

02

## Несимметричное расщепление Аутлера–Таунса

© Л.Ю. Надькин О.В. Коровай, Д.А. Марков

Приднестровский государственный университет им. Т.Г. Шевченко,  
Тирасполь, MD3300 Молдова

e-mail: mizerok@hotmail.ru

Поступила в редакцию 15.09.2020 г.

В окончательной редакции 04.11.2020 г.

Принята к публикации 18.11.2020 г.

Изучено влияние двухфотонных процессов на поглощение в системе экситонов и биэкситонов при двухимпульсном взаимодействии. Показано, что учет двухфотонных процессов приводит к возможности наблюдения несимметричного эффекта Аутлера–Таунса. При определенных величинах падающих полей возможно исчезновение эффекта Аутлера–Таунса, связанное с квантовой интерференцией всех механизмов взаимодействия. Предсказана возможность управления спектром поглощения с помощью изменения интенсивностей полей и расстройек резонанса падающего излучения.

**Ключевые слова:** экситоны, биэкситоны, расщепление Аутлера–Таунса.

DOI: 10.21883/OS.2021.03.50653.233-20

### Введение

Закон дисперсии экситон-поляритонов в полупроводниках при низких уровнях возбуждения, обусловленный экситон-фотонным взаимодействием, состоит из двух поляритонных ветвей — нижней и верхней. Экситон-поляритоны являются собственными модами сильно связанной системы, состоящей из фотонной моды и экситонного резонанса в полупроводниках. В актуальной точке  $k$ -пространства, где собственные энергии механического экситона и фотона одинаковы, возникает расщепление, величина которого пропорциональна константе экситон-фотонного взаимодействия [1,2]. В размерноограниченных системах, таких как квантовые ямы, квантовые точки, микрорезонаторы, это расщепление является значительным, что определяет режим сильной связи (strong coupling) экситона с фотоном [3,4]. Полоса поглощения при учете экситон-фотонного взаимодействия имеет лоренцевский вид с максимумом на частоте экситонного перехода. При больших уровнях возбуждения возможно связывание экситонов в биэкситоны [2]. В [5] было показано, что в области М-полосы люминесценции, обусловленной излучательной рекомбинацией биэкситона с образованием кванта света и свободного экситона, имеет место закон дисперсии, аналогичный закону дисперсии в экситонной области спектра. Штарковское расщепление и квантовая интерференция с межзонными переходами в квантовых ямах InGaAs / AlInAs приводит к возникновению эффекта Аутлера–Таунса [6,7]. Поведение диэлектрической восприимчивости полупроводника при зондировании экситонного состояния фотонами слабого импульса в присутствии мощного лазерного импульса в области М-полосы люминесценции в кристаллах типа CuCl исследовано в [8]. Показано, что имеет место ярко выраженный эффект Аутлера–Таунса на экситонном переходе, и

положение пиков поглощения определяется амплитудой и частотой поля накачки. Экспериментальное подтверждение влияния частоты поля накачки на положение квазиуровней для несимметричных квантовых точек InAs / GaAs, AlAs / GaAs было описано в [9]. Зондирование „dressed“ экситонных состояний одной квантовой точки в нерезонансном резонаторе было рассмотрено в [10]. Так же как в системе InAs / GaAs AlAs / GaAs показано влияние разности частоты резонатора и собственных частот, а также интенсивности поля на положение уровней поглощения. В [11] экспериментально изучен оптический штарк-эффект для квантовых точек CdTe, легированных Mn, в которых действие лазерного излучения при возбуждении экситонов (и при учете экситон-биэкситонной конверсии) приводит к dressed экситонным состояниям. Показано, что в такой системе возможно наблюдение расщепления Аутлера–Таунса каждого оптического перехода квантовой точки, которое является сильно зависящим от мощности, поляризации и расстройки резонанса управляющего лазерного излучения, что позволяет осуществлять оптический резонансный контроль системы экситон-Mn.

Влияние поляризации на поглощение квантовых точек InAs / GaAs AlAs / GaAs было рассмотрено в [12]. Получены поляризационные спектры, которые демонстрируют наличие квантовой интерференции между полями, когерентно рассеянными от двух расщепленных экситонных состояний с тонкой структурой. В [13] показана возможность резонансного оптического управления спином одиночного атом Cr в квантовой точке CdTe / ZnTe. В [14] теоретически рассматривался механизм управления тонкой структурой экситона в квантовых точках с помощью электрических полей. Показано, что под действием электрических полей возможно менять поведение ветвей закона дисперсии.

Двухфотонное возбуждение биэкситонов в системе квантовых точек InGaAs / GaAs с последующим излучением в области М-полосы и генерации фотонов при рекомбинации экситонов изучены в [15]. Показано, что такая система может быть использована для получения монохроматического излучения в области экситонного перехода.

В [16] теоретически изучены законы дисперсии в условиях действия мощной накачки в области М-полосы люминесценции и действия слабого импульса в области экситонного перехода с учетом двухфотонного возбуждения биэкситонов полями обоих импульсов. Показано, что при совпадении частот Раби экситонного состояния и двухфотонного возбуждения биэкситонов возможно пересечение ветвей закона дисперсии. В [17] результаты [16] распространены на случай атомной системы. В работе [17] проведен детальный анализ поведения законов дисперсии в зависимости от расстройек резонанса, величин частот Раби и разности фаз констант взаимодействия. В вышеперечисленных экспериментальных работах [6,7,10,11] наблюдается несимметричность пиков полос поглощения даже в условиях точного резонанса импульса накачки, действующего в области М-полосы.

В настоящей работе производится детальное исследование законов дисперсии [16,17] для экситонной области спектра. Строятся и изучаются выражения для восприимчивости среды на частоте экситонного перехода с учетом констант затухания экситонного и биэкситонного состояний. Изучены и физически обоснованы механизмы влияния процесса двухфотонного взаимодействия с биэкситами на поглощение излучения на частоте экситонного перехода.

## Постановка задачи

Пусть на полупроводник падают два импульса резонансного лазерного излучения с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Первый импульс с частотой  $\omega_1$  возбуждает экситоны из основного состояния кристалла, второй импульс с частотой  $\omega_2$  конвертирует экситоны в биэкситоны, а также оба импульса одновременно генерируют биэкситоны из основного состояния кристалла благодаря процессу двухфотонного поглощения света. Энергетическая схема представлена на рис. 1. Представленная схема хорошо реализуется в кристаллах CuCl, где энергия связи биэкситона порядка 32–40 meV, при этом частота экситонного перехода порядка 3.18 eV [18,19].

В более „современных“ структурах InAs/GaAs AlAs/GaAs, описываемых в [6,9,10], энергия связи биэкситона порядка 2.6 meV при частоте экситонного перехода 1.35 eV. В таких системах уширение экситонного состояния не превышает 4 meV и соответственно биэкситонного состояния 8 meV при температуре 4.2 K.

При соблюдении данных условий экситонная полоса и М-полоса рекомбинации биэкситонов существенно отдалены друг от друга. Вследствие большой энергии

связи биэкситона частота фотона, действующего в области экситонного перехода, обладает большой расстройкой резонанса по отношению к переходу в области М-полосы, поэтому необходимо учитывать действие двух импульсов света, каждый из которых находится в резонансе с определенным переходом.

