

## Квазистационарное приближение в задаче возбуждения низкочастотных электромагнитных полей в литосфере

© Е.Д. Терещенко,<sup>1</sup> П.Е. Терещенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Полярный геофизический институт,  
183010 Мурманск, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский филиал ИЗМИРАН им. Н.В. Пушкова,  
199034 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: tereshchenko@gmail.com

Поступило в Редакцию 3 апреля 2020 г.

В окончательной редакции 13 мая 2020 г.

Принято к публикации 26 мая 2020 г.

Рассмотрено возбуждение горизонтальной заземленной антенной электромагнитного поля СНЧ-КНЧ и более низкого частотного диапазона в двуслойной среде. Получены приближенные аналитические формулы, достаточно полно описывающие поведение полей в низкочастотном диапазоне. Проанализирована точность использования квазистационарного приближения. Оценена возможность замены фактического поверхностного импеданса на импеданс плоской волны, нормально падающей на границу раздела. Для ряда экспериментов, проведенных на Кольском полуострове в рамках международного сотрудничества (FENICS-2014, FENICS-2019), определены частотные границы применимости приближенного подхода в оценке проводимости Земли.

**Ключевые слова:** КНЧ, распространение радиоволн; импеданс; электромагнитное поле; проводимость.

DOI: 10.21883/JTF.2021.01.50277.119-20

### Введение

Введенное в работе [1] при вычислении электромагнитного поля у плоской границы раздела квазистационарное приближение в последующем широко использовалось в работах по электромагнитному зондированию Земли [2,3]. В его рамках сравнительно простые выражения, описывающие возбуждение низкочастотного электромагнитного поля, позволили связать поверхностный импеданс с импедансом плоской электромагнитной волны, а соответственно с проводимостью среды, что открыло возможность широкого применения низкочастотных полей как естественного [4], так и искусственного происхождения [3,5] для глубинного зондирования структуры Земли.

Необходимым условием равенства двух упомянутых выше импедансов в квазистационарном приближении является размещение точки приема от источника на расстоянии в несколько скин-слоев для подстилающей среды. Это требование обратно ограничению, накладываемому квазистационарным приближением, для которого, наоборот, желательно, чтобы точка измерения находилась ближе к источнику. В частности, отметим, что при проводимости  $5 \cdot 10^{-5}$  S/m и частоте 2 Hz толщина скин-слоя равна 50 km. В настоящей работе определим область, в которой имеется компромисс между этими требованиями и, соответственно, возможность использования импеданса плоской волны для определения проводимости Земли.

### 1. Аналитическое приближение для полей линейного источника

Рассмотрим простую модель, отражающую основные особенности рассматриваемой задачи. Считаем, что поле в двуслойной среде возбуждается питаемой током с гармонической зависимостью  $\exp(-i\omega t)$  горизонтальной заземленной линейной антенной. Центр декартовых координат помещаем в середину антенны, ось  $z$  направляем вверх, ось  $x$  — вдоль антенны, а ось  $y$  — поперек антенны. Расстояние на плоскости  $(x, y, 0)$  от центра антенны обозначим  $\rho$ , а  $\rho_n$  — расстояние от произвольной точки антенны. Среду в области  $z > 0$  предполагаем практически непроводящей ( $\sigma = +0$ , где наличие „+“ у нуля указывает на небольшое поглощение) с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0 \simeq 10^{-9}/(36\pi)$  F/m и магнитной проницаемостью  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m. При этом область  $z < 0$  имеет электромагнитные параметры  $\epsilon$ ,  $\mu_0$ ,  $\sigma_1$ .

Для определения компонент электромагнитного поля, возбуждаемого сторонним током  $J$ , как показано в [6], необходимо решить уравнение Гельмгольца для электрического вектора потенциала с соответствующими граничными условиями. Учитывая, что тангенциальные составляющие поля являются непрерывными функциями на границе  $z = 0$ , воспользуемся результатами, приведенными в [6] для поля ниже границы раздела. Чтобы не загромождать дальнейший анализ, будем рассматривать две составляющие поля:  $E_y$  и  $H_x$ . В соответствии с [6], для точечного горизонтального заземленного диполя,

расположенного в центре координат, имеем

$$E_y^{(1)}(\rho, z) = -\frac{J\Delta x}{2\pi} i\omega\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \frac{\exp(v_1 z)}{\kappa_0^2 v_1 + \kappa_1^2 v_0} J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda, \quad (1)$$

где  $J$  — ток,  $J\Delta x$  — дипольный момент,  $\Delta x$  — длина диполя, стремящаяся к бесконечно малой величине  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\kappa_j = -ik_j$ ,  $j = 0, 1$  указывает на среду,  $k_0 \simeq \omega/c$ ,  $k_1 = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0 + i\sigma_1/(\omega\varepsilon_0)}$ ,  $v_j = \sqrt{\kappa_j^2 + \lambda^2}$ . При этом ветвь квадратного корня фиксирована, исходя из условия  $\text{Re } v_j > 0$ .  $J_0(\lambda\rho)$  — функция Бесселя нулевого индекса.

