

08,12,18

Zitterbewegung электронов и высокочастотная проводимость однослойного графена при низких температурах

© Н.Е. Фирсова, С.А. Ктиторов

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ktitorov@mail.ioffe.ru

Поступила в Редакцию 10 июля 2020 г.

В окончательной редакции 2 октября 2020 г.

Принята к публикации 4 октября 2020 г.

Рассмотрено Zitterbewegung (дрожательное движение) дираковских электронов в однослойном графене как нерелятивистский аналог явления, предсказанного Э. Шредингером для релятивистских электронов в свободном пространстве. Показано, что дираковские электроны монослойного графена испытывают быстрые флуктуации положения вокруг среднего значения с довольно высокой частотой, но значительно меньшей, чем у релятивистских электронов в свободном пространстве. Изучена связь между Zitterbewegung волнового пакета электронов проводимости, образованного распределением Ферми–Дирака, и низкотемпературной высокочастотной комплексной проводимостью монослойного графена. Показано, что при низких температурах электромагнитные резонансные свойства монослойного графена выше порога можно моделировать с помощью набора эквивалентных электрических колебательных контуров („осцилляторов“) так, что всегда находится такой, который резонирует и порождает активную проводимость. Это полезно для того, чтобы придать наглядность электромагнитным процессам, что особенно важно для включения графена в микро- и наноэлектронные системы. В частности, полученные результаты могут быть полезны при разработке вопроса о создании графеновой наноантенны.

Ключевые слова: уравнение Дирака, Zitterbewegung колебательное движение, колебательный контур.

DOI: 10.21883/FTT.2021.02.50478.148

1. Введение

Уникальные особенности электронных состояний в графене неизменно привлекают внимание исследователей. Помимо таких выдающихся свойств, как колоссальная электронная подвижность и гигантская теплопроводность, интересно исследовать эффекты квантовой электродинамики, основанные на математическом сходстве релятивистских состояний в физике высоких энергий и физике твердого тела.

Одним из таких эффектов является интригующий Zitterbewegung (ZB) электронов Дирака. ZB — быстрое колебательное (дрожательное) движение релятивистских элементарных частиц, в частности, электронов, которые подчиняются уравнению Дирака. Явление ZB было впервые предсказано Эрвином Шредингером в 1930 году [1] в результате его анализа волновых пакетов решений уравнения Дирака для электронов в свободном пространстве. Он пришел к выводу, что интерференция между положительно частотными и отрицательно частотными состояниями вызывает флуктуации положения электрона относительно среднего значения с частотой $2mc^2/\hbar$, где m — масса электрона, c — скорость света, \hbar — постоянная Планка. Это Zitterbewegung (дрожательное движение) релятивистских электронов в свободном пространстве получено в [1] из анализа уравнения Гейзенберга. Оператор скорости определяет-

ся коммутатором

$$\frac{d\hat{x}_j}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{x}_j] = -\frac{c}{\hbar} [\gamma_0\gamma_j\hat{p}_j, \hat{x}_j] = ic\gamma_0\gamma_j = \hat{v}_j. \quad (1)$$

Уравнение Гейзенберга для эволюции оператора скорости гласит:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{v}_j}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{v}_j] = \frac{i}{\hbar} (-2\hat{H}\hat{v}_j + \{\hat{H}, \hat{v}_j\}) \\ &= \frac{i}{\hbar} (-2\hat{H}\hat{v}_j + 2c^2p_j). \end{aligned} \quad (2)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\hat{v}_j(t) = c^2\hat{p}_j/E + (\hat{v}_j(0) - c^2\hat{p}_j/E)e^{-i2Et/\hbar}, \quad (3)$$

где $E = \pm\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ — энергия релятивистского электрона. Отсюда оценка для минимальной частоты ZB: $2mc^2/\hbar \approx 1.8 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1}$. ZB свободной релятивистской частицы никогда не наблюдалось из-за огромной частоты дрожания.