Гамильтониан однородно распределённых в кристалле экситонов и биэкситонов запишем в виде

$$H = \hbar\omega_0 a^+ a + \hbar\Omega_0 b^+ b - \hbar(g^* E_1^+ e^{-i\omega_1 t} a^+ + g E_1^- e^{i\omega_1 t} a) - \hbar(\sigma^* E_2^+ e^{-i\omega_2 t} a b^+ + \sigma E_2^- e^{i\omega_2 t} a^+ b) - \hbar(\mu^* E_2^+ E_1^+ b^+ e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + \mu E_2^- E_1^- b e^{i(\omega_1+\omega_2)t}), \quad (1)$$

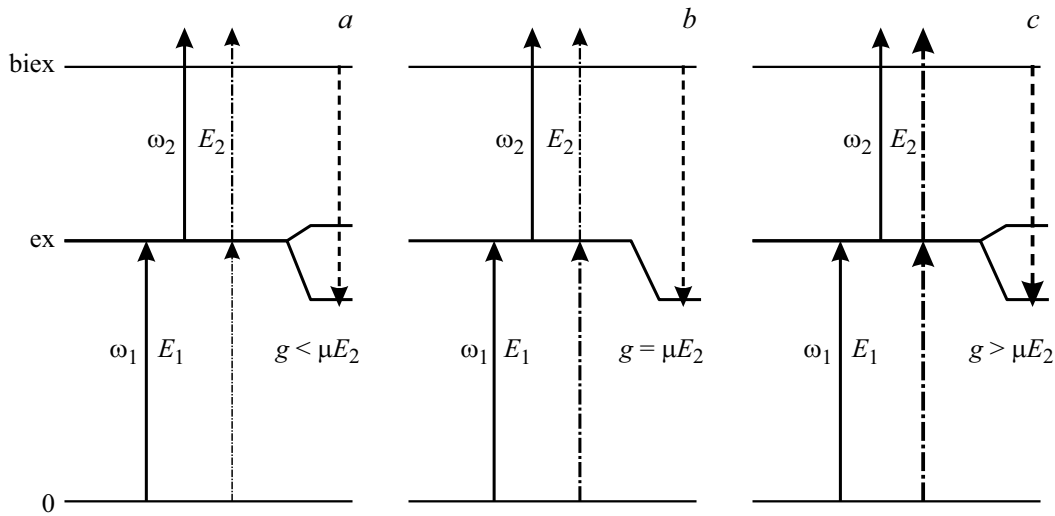
где  $\omega_0$  и  $\Omega_0$  — собственные частоты экситонного и биэкситонного состояний соответственно,  $g(g^*)$  — константа экситон-фотонного взаимодействия,  $\sigma(\sigma^*)$  — константа оптической экситон-биэкситонной конверсии,  $\mu(\mu^*)$  — константа двухфотонной генерации биэкситонов из основного состояния кристалла,  $a, b$  — амплитуды экситонной и биэкситонной волн поляризации среды,  $E_{1,2}^+(E_{1,2}^-)$  — положительно (отрицательно) частотные компоненты полей первого и второго импульсов. Отметим, что процессы оптической экситон-биэкситонной конверсии и двухфотонного возбуждения биэкситонов, описываемые константами  $\sigma$  и  $\mu$ , характеризуются гигантскими силами осциллятора [17,20,21]. Используя (1) и предполагая состояния экситонов и фотонов макрозаполненными, получим гайзенберговские (материальные) уравнения для амплитуд  $a$  и  $b$ :

$$i\dot{a} = (\omega_0 - i\gamma_1)a - g^* E_1^+ e^{-i\omega_1 t} - \sigma E_2^- e^{i\omega_2 t} b, \quad (2)$$

$$i\dot{b} = (\Omega_0 - i\gamma_2)b - \sigma^* E_2^+ e^{-i\omega_2 t} a - \mu^* E_1^+ E_2^+ e^{-i(\omega_1+\omega_2)t}, \quad (3)$$

где  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — феноменологические параметры, учитывающие затухание экситонного и биэкситонного уровня соответственно из-за процессов рассеяния, обусловленных уходом экситонов и биэкситонов из когерентных мод в некогерентные.

Изучим отклик системы во всех порядках теории возмущений по полям обоих импульсов. Если искать решение уравнения (2) в виде суперпозиции слагаемых с экспоненциальными множителями  $e^{-i\omega_1 t}$  и  $e^{-i\omega_2 t}$ , а уравнения (3) — с множителями  $e^{-2i\omega_1 t}$  и  $e^{-2i\omega_2 t}$ , то благодаря нелинейным слагаемым в (2) и (3) возникают резонансные слагаемые, пропорциональные  $e^{(-2i\omega_1 t + i\omega_2 t)}$ ,  $e^{(-2i\omega_2 t + i\omega_1 t)}$ ,  $e^{(-3i\omega_1 t + 2i\omega_2 t)}$ ,  $e^{(-3i\omega_2 t + 2i\omega_1 t)}$  и т.д. в (2) и  $e^{(-i\omega_1 t - i\omega_2 t)}$ ,  $e^{(-3i\omega_2 t + i\omega_1 t)}$ ,  $e^{(-3i\omega_1 t + i\omega_2 t)}$ ,  $e^{(-4i\omega_2 t + 2\omega_1 t)}$ ,  $e^{(-4i\omega_1 t + 2i\omega_2 t)}$  и т.д. в (3). Поэтому решения (2) и (3)



**Рис. 1.** Расширенная энергетическая схема полупроводника при различной степени влияния процесса двухфотонного взаимодействия с биэкситонами.

будем искать в виде

$$\begin{aligned}
 a = & a_0 e^{-i\omega_1 t} + a_0^* e^{i\omega_1 t} + A_0 e^{-i\omega_2 t} + A_0^* e^{i\omega_2 t} \\
 & + A_1 e^{-i(2\omega_1 - \omega_2)t} + A_1^* e^{i(2\omega_1 - \omega_2)t} \\
 & + A_2 e^{-i(2\omega_2 - \omega_1)t} + A_2^* e^{i(2\omega_2 - \omega_1)t} \\
 & + A_3 e^{-i(3\omega_1 - 2\omega_2)t} + A_3^* e^{i(3\omega_1 - 2\omega_2)t} \\
 & + A_4 e^{-i(3\omega_2 - 2\omega_1)t} + A_4^* e^{i(3\omega_2 - 2\omega_1)t} + \dots, \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b = & b_0 e^{-2i\omega_1 t} + b_0^* e^{2i\omega_1 t} \\
 & + B_0 e^{-2i\omega_2 t} + B_0^* e^{2i\omega_2 t} \\
 & + B_1 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} + B_1^* e^{i(\omega_1 + \omega_2)t} \\
 & + B_2 e^{-i(3\omega_1 - \omega_2)t} + B_2^* e^{i(3\omega_1 - \omega_2)t} \\
 & + B_3 e^{-i(3\omega_2 - \omega_1)t} + B_3^* e^{i(3\omega_2 - \omega_1)t} \\
 & + B_4 e^{-i(4\omega_1 - 2\omega_2)t} + B_4^* e^{i(4\omega_1 - 2\omega_2)t} \\
 & + B_5 e^{-i(4\omega_2 - 2\omega_1)t} + B_5^* e^{i(4\omega_2 - 2\omega_1)t} \dots, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где  $a_0, A_0, A_1, A_2 \dots$  и  $b_0, B_0, B_1, B_2 \dots$  — не зависящие от времени амплитуды. Подставляя (4) и (5) в (2) и (3), выделяем множители при соответствующих экспонентах в нижайших порядках теории возмущений по амплитудам  $E_i, A_i$  и  $B_i$  ( $i = 1, 2 \dots$ ).

