Book* (Elsevier Saunders, Philadelphia, PA, 2012)
- [6] *Webb's Physics of Medical Imaging*, ed. by M.A. Flower. (CRC Press, Boca Raton, FL, 2012)
- [7] K.M. Case, P.F. Zweifel. *Linear Transport Theory* (Addison-Wesley, London, 1967)
- [8] A. Ishimaru. *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (Academic, NY., 1978)
- [9] А.М. Кольчужкин, В.В. Учайкин. *Введение в теорию прохождения частиц через вещество* (Атомиздат, М., 1978)
- [10] Л.А. Апресян, Ю.А. Кравцов. *Теория переноса излучения: Статистические и волновые аспекты* (Наука, М., 1983)
- [11] Н.Н. Barrett, B. Gallas, E. Clarkson, A. Clough. In: *Computational Radiology and Imaging*, ed. by C. Börgers, F. Natterer (Springer-Verlag, NY., 1999), p. 71.
- [12] E.M.A. Hussein. *Radiation Mechanics: Principles and Practice* (Elsevier, Amsterdam, 2010)
- [13] S. Bellini, M. Piacentini, C. Cafforio, F. Rocca. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ASSP-27* (3), 213 (1979). DOI: 10.1109/TASSP.1979.1163232
- [14] O. Tretiak, C. Metz. *SIAM J. Appl. Mathem.*, **39** (2), 341 (1980). DOI: 10.1137/0139029
- [15] G.T. Gullberg, T.F. Budinger. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering, BME-28* (2), 142 (1981). DOI: 10.1109/TBME.1981.324787
- [16] I.A. Hazou, D.C. Solmon. *J. Mathem. Anal. Appl.*, **141** (1), 109 (1989). DOI: 10.1016/0022-247X(89)90209-6
- [17] P.P. Bruyant. *J. Nucl. Medicine*, **43**, 1343 (2002).
- [18] С.А. Терещенко. *ЖТФ*, **87** (9), 1283 (2017). DOI: 10.21883/JTF.2017.09.44898.2016 [S.A. Tereshchenko. *Tech. Phys.*, **62** (9), 1293 (2017). DOI: 10.1134/S1063784217090250]
- [19] И.М. Соболев. *Численные методы Монте-Карло* (Физматлит, М., 1973)
- [20] G. Fishman. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications* (Springer Science & Business Media, NY., 2013)
- [21] O.N. Vassiliev. *Monte Carlo Methods for Radiation Transport: Fundamentals and Advanced Topics* (Springer, NY., 2016)
- [22] J. Allison, et al. *IEEE Transactions on Nucl. Sci.*, **53** (1), 270 (2006). DOI: 10.1109/TNS.2006.869826
- [23] S. Agostinelli, et al. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, **506** (3), 250 (2003). DOI: 10.1016/S0168-9002(03)01368-8

- [24] J. Allison, et al. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, **835**, 186 (2016). DOI: 10.1016/j.nima.2016.06.125
- [25] J. Baro, J. Sempau, J.M. Fernandez-Varea, F. Salvat. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms, **100**, 31 (1995). DOI: 10.1016/0168-583X(95)00349-5
- [26] D. Sarrut, et al. Medical Phys., **41** (6), 064301 (2014). DOI: 10.1118/1.4871617
- [27] XCOM: Photon Cross Sections Database.
<https://www.nist.gov/pml/xcom-photon-cross-sections-database>.
DOI: 10.18434/T48G6X