Обсуждение явления ZB в монослое графена было начато в [2]. Там было показано, что аналогично случаю релятивистских электронов в свободном пространстве, ZB в графене связано с неопределенностью координат частиц из-за неизбежного образования электронно-дырочных пар. Дальнейшее развитие эти идеи получили в ряде работ, например [3–6], для разнообразных

физических систем (однослойный и двуслойный графен, нанотрубки и т.п.). В работах [3,4] представлены результаты исследования колебаний тока в этих системах. В работе [5] авторы рассматривают Zitterbewegung с помощью методов квантовой теории поля. В работе [6] аналогичное явление рассмотрено в модели Рашбы–Дрессельхауза. Связь между Zitterbewegung и киральной аномалией Адлера–Белла–Джекива обсуждается в работе [7].

В настоящей работе продолжено изучение ZB в однослойном графене. Здесь рассматривается связь ZB с высокочастотной проводимостью при низкой температуре.

В работе [8] было показано, что низкочастотный предел $\omega/(2k_F v_F) \ll 1$ (то есть вблизи точки Дирака, ниже порога) чисто реактивной на этих частотах проводимости графена можно моделировать с помощью параллельного резонансного контура и получены формулы для его индуктивности и емкости. В настоящей работе демонстрируется более сложная эквивалентная схема, имеющая место в противоположном пределе $\omega/(2k_F v_F) \geq 1$, т.е. выше порога. Для этого мы используем формулу для низкотемпературной высокочастотной комплексной проводимости монослоя графена, полученную в [9,10]:

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2}{4\hbar} \theta(\hbar\omega - 2E_F) + \frac{e^2}{\hbar} \frac{E_F}{\hbar} \delta(\omega) + i \frac{1}{\pi} \frac{e^2}{\hbar} \left[\frac{E_F}{\hbar\omega} + \frac{1}{4} \log \left| \frac{2E_F - \hbar\omega}{2E_F + \hbar\omega} \right| \right], \quad (4)$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Эта формула не учитывает рассеяния, т.е. справедлива при $\omega\tau \gg 1$, где τ^{-1} — частота столкновений. Приняв для оценки $\tau \sim 10^{-12}$ с, мы приходим к выводу, что формула (4) справедлива для частот лежащих в терагерцевом диапазоне и выше.

Нетрудно убедиться, что фигурирующие в формуле (4) действительная и мнимая части проводимости удовлетворяют дисперсионным соотношениям Крамера–Кронига [11]:

$$\text{Re } \sigma(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} ds \frac{s \text{Im } \sigma(s)}{s^2 - \omega^2}, \quad (5)$$

$$\text{Im } \sigma(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} ds \frac{s \text{Re } \sigma(s)}{s^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

В работе [8] было предложено моделирование низкотемпературной реактивной высокочастотной проводимости монослойного графена вблизи точки Дирака с использованием электрической эквивалентной схемы. Точнее говоря, было показано, что для низких частот, лежащих в терагерцевом диапазоне, т.е. когда

$$\omega/(2k_F v_F) \ll 1, \quad (7)$$

формула для проводимости может быть переписана в следующем виде:

$$\sigma(\omega) \approx (i\omega L(k_F))^{-1} + i\omega C(k_F), \quad (8)$$

где

$$L(k) = \frac{\hbar}{e^2} \frac{1}{2v_F k}, \quad C(k) = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{2v_F k}, \quad (9)$$

а k_F и v_F — фермиевские волновой вектор и скорость, соответственно. В частности,

$$L(k_F) = \frac{\hbar}{e^2} \frac{1}{2v_F k_F}, \quad (10)$$

$$C(k_F) = \frac{e^2}{\hbar} \frac{1}{2v_F k_F}. \quad (11)$$

Необходимо отметить, что аналогичные выражения для индуктивности и емкости были получены из физических соображений в [12] (индуктивность) и в [13] (емкость, кроме числового коэффициента $8/\pi$). Таким образом, в [8] были найдены формулы (10), (11) для индуктивности и емкости монослойного графена. Заметим, что в отличие от [12,13] вывод, сделанный в [8], основан на едином подходе. Для получения этого результата (8) необходимо было записать мнимую часть (4) в виде

$$\text{Im } \sigma(\omega) = i\sigma_0 \left[\frac{k_F v_F}{\omega} + \frac{1}{4} \log \left| \frac{1 - \frac{\omega}{2k_F v_F}}{1 + \frac{\omega}{2k_F v_F}} \right| \right], \quad \sigma_0 = 2e^2/\hbar. \quad (12)$$