Считаем, что оба импульса падают на среду одновременно и действуют в течение длительного промежутка времени, меньшего времени релаксации среды, что позволяет искать решение уравнений (2) и (3) в стационарном режиме. Учитывая данные приближения, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 (\omega_1 - \omega_0 + i\gamma_1)a_0 &= -\sigma E_2^- B_1 - g^* E_1^+, \\
 (\omega_2 - \omega_0 + i\gamma_1)A_0 &= -\sigma E_2^- B_0,
 \end{aligned}$$

$$(2\omega_1 - \omega_2 - \omega_0 + i\gamma_1)A_1 = -\sigma E_2^- b_0,$$

$$(2\omega_2 - \omega_1 - \omega_0 + i\gamma_1)A_2 = -\sigma E_2^- B_3,$$

$$(3\omega_1 - \omega_2 - \omega_0 + i\gamma_1)A_3 = -\sigma E_2^- B_5,$$

$$(3\omega_2 - \omega_1 - \omega_0 + i\gamma_1)A_4 = -\sigma E_2^- B_2 \text{ и т.д.},$$

$$(2\omega_1 - \Omega_0 + i\gamma_2)b_0 = -\sigma^* E_2^+ A_1,$$

$$(2\omega_2 - \Omega_0 + i\gamma_2)B_0 = -\sigma^* E_2^+ A_0,$$

$$(\omega_1 + \omega_2 - \Omega_0 + i\gamma_2)B_1 = -\sigma^* E_2^+ a_0 - \mu^* E_1^+ E_2^+,$$

$$(3\omega_1 - \omega_2 - \Omega_0 + i\gamma_2)B_2 = -\sigma^* E_2^+ A_4,$$

$$(3\omega_2 - \omega_1 - \Omega_0 + i\gamma_2)B_3 = -\sigma^* E_2^+ A_2,$$

$$(4\omega_1 - \omega_2 - \Omega_0 + i\gamma_2)B_4 = 0,$$

$$(4\omega_2 - \omega_1 - \Omega_0 + i\gamma_2)B_5 = -\sigma^* E_2^+ A_3$$

и т.д. Из этих уравнений получаем, что  $A_0 = A_1 = \dots = 0$ ,  $b_0 = B_0 = B_2 = \dots = 0$ . Тогда система уравнений для амплитуд примет вид

$$\begin{cases}
 (\omega_1 - \omega_0 + i\gamma_1)a_0 = -\sigma E_2^- B_1 - g^* E_1^+, \\
 (\omega_1 + \omega_2 - \Omega_0 + i\gamma_2)B_1 = -\sigma^* E_2^+ a_0 - \mu^* E_1^+ E_2^+.
 \end{cases}$$

Вводя расстройки резонанса для полей обоих импульсов  $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_0$  и  $\Delta_2 = \omega_2 - \Omega_0 + \omega_0$ , получим выражения для амплитуд  $a_0$  и  $B_1$ :

$$a_0 = \frac{\left( \mu^* \sigma |E_2|^2 - g^* (\Delta_1 + \Delta_2 + i\gamma_2) \right) E_1^+}{(\Delta_1 + \Delta_2 + i\gamma_2) (\Delta_1 + i\gamma_1) - |\sigma|^2 |E_2|^2},$$

$$B_1 = \frac{\left( \sigma^* g^* - \mu^* (\Delta_1 + i\gamma_1) \right) E_1^+ E_2^+}{(\Delta_1 + \Delta_2 + i\gamma_2) (\Delta_1 + i\gamma_1) - |\sigma|^2 |E_2|^2}.$$

Используя выражение для поляризации среды на частоте импульса, действующего в области экситонного перехода,  $P^* = \hbar g a + \hbar \mu E_2^- b$ , можно получить выражение, описывающее восприимчивость среды на данной частоте:

$$\chi = \hbar g \frac{(\mu^* \sigma |E_2|^2 - g^*(\Delta_1 + \Delta_2 + i\gamma_2))}{(\Delta_1 + \Delta_2 + i\gamma_2)(\Delta_1 + i\gamma_1) - |\sigma|^2 |E_2|^2} + \hbar \mu \frac{(\sigma^* g^* - \mu^*(\Delta_1 + i\gamma_1)) |E_2|^2}{(\Delta_1 + \Delta_2 + i\gamma_2)(\Delta_1 + i\gamma_1) - |\sigma|^2 |E_2|^2}.$$

Так как константы  $g, \sigma, \mu$  комплексные, представим их в виде произведений действительных амплитуд и фазовых множителей:  $g e^{i\varphi_1}, \sigma e^{i\varphi_2}, \mu e^{i\varphi_3}$ . Затем, вводя разность фаз  $\theta = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3$ , получим окончательное выражение для восприимчивости среды:

$$\chi = -\hbar \frac{|g|^2(\Delta_1 + \Delta_2 + i\gamma_2) + |\mu|^2 |E_2|^2(\Delta_1 + i\gamma_1) - 2g\sigma\mu |E_2|^2 \cos(\theta)}{(\Delta_1 + \Delta_2 + i\gamma_2)(\Delta_1 + i\gamma_1) - |\sigma|^2 |E_2|^2}.$$

В пределе исчезающе малых констант затухания восприимчивость среды  $\chi$  является действительной функцией вида

$$\chi = -\hbar \frac{|g|^2(\Delta_1 + \Delta_2) + |\mu|^2 |E_2|^2 \Delta_1 - 2g\sigma\mu |E|^2 \cos(\theta)}{(\Delta_1 + \Delta_2)\Delta_1 - |\sigma|^2 |E_2|^2}. \quad (6)$$

Из (6) видно, что данное выражение расходится при двух значениях расстройк резонанса  $\Delta_{1\pm}$ , которые определяются выражениями

$$\Delta_{1\pm} = -\left(\Delta_2 \pm \sqrt{\Delta_2^2 + 4\sigma^2 |E_2|^2}\right)/2. \quad (7)$$

Расстройки  $\Delta_{1\pm}$  определяют новые, перенормированные собственные частоты  $\omega_{1\pm} = \omega_0 + \Delta_{1\pm}$  экситонных состояний (квазиуровней), возникающих под действием поля накачки. Разность собственных частот (расщепление Аутлера–Таунса) квазиуровней определяет частоту оптической нутации  $\Omega = 4\sigma^2 |E_2|^2$  в системе экситонов и биекситонов в области М-полосы. Из (7) видно, что чем больше амплитуда поля накачки  $E_2$  и чем больше абсолютное значение расстройки резонанса  $\Delta_2$ , тем больше величина расщепления Аутлера–Таунса.

Числитель (6) состоит из трех слагаемых, первое из которых (пропорциональное  $|g|^2$ ) описывает экситон-фотонное взаимодействие, второе (пропорциональное  $|\mu|^2$ ) описывает двухфотонное взаимодействие с биекситонами, третье, содержащее все три константы взаимодействия и является следствием квантовой интерференции всех действующих механизмов нелинейности.