Таким образом, проводимость графена моделировалась в [8] в низкочастотном пределе (7) вблизи точки Дирака с помощью эквивалентного параллельного колебательного контура с индуктивностью $L(k_F)$ и емкостью $C(k_F)$. Описанная эквивалентная схема с параллельным колебательным контуром с индуктивностью (10) и емкостью (11) работает для частот, больших, чем $\tau^{-1} \sim 10^{-12}$ с⁻¹, т.е. несколько ТГц, и когда $\omega \ll \omega_{ZB}(k_F) = 2k_F v_F = 2\sqrt{2\pi(N/S)} v_F$. Принимая типичную величину $n = N/S = 10^{11}$ см⁻² для двумерной плотности электронного газа, получаем оценку $\omega_{ZB}(k_F) \sim 15$ ТГц.

Отметим, что в [12] было высказано предположение, что электроны в графене должны иметь ненулевую массу при коллективном возбуждении. Используя это понятие, были рассмотрены инерционное ускорение коллективной массы электрона и фазовая задержка результирующего тока. На основе этой модели была введена, рассчитана и измерена так называемая кинетическая индуктивность, представляющая сопротивление коллективной массы ускорению. Найденное в [12] выражение для индуктивности для образца единичной ширины совпадает с полученной в [8] формулой (10) (для образца единичной ширины). Анализируя эту формулу для индуктивности, мы видим, что $L \sim n^{-1/2}$. Именно такая зависимость наблюдалась в эксперименте [12].

Формула для квантовой емкости, основанная на двумерной модели газа свободных электронов, была предложена в [13]. Полученное там выражение для емкости совпадает с найденным в [8] выражением (11), применяемым к образцу единичной площади с точностью до численного множителя $8/\pi$, т.е.

$$c = Cn = \sqrt{\pi n} e^2 / (4\hbar v_F).$$

2. Zitterbewegung электронов в однослойном графене

Рассмотрим ZB в однослойном графене с помощью эволюционного уравнения Гайзенберга:

$$d\hat{V}/dt = (i/\hbar)[\hat{H}_0, \hat{V}]. \quad (13)$$

Здесь \hat{H}_0 — дираковский гамильтониан электронов валентной зоны и зоны проводимости однослойного графена:

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(\mathbf{k}) &= \hbar v_F \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \hbar v_F (k_1 \hat{\sigma}_1 + k_2 \hat{\sigma}_2) \\ &= \hbar v_F k \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{k} &= (k_1, k_2), \quad k_1 = k \cos \varphi, \quad k_2 = k \sin \varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

Формальное решение уравнения (13) имеет вид:

$$\hat{V}(t) = e^{(i/\hbar)\hat{H}_0 t} \hat{V}(0) e^{-(i/\hbar)\hat{H}_0 t}, \quad (16)$$

причем

$$\hat{V}(0) = v_F \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & v_F \\ v_F & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

в то время как

$$\hat{H}_0 = \hbar v_F k \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} = \hbar v_F k \hat{U}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{U}. \quad (18)$$

Унитарный оператор \hat{U} — определен соотношениями [8]:

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 1 \\ 1 & -e^{-i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \hat{U}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 1 \\ 1 & -e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

а оператор эволюции имеет вид

$$e^{\pm(i/\hbar)\hat{H}_0 t} = \hat{U}^{-1} \begin{pmatrix} e^{\pm i v_F k t} & 0 \\ 0 & e^{\mp i v_F k t} \end{pmatrix} \hat{U}. \quad (20)$$

В результате гайзенберговский оператор скорости принимает вид:

$$\hat{V}(t) = v_F \hat{U}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -i \sin \varphi e^{i\varphi + 2i v_F k t} \\ i \sin \varphi e^{-i\varphi - 2i v_F k t} & -\cos \varphi \end{pmatrix} \hat{U}. \quad (21)$$

Таким образом мы видим, что электрон с энергией $E = \hbar k v_F$ осциллирует с частотой

$$\omega_{ZB}(k) = 2v_F k. \quad (22)$$

Заметим, что унитарный оператор U , используемый в работе [2] отличается от аналогичного оператора, используемого в настоящей работе и в работе [8].

3. Эквивалентная схема для высокочастотной проводимости однослойного графена при низких температурах выше порога и Zitterbewegung

Рассмотрим теперь проблему моделирования в случае больших частот $\omega \geq 2v_F k_F = \omega_{ZB}(k_F)$, т.е. выше порога. Заметим, что

$$\log \left| \frac{k_F - \frac{\omega}{2v_F}}{k_F + \frac{\omega}{2v_F}} \right| = \frac{\omega}{v_F} \int_{k_F}^{\infty} \frac{dk}{\left(\frac{\omega}{2v_F}\right)^2 - k^2}. \quad (23)$$

Разложение формулы (23) по степеням $\frac{\omega}{2k_F v_F}$ порождает следующий ряд [14]:

$$\begin{aligned} \log \frac{1 - \frac{\omega}{2k_F v_F}}{1 + \frac{\omega}{2k_F v_F}} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{\omega}{2k_F v_F} \right)^{2n-1} \\ &\text{for } \left(\frac{\omega}{2k_F v_F} \right)^2 < 1, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \log \frac{1 - \frac{\omega}{2k_F v_F}}{1 + \frac{\omega}{2k_F v_F}} &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{\omega}{2k_F v_F} \right)^{-2n+1} \\ &\text{for } \left(\frac{\omega}{2k_F v_F} \right)^2 > 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Из формулы (12), используя (23), мы получаем

$$\begin{aligned} \text{Im } \sigma(\omega) &= -\frac{1}{i\omega L(k_F)} - \frac{e^2}{h} \frac{\omega}{2v_F} \int_{k_F}^{\infty} \frac{dk}{k^2 - \left(\frac{\omega}{2v_F}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{i\omega L(k_F)} - \int_{k_F}^{\infty} \sigma_*(k, \omega) \frac{dk}{k}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\sigma_*(k, \omega) = \frac{i \left(\frac{\omega}{\omega_{ZB}(k)} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ZB}(k)} \right)^2} \sqrt{\frac{C(k)}{L(k)}} \quad (27)$$

и $\omega_{ZB}(k) = 2v_F k$ (см. (22)). Поскольку (см. (9))

$$(C(k)/L(k))^{1/2} = e^2/h, \quad (28)$$

мы получаем

$$\sigma_*(k, \omega) = \frac{e^2}{h} \frac{i \left(\frac{\omega}{\omega_{ZB}(k)} \right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{ZB}(k)} \right)^2}. \quad (29)$$

Проанализируем формулу для мнимой части проводимости (26). С этой целью мы рассмотрим последовательный колебательный контур с индуктивностью $L(k)$ и емкостью $C(k)$. Обозначив его проводимость как

$$\tilde{\sigma}(k, \omega) = (i\omega L(k) + 1/(i\omega C(k)))^{-1}, \quad (30)$$

получим

$$\tilde{\sigma}(k, \omega) = \frac{i\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ZB}}(k)}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ZB}}(k)}\right)^2} \sqrt{\frac{C(k)}{L(k)}} = \frac{e^2}{h} \frac{i\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ZB}}(k)}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ZB}}(k)}\right)^2}. \quad (31)$$

Заметим, что резонансная частота последовательного колебательного контура равна $\omega_{\text{ZB}}(k) = 2v_{\text{F}}k$. Таким образом мы можем написать (см. (29)):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(k, \omega) &= \sigma_*(k, \omega) = \frac{i\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ZB}}(k)}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ZB}}(k)}\right)^2} \sqrt{\frac{C(k)}{L(k)}} \\ &= \frac{e^2}{h} \frac{i\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ZB}}(k)}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{ZB}}(k)}\right)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Следовательно (см. (26))