Используя выражения для диэлектрической проницаемости  $\varepsilon = \varepsilon_\infty + 4\pi\chi$ , получим закон дисперсии

$$\left(\frac{ck_1}{\omega_1}\right)^2 = \varepsilon_\infty - 4\pi\hbar \times \frac{|g|^2(\Delta_1 + \Delta_2) + |\mu|^2 |E_2|^2 \Delta_1 - 2g\sigma\mu |E_2|^2 \cos(\theta)}{(\Delta_1 + \Delta_2)\Delta_1 - |\sigma|^2 |E_2|^2}. \quad (8)$$

Представим выражение (8) в следующем виде:

$$\left(\frac{ck_1}{\omega_1}\right)^2 = \varepsilon_\infty - 4\pi\hbar \left(\frac{A}{\Delta_1 - \Delta_{1+}} + \frac{B}{\Delta_1 - \Delta_{1-}}\right), \quad (9)$$

где

$$A = \frac{g^2(\sqrt{4\sigma^2 E_2^2 + \Delta_2^2} + \Delta_2) + \mu^2 E_2^2(\sqrt{4\sigma^2 E_2^2 + \Delta_2^2} - \Delta_2) + 4g\sigma\mu E_2^2 \cos(\theta)}{2\sqrt{4\sigma^2 E_2^2 + \Delta_2^2}}.$$

$$B = \frac{g^2(\sqrt{4\sigma^2 E_2^2 + \Delta_2^2} - \Delta_2) + \mu^2 E_2^2(\sqrt{4\sigma^2 E_2^2 + \Delta_2^2} + \Delta_2) - 4g\sigma\mu E_2^2 \cos(\theta)}{2\sqrt{4\sigma^2 E_2^2 + \Delta_2^2}}.$$

Видно, что равенство  $A$  и  $B$  нулю возможно при выполнении следующих условий:

$$A = 0 \text{ при } |\mu| = |g| \frac{2|\sigma|(\cos(\theta) \mp i \cdot \sin(\theta))}{\left(\sqrt{4\sigma^2 E_2^2 + \Delta_2^2} - \Delta_2\right)},$$

$$B = 0 \text{ при } |\mu| = -|g| \frac{2|\sigma|(\cos(\theta) \mp i \cdot \sin(\theta))}{\left(\sqrt{4\sigma^2 E_2^2 + \Delta_2^2} - \Delta_2\right)}, \quad (10)$$

В частном случае, когда  $\Delta_2 = 0$ ,  $A = (g^2 + \mu^2 E_2^2 + 2g\mu E_2 \cos(\theta))/2$ , а  $B = (g^2 + \mu^2 E_2^2 - 2g\mu E_2 \cos(\theta))/2$ . При  $\theta = 0$  коэффициент  $A = (g + \mu E_2)^2/2$ , а  $B = (g - \mu E_2)^2/2$ , и при  $\mu E_2 = g$  коэффициент  $B = 0$ . Можно получить обратную ситуацию: при  $\theta = \pi$  коэффициент  $A = (g - \mu E_2)^2/2$ , а  $B = (g + \mu E_2)^2/2$ . Учитывая, что  $|\mu|$  должна быть действительной положительной величиной (10), разность фаз  $\theta$  может принимать значения только кратные  $\pi$ .

Вводя нормированное продольно-поперечное расщепление в экситонной области спектра  $\omega_{LT} = 4\pi\hbar|g|^2/\varepsilon_\infty$ , из (8) можно получить выражение

$$\left(\frac{ck_1}{\omega_1}\right)^2 = \varepsilon_\infty \left(1 - \omega_L \frac{(\Delta_1 + \Delta_2) + U^2 \omega_R^2 \Delta_1 - 2U \omega_R^2 \cos(\theta)}{(\Delta_1 + \Delta_2)\Delta_1 - \omega_R^2}\right), \quad (11)$$

где  $U = \mu/\sigma g$ ,  $\omega_R = \sigma E_2$ .

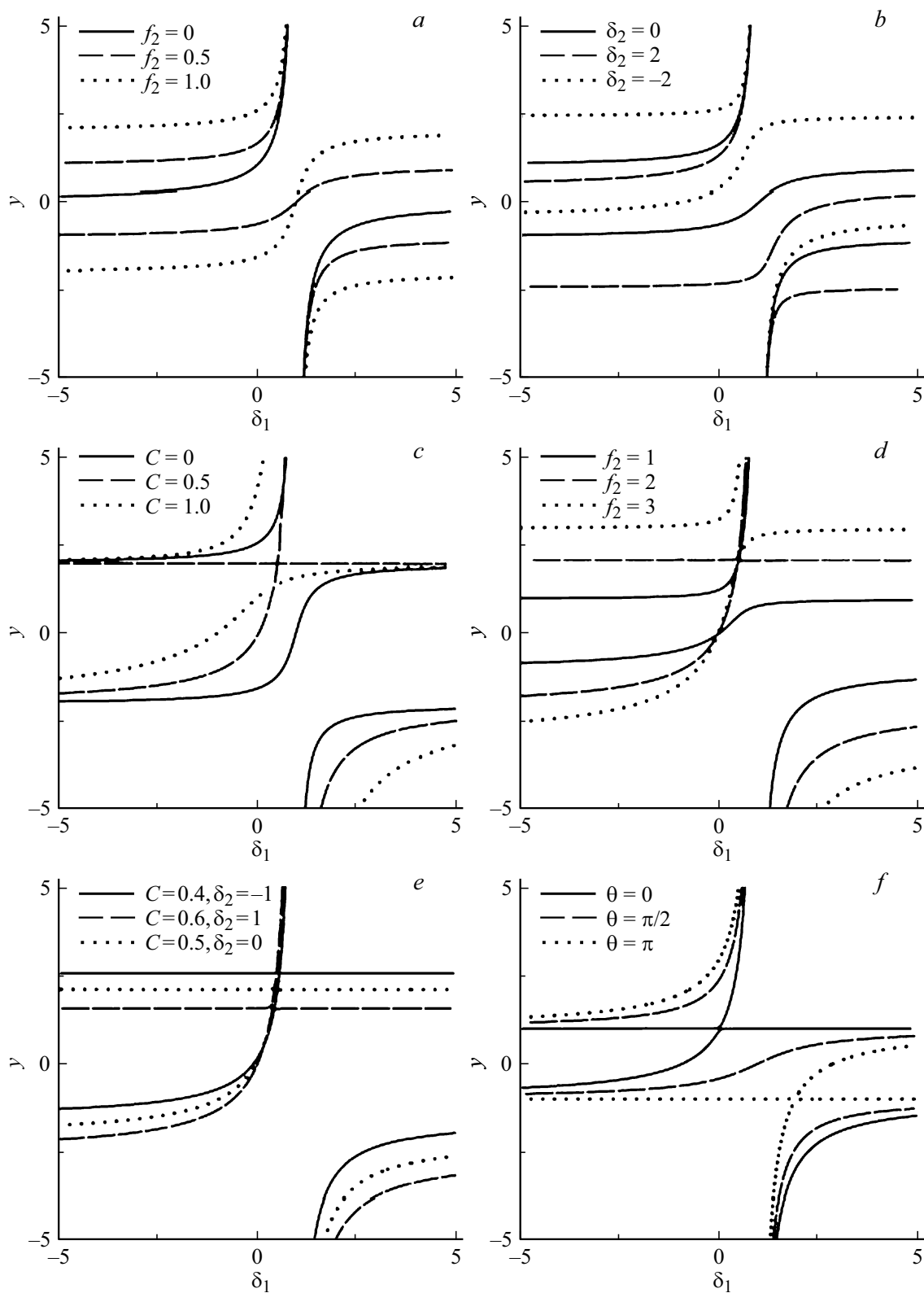
Выражение (11) (с точностью до нормировок) совпадает с аналогичным выражением, описанным в [15,16]. Вводя безразмерные величины

$$F_2^2 = \omega_R^2/\omega_{LT}^2, \quad \delta_1 = \Delta_1/\omega_{LT}, \quad \delta_2 = \Delta_2/\omega_{LT},$$

$$C = U \omega_{LT}, \quad y = c^2 k_1^2/\omega_1^2 \varepsilon_\infty,$$

получим следующее выражение, описывающее закон дисперсии полупроводника:

$$y = 1 - \frac{(\delta_1 + \delta_2) + C^2 F_2^2 \delta_1 - 2C F_2^2 \cos(\theta)}{(\delta_1 + \delta_2)\delta_1 - F_2^2}. \quad (12)$$



**Рис. 2.** Закон дисперсии  $y(\delta_1)$  экситон-поляритонов при следующих наборах параметров: (a)  $C = 0$ ,  $\delta_2 = 0$ ,  $\theta = 0$ ; (b)  $C = 0$ ,  $f_2 = 1$ ,  $\theta = 0$ ; (c)  $f_2 = 0.5$ ,  $\delta_2 = 0$ ,  $\theta = 0$ ; (d)  $C = 0.5$ ,  $\delta_2 = 0$ ,  $\theta = 0$ ; (e)  $f_2 = 2$ ,  $\theta = 0$ ; (f)  $C = 1$ ,  $\delta_2 = 0$ ,  $f_2 = 11$ .