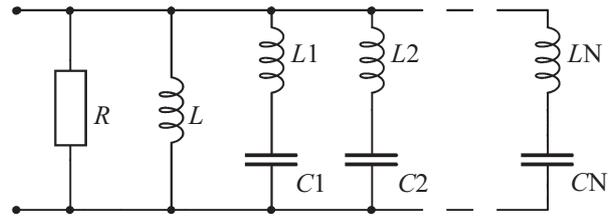
$$\begin{aligned} \text{Im} \sigma(\omega) &= -\frac{1}{i\omega L(k_{\text{F}})} - \frac{e^2}{h} \frac{\omega}{2v_{\text{F}}} \int_{k_{\text{F}}}^{\infty} \frac{dk}{k^2 - \left(\frac{\omega}{2v_{\text{F}}}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{i\omega L(k_{\text{F}})} - \int_{k_{\text{F}}}^{\infty} \tilde{\sigma}(k, \omega) \frac{dk}{k}, \end{aligned} \quad (33)$$

Формула (33) допускает прозрачную физическую картину: первый член представляет собой индуктивное реактивное сопротивление, второй член представляет параллельно соединенное с этой индуктивностью множество параллельно соединенных между собой последовательных колебательных контуров $C(k), L(k)$ с волновым числом k . Таким образом, мы имеем бесконечную цепь, состоящую из параллельно соединенных индуктивности $L(k_{\text{F}})$ и континуального множества последовательных колебательных контуров с индуктивностью $L(k)$ и емкостью $C(k)$. Если $\omega \geq 2v_{\text{F}}k_{\text{F}}$, т.е. выше порога, тогда определено существует в этой цепи последовательный колебательный контур с резонансной частотой $\omega_{\text{ZB}}(k)$, совпадающей с ω . В результате этого резонанса реактивное сопротивление исчезает. Значение активного удельного сопротивления дается формулой (4): $R = \frac{4\hbar}{e^2}$. Таким образом, природа этого активного сопротивления, появляющегося выше порога, есть ZB. Отметим, что подынтегральное выражение в (33) содержит плотность осцилляторов $L(k), C(k)$, равную $1/k$:

$$2 \frac{dk}{k} = \frac{2\pi k dk}{\pi k^2}, \quad (34)$$

то есть отношение площади кольца между окружностями с радиусами k и $k + dk$ к площади круга радиуса k .

Для большей наглядности мы можем заменить интеграл соответствующей интегральной суммой с суммированием по дискретным значениям волнового вектора $k_n = 2\pi n/B$, где B — линейный размер образца. Эту бесконечную сумму можно укоротить, введя волновой



Эквивалентная схема для конечного образца.

вектор обрезания, так как плотность осцилляторов при больших k убывает как $1/k$. Таким образом, мы приходим к эквивалентной схеме, включающей конечное число элементов, представленной на рисунке.

Отметим, что нижнее возможное значение предсказанной Шредингером частоты ZB $(2mc^2)\hbar \approx 1.8 \cdot 10^{21} \text{ s}^{-1}$ в 10^8 раз больше, чем оцененное выше минимальное значение ω_{ZB} в графене. Это обещает возможность использовать графен в качестве модели некоторых процессов квантовой электродинамики.

4. Заключение

Мы изучили Zitterbewegung дираковских электронов в монослойном графене, которое оказалось нерелятивистским аналогом соответствующего явления, предсказанного Э. Шредингером для релятивистских электронов в свободном пространстве. Показано, что дираковские электроны монослойного графена осциллируют, т.е. имеют место высокочастотные флуктуации мгновенного положения электрона относительно среднего значения. Частота ZB оказалась в 10^8 раз ниже, чем в свободном пространстве.

Установлена связь между ZB волнового пакета электронов проводимости, сформированного распределением Ферми–Дирака и высокочастотной комплексной проводимостью монослойного графена при низкой температуре.

Показано, что проанализированная формула для высокочастотной комплексной проводимости графена при низкой температуре выше порога $k \geq k_{\text{F}}$ допускает прозрачную физическую интерпретацию. Точнее говоря, активное сопротивление (вещественная часть) постоянно и равно $R = 16 k\Omega$, а реактивная часть проводимости (мнимая часть) состоит из двух слагаемых: первое слагаемое — это индуктивная проводимость, второе слагаемое представляет присоединенное параллельно к этой индуктивности множество последовательных колебательных контуров. относительный вклад которых определяется весовой функцией (34), то есть отношением площади кольца между окружностями с радиусами k и $k + dk$ к площади круга радиуса k .

Таким образом, высокочастотное поведение реактивной части низкотемпературной проводимости выше порога определяется эквивалентной схемой, состоящей из

индуктивности $L(k_F)$ и бесконечного континуального множества параллельно соединенных последовательных контуров с индуктивностью $L(k)$ и емкостью $C(k)$, параметризованными элементами континуального множества волновых чисел.

Если $\omega \geq 2\nu_F k_F$, т.е. выше порога ($2\nu_F k_F$ равен примерно 15 THz), то, как мы показали в настоящей работе, определенно существует хотя бы один последовательный колебательный контур $L(k), C(k)$ с резонансной частотой $\omega_{ZB}(k) = 2\nu_F k$, совпадающей с ω . В результате этого резонанса в монослойном графене при $k \geq k_F$ появляется активное сопротивление R . Таким образом, природа активного сопротивления монослоя графена тесно связана с ZB. Для конечных образцов эквивалентная схема представлена на рисунке.

Отметим для сравнения, что вблизи точки Дирака, т.е. для частот, лежащих в диапазоне $\tau^{-1} \ll \omega \ll 2k_F \nu_F$, (т.е. для частот больше, чем несколько THz и менее чем около 15 THz), как было показано в [8], эквивалентная схема для чисто мнимой в этом диапазоне частот проводимости сводится к единственному параллельному колебательному контуру с индуктивностью $L(k_F)$ и емкостью $C(k_F)$ (см. (10), (11)). Отметим, что этот диапазон частот очень интересен для практики.

Таким образом, мы обнаружили, что электромагнитные резонансные свойства монослойного графена выше порога можно моделировать с помощью набора эквивалентных последовательных колебательных контуров, что может быть полезным при создании электронных систем, включающих элементы на базе графена. В частности, результаты, полученные для частот ниже порога в [8] и в настоящей работе могут быть востребованы при разработке графеновой наноантенны.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

- [1] E. Schrödinger. Sitz. Press. Akad. Wiss. Phys.-Math. **24**, 418 (1930).
- [2] M.I. Katsnelson. Eur. Phys. J. B **51**, 157 (2006).
- [3] W. Zawadzki, T.M. Rusin. J. Phys. Condens. Matter **23**, 143201 (2011).
- [4] T.M. Rusin, W. Zawadzki. Phys. Rev. B **78**, 125419 (2008).
- [5] Zhi-Yong Wang, Cai-Dong Xiong. Phys. Rev. A **77**, 045402 (2008).
- [6] С.А. Тарасенко, А.В. Пошакинский, Е.Л. Ивченко, И. Степанов, М. Эрсфельд, М. Лепса, Б. Бешотен. Письма в ЖЭТФ **108**, 5, 348 (2018).
- [7] S. Arunagir. arxiv.org/abs/0911.0975v3.
- [8] N.E. Firsova. Photon. Nanostruct. — Fundament. Appl. **26**, 8 (2017).
- [9] V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte. Phys. Rev. B **75**, 65407 (2007).
- [10] Л.А. Фальковский. УФН **178**, 923 (2008).

- [11] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1962). Гл. 9. С. 389.
- [12] Y. Hosang, C. Forsythe, L. Wang, N. Tombros, K. Watanabe. Nature Nanotechnol. **9**, 594 (2014).
- [13] T. Fang, A. Konar, H.L. Xing, D. Jena. Appl. Phys. Lett. **91**, 092109-1 (2007).
- [14] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М. (1963).

Редактор Т.Н. Василевская