## Обсуждение результатов

На рис. 2 представлена зависимость  $y(\delta_1)$  (12), описывающая поведение закона дисперсии при различных значениях параметров. Будем считать, что мощный импульс накачки действует в области М-полосы, а пробный импульс действует в области экситонного перехода, хотя в уравнении (4) мы не накладываем ограничений по полю на пробный импульс. На рис. 2, *a* представлен закон дисперсии полупроводника, состоящий из трех непересекающихся ветвей для случая, когда  $C = 0$  и  $\delta_2 = 0$ , т.е. без учета процесса двухфотонного возбуждения биэкситонов из основного состояния кристалла и в условиях точного резонанса импульса, действующего в области М-полосы. Из рис. 2, *a* видно, что все три ветви закона дисперсии  $y(\delta_1)$  имеют восходящий характер. Учет поля накачки приводит к расщеплению экситонного уровня и, как следствие, появлению двух квазиуровней с частотами  $\omega_+$  и  $\omega_-$ , которые в соответствии с выражением (7) расходятся друг относительно друга с ростом амплитуды поля накачки, удаляясь от частоты экситонного перехода  $\omega_0$ . Таким образом, включение поля накачки приводит к формированию трех ветвей закона дисперсии, причем средняя ветвь располагается в окрестности частоты  $\omega = \omega_0$ , тогда как верхняя и нижняя ветви закона дисперсии по структуре напоминают ветви закона дисперсии обычных экситон-поляритонов. Также видно, что с ростом поля накачки спектральная область существования всех трех ветвей в окрестности актуальной точки  $k$ -пространства расширяется, так как с ростом частоты Раби  $\omega_R$  увеличивается расстояние между квазиуровнями. На рис. 2, *b* представлено влияние расстройки резонанса частоты импульса накачки на поведение закона дисперсии. В соответствии с (7) и [7,8] положение квазиуровней определяется не только интенсивностью излучения, а также знаком и величиной расстройки резонанса. Приближительное положение квазиуровней определяется выражением  $-\delta_2/2 \pm (\delta_2/2 + F_2^2/\delta_2)$ . При малых интенсивностях излучения один из квазиуровней образуется в области экситонного перехода, а другой на частоте, приблизительно равной  $\Omega_0 - \omega_2 - \omega_0$ . Его появление обусловлено действием индуцированного излучения в области М-полосы (т.е. действием реплики состояния).

Таким образом, изменяя расстройку резонанса и интенсивность излучения, можно влиять на положение квазиуровней. Резонансное приближение ограничивает диапазон рассматриваемых величин расстройки резонанса. Согласно (9), расстройка резонанса меняет не только положение квазиуровней, но и величину взаимодействия на данной частоте. При положительном значении расстройки резонанса происходит сближение верхней и средней ветвей закона дисперсии, а при отрицательном — сближение средней и нижней ветвей. Сближение ветвей закона дисперсии обусловлено уменьшением коэффициентов  $A$  и  $B$ , определяющих величину взаимодействия и величину поглощения на частотах

квазиуровней. Коэффициенты  $A$  и  $B$  могут равняться нулю при выполнении условия (10). Данное условие для случая  $\theta = 0$  в нормированных величинах имеет следующий вид:

$$A = 0 \text{ при } C = \frac{2}{\sqrt{4E_2^2 + \delta_2^2} - \delta_2} = \frac{\left(\sqrt{4E_2^2 + \delta_2^2}\right) + \delta_2}{2E_2^2},$$

$$B = 0, \text{ при } C = -\frac{2}{\sqrt{4E_2^2 + \delta_2^2} + \delta_2} = \frac{-\left(\sqrt{4E_2^2 + \delta_2^2}\right) + \delta_2}{2E_2^2}. \quad (13)$$

Так как в рассматриваемом случае  $C = 0$ , условие пересечения (13) определяется выражением  $\sqrt{4f_2^2 + \delta_2^2} = |\delta_2|$ . Это возможно только при условии, что интенсивность мощного импульса накачки значительно меньше расстройки резонанса ( $|\delta_2| \gg 2f_2^2$ ). В отсутствие двухфотонного взаимодействия с биэкситонами действие мощной накачки и связанный с ней процесс рекомбинации биэкситонов в экситоны приводит к появлению вырожденного энергетического состояния. При этом поле накачки снимает вырождение, приводя к расщеплению экситонного состояния. При малых интенсивностях ( $|\delta_2| \gg f_2^2$ ) (рис. 2, *b*) сближение ветвей закона дисперсии обусловлено ослаблением процессов рекомбинации биэкситонов и, как следствие, уменьшением взаимодействия на частоте действия реплики.

На рис. 2, *c* представлен закон дисперсии при учете процесса двухфотонного возбуждения биэкситонов. Видно, что увеличение параметра  $C$ , ответственного за учет процесса двухфотонного взаимодействия с биэкситонами, приводит к сближению и пересечению ветвей закона дисперсии. Пересечение ветвей закона дисперсии в условиях точного резонанса импульса накачки происходит при выполнении условия  $CF_2 = 1$  ( $|\mu|E_2 = |g|$ ). Таким образом, пересечение ветвей будет наблюдаться тогда, когда вероятность экситон-фотонного взаимодействия, определяемая константой  $|g|$ , будет совпадать с вероятностью эффективного двухфотонного взаимодействия  $|\mu|E_2$ . В отличие от вышеописанного случая сближение и пересечение ветвей обусловлено вырождением экситонного состояния в условиях квантовой интерференции всех действующих механизмов нелинейности, а не ослаблением процесса рекомбинации биэкситонов. Дальнейшее увеличение параметра  $C$  приводит к снятию вырождения и увеличению расстояния между ветвями закона дисперсии. На рис. 2, *d* показан случай, когда пересечение ветвей закона дисперсии можно получить при любом ненулевом значении параметра  $C$ .

Таким образом, при учете двухфотонного взаимодействия с биэкситонами увеличение интенсивности накачки может привести к сближению ветвей закона дисперсии и их пересечению. Каким бы малым не было

влияние двухфотонных процессов, всегда можно подобрать поле, при котором может наблюдаться сближение и пересечение ветвей закона дисперсии.

На рис. 2, *e* представлен закон дисперсии при ненулевых значениях параметров  $\delta_2$  и  $C$ . Пересечение верхней и средней ветвей закона дисперсии в этом случае происходит при выполнении условия (13). Стоит отметить, что вне зависимости от знака расстройки резонанса пересечение происходит в области  $\delta_1 > 0$ , т.е. пропадает квазиуровень на частоте  $\delta_1 = \frac{\sqrt{4E_2^2 + \delta_2^2} - \delta_2}{2}$ . Во всех вышеперечисленных случаях разность фаз констант взаимодействия  $\theta = 0$ . На рис. 2, *f* представлено влияние разности фаз  $\theta$  на поведение закона дисперсии. Как было предсказано выше, пересечение ветвей закона дисперсии возможно только при  $\theta = \pi n$ . В случае, когда  $n = 2i$  ( $i = 0, 1 \dots$ ), пересекаются верхняя и средняя ветви закона дисперсии. При  $n = 2i + 1$  ( $i = 0, 1 \dots$ ) пересекаются средняя и нижняя ветви закона дисперсии.

Рассмотрим влияние учета затухания на восприимчивость среды и ее связь с законом дисперсии. Переобозначим величины  $\delta_1 = \Delta_1/\gamma_1$ , а  $\delta_2 = \Delta_2/\gamma_1$ ,  $s = \gamma_2/\gamma_1$ ,  $f_2^2 = |\sigma|^2 |E_2|^2/\gamma_1$ ,  $c = \mu\gamma_1/\gamma_1$ ,  $\chi_0 = \hbar|g|^2/\gamma_1$ ,  $z = \chi/\chi_0$ , тогда из (6) получим выражение для нормированной восприимчивости на частоте пробного импульса

$$z = -\frac{(\delta_1 + \delta_2 + is) + c^2 f_2^2 (\delta_1 + i) - 2c f_2^2 \cos(\theta)}{(\delta_1 + \delta_2 + is)(\delta_1 + i) - f_2^2}.$$

Абсорбционная компонента восприимчивости имеет следующий вид:

$$z'' = \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2 + c^2 f_2^2 \delta_1^2 s + (c^2 f_2^2 + s)(f_2^2 + s) - 2(\delta_1 + \delta_2 + s)f_2^2 \cos(\theta)}{(\delta_1^2 + \delta_1 \delta_2 - f_2^2 - s)^2 + (s\delta_1 + \delta_1 + \delta_2)^2}. \quad (14)$$

Рассмотрим поведение абсорбционной компоненты восприимчивости  $z''$  (полосы поглощения слабого импульса в экситонной области спектра) в зависимости от расстройки резонанса  $\delta_1$  при различных наборах значений параметров. На рис. 3, *a* представлена зависимость  $z''(\delta_1, f_2)$  в условиях точного резонанса импульса накачки  $\delta_2 = 0$  и  $c = 0$ , т.е. когда двухфотонные процессы не учитываются. При низких уровнях возбуждения полоса поглощения имеет лоренцовскую форму с максимумом при  $\delta_1 = 0$  (рис. 3, *a*). С ростом уровня возбуждения  $f_2$  амплитуда пика поглощения в соответствии с (14) быстро убывает, а его полуширина постепенно растет. Когда интенсивность поля накачки достигает величины  $f_2 = s^3(1 + 2s)$ , происходит радикальная перестройка формы спектральной полосы поглощения (рис. 3, *a*): центральный пик при  $\delta_1 = 0$  превращается в минимум, и возникают два симметричных относительно  $\delta_1 = 0$  максимума полосы поглощения при расстройках резонанса

$$\delta_{1\pm} = \pm \left[ (1 + s)f_2 \sqrt{f_2^2 + s} - s(f_2^2 + s) \right]^{1/2}. \quad (15)$$

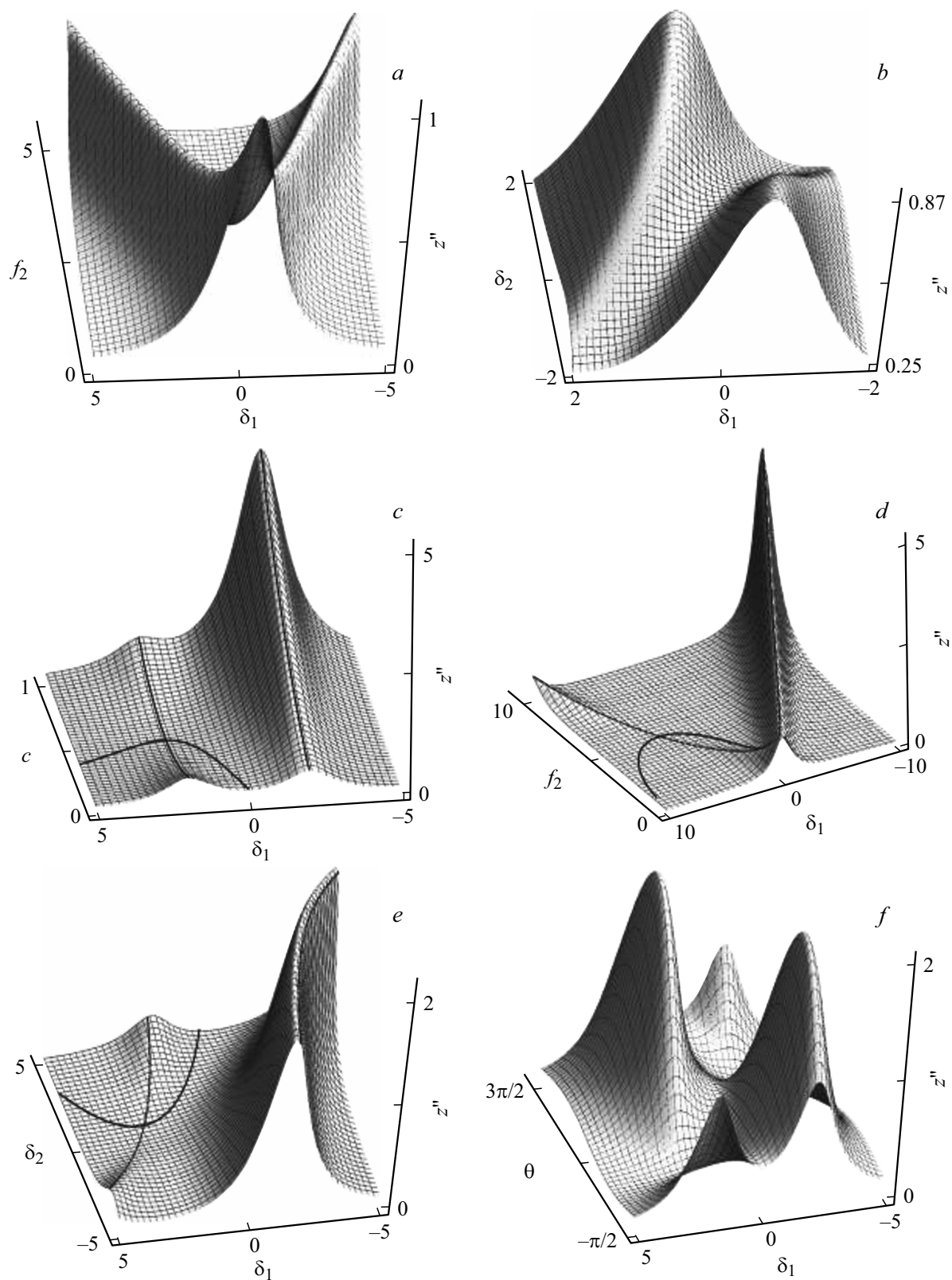
Новые пики поглощения все дальше расходятся друг от друга с ростом поля накачки  $f_2$ , причем их амплитуды монотонно убывают (рис. 3, *a*). Возникновение симметричных максимумов и минимума обусловлено перенормировкой энергетического спектра полупроводника под действием мощного импульса накачки. Экситонный уровень расщепляется на два квазиуровня, которые с ростом  $f_2$  все больше удаляются от положения экситонного уровня. На рис. 3, *b* представлена зависимость  $z''(\delta_1, \delta_2)$  при фиксированном значении  $f_2$ . Положение полос поглощения определяется выражением

$$\delta_{1\pm} = -\frac{1}{2}\delta_2 \pm \sqrt{\delta_2^2 + 4f_2^2 + 4s}. \quad (16)$$

Рост  $\delta_2$  (при  $\delta_2 > 0$ ) приводит к смещению полосы поглощения в длинноволновую (коротковолновую для  $\delta_2 < 0$ ) область спектра. При этом амплитуда пика поглощения, смещающегося асимптотически к значению  $\delta_1 = 0$ , растет при увеличении  $|\delta_2|$ , а амплитуда другого пика, появления которого в большей степени обусловлено рекомбинацией биэкситонов, уменьшается. Данные результаты хорошо согласуются с поведением ветвей закона дисперсии, описанных выше (рис. 2, *b*). На рис. 3, *c* представлена зависимость  $z''(\delta_c, c)$  в условиях точного резонанса импульса накачки  $\delta_2 = 0$  и фиксированного значения  $f_2$ . При  $c = 0$  (отсутствие двухфотонного взаимодействия с биэкситонами) наблюдаются два пика полосы поглощения, положение которых определяется выражением (15), обозначенные на рис. 3, *c* двумя параллельными жирными линиями. Для того чтобы определить точное положение пиков в общем случае, нужно решить уравнение  $\partial z''/\partial \delta_1 = 0$ . Найти аналитическое решение полученного уравнения пятой степени не представляется возможным. Из рис. 3, *c* видно, что с ростом параметра  $c$  положение пиков практически не изменяется, т.е. учет двухфотонного взаимодействия с биэкситонами не оказывает влияния на положения пиков полос поглощения. С другой стороны, дифференцирование (14) по параметру  $c$  приводит к уравнению первого порядка, решение которого имеет вид  $c_{\min} = \frac{s\delta_1 + \delta_1 + \delta_2}{s\delta_1^2 + f_2^2 + s}$ . Кривая  $c_{\min}(\delta_1)$  также обозначена на рисунке жирной линией. Пересечение двух линий представляет собой аналог точки пересечения ветвей закона дисперсии. С учетом приблизительного положения пиков поглощения, определяемых выражением (16), зависимость между  $c$  и  $f_2$  имеет вид

$$c_{\min} \approx \frac{\sqrt{2}(s + a)\sqrt{2f_2^2 - s^2 + s + 2\delta_2}}{(s + 1)(2f_2^2 - s^2 + 2s)}. \quad (17)$$

Выражение (17) в условиях точного резонанса  $\delta_2 = 0$  и при  $s = 1$  позволяет получить критерий  $f_2 c_{\min} \approx 1$ , который определяет минимальное значение величины поглощения. В результате на рис. 3, *c* наблюдаются два пика полос поглощения. Амплитуда пика в длинноволновой области увеличивается по мере увеличения  $c$ ,



**Рис. 3.** Абсорбционная компонента восприимчивости  $z''$  при следующих наборах параметров: (a)  $C = 0, \delta_2 = 0, \theta = 0, s = 1$ ; (b)  $C = 0, f_2 = 0.5, \theta = 0, s = 1$ ; (c)  $f_2 = 0.5, \delta_2 = 0, \theta = 0, s = 1$ ; (d)  $C = 0.2, \delta_2 = 0, \theta = 0, s = 1$ ; (e)  $C = 0.4, f_2 = 2.5, \theta = 0, s = 1$ ; (f)  $C = 0.5, \delta_2 = 0, f_2 = 2, s = 1$ .



тогда как амплитуда пика поглощения в коротковолновой области уменьшается, достигает минимума при  $c \approx 1/f_2$ , дальнейшее увеличение параметра  $c$  приводит к повторному появлению пика полосы поглощения в коротковолновой области. Стоит отметить, что учет двухфотонных процессов существенно увеличивает поглощение с ростом интенсивности излучения без изменения положения пиков. На рис. 3, *d* представлена зависимость абсорбционной компоненты восприимчивости от интенсивности мощного импульса накачки  $z''(\delta_1, f_2)$  при фиксированном значении параметра  $c$ . При  $f_2 = 0$  поглощение обусловлено экситон-фотонным взаимодействием. При увеличении накачки возникают два пика поглощения, быстро удаляющихся друг относительно друга с ростом интенсивности излучения. На рис. 3, жирными кривыми представлены линии, определяющие приблизительное положение пиков полос поглощения из (15), а также кривая, определяющая минимальное взаимодействие согласно выражению (17). Из рисунка видно, что пик, соответствующий поглощению в длинноволновой области спектра, увеличивается по амплитуде с ростом накачки. Амплитуда пика, смещающегося в коротковолновую область спектра, с ростом интенсивности излучения уменьшается, в точке пересечения кривых практически пропадает, а дальнейшее увеличение интенсивности излучения приводит к увеличению поглощения. Следует отметить, что, несмотря на относительно небольшое значение параметра  $c$ , т.е. при небольшом влиянии двухфотонных процессов, поглощение в длинноволновой области в несколько раз больше, чем поглощение без учета двухфотонных процессов. На рис. 3, *e* представлена зависимость  $z''(\delta_1, \delta_2)$  при фиксированных значениях параметров  $c$  и  $f_2$ . Сплошными линиями обозначены положения пиков полос поглощения при  $c = 0$  и линия минимального взаимодействия, полученная из уравнения (17), выражение для которой имеет вид

$$\delta_2 = cs\delta_1^2 - \delta_1(s+1) + c(f_2^2 + s). \quad (18)$$

Из рис. 3, *e* видно, что при учете двухфотонного взаимодействия пики полос поглощения смещены по сравнению с положением пиков при  $c = 0$ . Амплитуда пика в длинноволновой области с увеличением  $\delta_2$  растет, достигая максимума при выполнении условия (18). Дальнейшее увеличение  $\delta_2$  приводит к уменьшению поглощения. Пик, расположенный в коротковолновой области, ведет себя противоположным образом. На рис. 3, *f* представлено влияние разности фаз констант взаимодействия на поглощение. Из рисунка видно, что при изменении  $\theta$  изменяется амплитуда пиков полос поглощения. Амплитуда пика, возникающего в длинноволновой области, минимальна при  $\theta = 0$ , тогда как пик, возникающий в коротковолновой области, имеет минимум при  $\theta = \pi$ . Разность фаз констант взаимодействия фактически определяет знак перед третьим слагаемым в гамильтониане (1), которое отвечает за двухфотонное взаимодействие с биэкситонами. Так как матричный элемент  $\mu$  считается во втором порядке теории возмущений

в отличие от  $g$  и  $\sigma$ , то знак перед членом гамильтониана, включающем данную константу, неоднозначен. Таким образом, если эксперимент покажет, что по мере роста интенсивности падающего излучения уменьшается амплитуда пика в длинноволновой области спектра, то это соответствует случаю, когда знак перед третьим слагаемым гамильтониана отрицателен, если же в результате увеличения падающего излучения поглощение в коротковолновой области уменьшится, то знак перед данным слагаемым положителен.

Поведение функции поглощения при различных уровнях влияния процесса двухфотонного взаимодействия с биэкситонами представлено на рис. 1. Случай, когда двухфотонное взаимодействие слабое по сравнению с экситон-фотонным и экситон-биэкситонной конверсией (рис. 1, *a*), соответствует критерию  $\mu E_2 < g$ . На схеме изображены два квазиуровня, положение которых определяется совместным действием импульса в экситонной области спектра и реплики, формирующей экситоны вследствие рекомбинации биэкситонов. Положение квазиуровней определяется не только интенсивностью импульса, действующего в области М-полосы, но и расстройкой резонанса импульса накачки. В случае, когда  $\mu E_2 \approx g$  (рис. 1, *b*), зондируется только один квазиуровень. Закон дисперсии экситон-поляритона определяется выражением  $ck_1 = \omega - \frac{g^2}{\omega - \omega_0}$ . В условиях точного резонанса и при соблюдении критерия (10) закон дисперсии имеет вид

$$ck_1 = \omega - \frac{2g_{ef}^2}{\omega - \omega_0 + \sigma^2|f_2|^2} = \omega - \frac{2|\mu|^2|f_2|^2}{\omega - \omega_0 + \sigma^2|f_2|^2}.$$

Таким образом формируется новое резонансное поляритонное состояние, обусловленное действием всех механизмов нелинейности. Данное состояние смещено относительно экситонного перехода на величину, пропорциональную интенсивности накачки. При этом величина взаимодействия (амплитуда поглощения) зависит от интенсивности накачки. Когда  $\mu E_2 > g$  (рис. 1, *c*), поведение системы обусловлено двухфотонными процессами и почти ничем не отличается от рис. 1, *a* — также будут наблюдаться два квазиуровня, но величина поглощения будет пропорциональна интенсивности импульса накачки.

## Заключение

В условиях двухимпульсного взаимодействия с экситонами и биэкситонами наблюдаются три восходящих ветви закона дисперсии. Действие мощной накачки в области М-полосы приводит к расщеплению экситонного состояния в результате рекомбинации биэкситонов в экситоны. Расстройка резонанса и величина поля накачки определяют положение квазиуровней. При больших уровнях возбуждения абсорбционная восприимчивость состоит из ярко выраженного длинноволнового и слабого коротковолнового пиков, каждый из которых имеет

практически лоренцевскую форму. Учет двухфотонного взаимодействия с биэкситонами приводит к пересечению двух ветвей закона дисперсии, а также деформации пиков полос поглощения. На положение частот новых квазиуровней двухфотонные процессы не влияют. До включения накачки в области М-полосы поглощение имеет лоренцевскую форму.

При определенных условиях, связанных с вырождением экситонного состояния, экспериментатор может наблюдать сместившийся уширенный лоренциан, описывающий поглощение, с амплитудой, определяемой интенсивностью излучения, действующего в области М-полосы. Стоит отметить, что двухфотонное взаимодействие, не меняя положение квазиуровней, существенно увеличивает поглощение. Даже при очень слабом влиянии двухфотонного взаимодействия с биэкситонами возможно подобрать интенсивность мощного импульса накачки, при которой будет наблюдаться пересечение ветвей закона дисперсии и один смещенный пик полосы поглощения. Также в работе изучено влияние разности фаз  $\theta$  констант взаимодействий на закон дисперсии и восприимчивость среды. Проведение эксперимента по изучению влияния двухфотонных процессов и определению области спектра, где проявляется их влияние, как раз и позволит определить значение данного параметра для различных сред.

В заключение оценим интенсивности возбуждения и величину расщепления. В кристаллах типа CuCl для наблюдения двухфотонного взаимодействия с биэкситонами, согласно [18,19], требуются мощности порядка  $100 \text{ kW/cm}^2$ . Как следует из [18], константу двухфотонного взаимодействия можно определить из выражения ( $|\mu|E_c = |g|$ ), характерное поле  $E_c$  определяется выражением  $E_c^2/8\pi = \hbar\Omega_0 N_c/2$ , где  $\Omega_0$  — собственная частота биэкситонного состояния. Для кристаллов типа CuCl и CdS вероятности двухфотонного возбуждения биэкситонов и однофотонного возбуждения экситонов из основного состояния равны при плотности фотонов  $N_c \approx 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ . Мы считаем, что как раз при соблюдении этих условий возможно наблюдать пересечение ветвей закона дисперсии.

Согласно [6], в квантовых точках InGaAs интенсивность накачки, при которой наблюдается расщепление, составляет  $18 \text{ kW/cm}^2$ , при этом величина расщепления равна  $94 \mu\text{eV}$ . При увеличении интенсивности до  $50 \text{ kW/cm}^2$  величина расщепления увеличивается до  $150 \mu\text{eV}$ . Так как величина расщепления не зависит от интенсивности импульса, действующего в области экситонного перехода, то он может быть произвольным, но достаточным для обеспечения необходимой концентрации экситонов, и его интенсивность может изменяться в диапазоне  $2\text{--}5 \text{ kW/cm}^2$ .

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Пекар С.И. Кристаллооптика и добавочные световые волны. Киев: Нукова думка, 1982.
- [2] Moskaleiko S.A., Snoko D.W. Bose–Einstein Condensation of Excitons and Biexcitons and Coherent Nonlinear Optics with Excitons. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [3] Savvidis P.G., Baumberg J.J., Stevenson R.M., Skolnick M.S., Whittaker D.M., Roberts J.S. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 1547.
- [4] Baumberg J.J., Savvidis P.G., Stevenson R.M., Tartakovskii A.I., Skolnick M.S., Whittaker D.M., Roberts J.S. // Phys. Rev. B 2000. V. 62. P. R16247.
- [5] Хаджу П.И., Москаленко С.А., Белкин С.Н. // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. С. 223.
- [6] Kamada H., Gotoh H., Temmyo J., Takagahara T., Ando H. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 246.
- [7] Dynes J.F., Frogley M.D., Beck M., Faist J., Phillips C.C. // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 157403.
- [8] Хаджу П.И., Надькин Л.Ю. // ФТТ. 2005. Т. 47. С. 2146.
- [9] Muller A., Fang W., Lawall J., Solomon G.S. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 027401.
- [10] Majumdar A., Papageorge A., Kim E.D., Bajcsy M., Kim H., Petroff P., Vuckovich E. // Phys. Rev. B. 2011. V. 84. P. 085310.
- [11] Gall C.Le., Brunetti A., Boukari H., Besombes L. // Phys. Rev. Lett. 2011. V. 107. P. 057401.
- [12] Chen D., Lander G.R., Solomon G.S., Flagg E.B. // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 118. P. 037401.
- [13] Lafuente-Sampietro A., Utsumi H., Boukari H., Kuroda S., Besombes L. // Phys. Rev. B. 2017. V. 95. P. 035303.
- [14] Bryant G.W., Malkova N., Sims J. // Phys. Rev. B. 2013. V. 88. P. 161301(R).
- [15] Bounouar S., Strauß M., Carmele A., Schnauber P., Thoma A., Gschrey M., Schulze J., Strittmatter A., Rodt S., Knorr A., Reitzenstein S. // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 118. P. 233601.
- [16] Хаджу П.И., Надькин Л.Ю., Марков Д.А. // ФТТ. 2018. Т. 60. С. 660.
- [17] Хаджу П.И., Коровой О.В., Надькин Л.Ю. // ЖЭТФ. 2019. Т. 155. С. 620.
- [18] Hanamura E. // Sol. State Commun. 1973. V. 12. N 9. P. 951–953.
- [19] Gale G.M., Mysyrowicz A. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. N 17. P. 727.
- [20] Rashba E.I. // Springer Tracts in Modern Physics. NY., 1975. P. 150.
- [21] Хаджу П.И. Нелинейные оптические процессы в системе экситонов и биэкситонов в полупроводниках. Кишинев: Штиинца, 1985.