Переход к полям, возбуждаемым линейной антенной длиной  $2L$ , осуществляется суммированием полей диполей, расположенных по длине антенны. В частности отметим, что составляющая  $\varepsilon_y$  электрического поля, возбуждаемая линейной антенной, будет равна

$$\varepsilon_y = \sum E_y^{(j)}(\rho_\eta, z) = \int_{-L}^L E_y^{(j)}(\rho_\eta, z) |_{J\delta x \rightarrow J} d\eta. \quad (2)$$

Следовательно, основные закономерности в изменении  $E_y^{(j)}(\rho, z)$  будут отражаться и в поле, возбуждаемом линейной антенной. Поэтому в дальнейшем удобно провести исследование, связанное с элементарным излучателем.

Магнитная составляющая поля  $H_x^{(1)}(\rho, z)$  описывается выражением

$$H_x^{(1)}(\rho, z) = -\frac{J\Delta x}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \frac{(\kappa_0^2 - \kappa_1^2) \exp(v_1 z)}{(v_0 + v_1)(\kappa_0^2 v_1 + \kappa_1^2 v_0)} \times J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda. \quad (3)$$

Преобразуем формулы (1) и (3), выполнив дифференцирование по  $y$  и введя новые безразмерные параметры  $\tau_0 = \rho\kappa_0$ ,  $\tau_1 = \rho\kappa_1$  и безразмерную переменную интегрирования  $s = \lambda\rho$ . В результате получим

$$E_y^{(1)}(\rho, z) = -\frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_1} z_g \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\rho^3} F_E(\rho, z), \quad (4)$$

$$H_x^{(1)}(\rho, z) = -\frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\rho^3} F_H(\rho, z). \quad (5)$$

Здесь

$$F_E(\rho, z) = r_1^2 \int_0^\infty \frac{\exp\left(\sqrt{s^2 + r_1^2} z / \rho\right)}{r_0^2 \sqrt{s^2 + r_1^2} + r_1^2 \sqrt{s^2 + r_0^2}} J_1(s) s^2 ds, \quad (6)$$

$$F_H(\rho, z) = r_1(r_1^2 - r_0^2)$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\exp\left(\sqrt{s^2 + r_1^2} z / \rho\right)}{\left(\sqrt{s^2 + r_1^2} + \sqrt{s^2 + r_0^2}\right) \left(r_0^2 \sqrt{s^2 + r_1^2} + r_1^2 \sqrt{s^2 + r_0^2}\right)} \times J_1(s) s^2 ds, \quad (7)$$

$J_1(s)$  — функция Бесселя с индексом, равным единице,

$$z_g = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} / \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + i \frac{\sigma_1}{\omega\varepsilon_0}}$$

— импеданс плоской монохроматической волны, нормально падающей на границу раздела [7].

Рассмотрим значения относительной диэлектрической проницаемости и проводимости для некоторых сред. Так, для морской воды ориентировочно  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 80$ , а проводимость  $\sigma = 1$  S/m, для сухой почвы —  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 \sim 10$ , а  $\sigma = 10^{-3}$  S/m, для мерзлотной почвы  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 \sim 5$ , а  $\sigma = 10^{-4}$  S/m. В ряде работ [4,5] отмечена очень низкая проводимость  $\sim 5 \cdot 10^{-5}$  S/m Мурманского блока на Кольском полуострове. В свете этого оценим величину  $\sigma_1/(\omega\varepsilon_0) \simeq (\sigma/f) \cdot 1.8 \cdot 10^{10}$ . Подставляя минимальное значение проводимости  $5 \cdot 10^{-5}$ , видим, что вплоть до частоты  $f = 100$  kHz эта величина будет значительно больше единицы. Поэтому для низкочастотного диапазона в выражении для волнового числа  $k_1$  можно пренебречь вкладом относительной диэлектрической проницаемости на фоне слагаемого, содержащего проводимость, и считать, что

$$k_1 \simeq k_0 \exp(i\pi/4) \sqrt{\sigma_1/(\omega\varepsilon_0)},$$

и соответственно

$$z_g = \sqrt{-i(\omega\mu_0/\sigma_1)}.$$

Формулы (4), (5) позволяют найти поверхностный импеданс на границе раздела  $z = 0$  поля, возбуждаемого для антенны длиной  $2L$ :

$$z_{yx} = \frac{\varepsilon_y^{(0)}}{\mathcal{H}_x^{(0)}} \Big|_{z=0},$$

в которой  $\mathcal{H}_x^{(0)}$  — магнитное поле, возбуждаемое линейной антенной. Вычисление  $\mathcal{H}_x^{(0)}$  аналогично определению  $\varepsilon_y^{(j)}$  по формуле (2).

Тангенциальные составляющие электромагнитного поля непрерывны на границе раздела, поэтому вместо поля в верхней среде в определение импеданса можно подставить горизонтальные составляющие поля в нижней среде и воспользоваться формулами (4), (5) для нахождения импеданса

$$z_{yx} = z_g \frac{[\rho_L^{-3} F_E(\rho_L, 0) - \rho_{-L}^{-3} F_E(\rho_{-L}, 0)]}{[\rho_L^{-3} F_H(\rho_L, 0) - \rho_{-L}^{-3} F_H(\rho_{-L}, 0)]}, \quad (8)$$

где  $\rho_{\pm L}$  — расстояние до точки наблюдения от концов линейной антенны,

$$F_E(\rho, 0) = F_E(\rho, z)|_{z \rightarrow 0}, \quad F_H(\rho, 0) = F_H(\rho, z)|_{z \rightarrow 0}.$$

Из (8) следует, что при  $F_E(\rho, 0) = F_H(\rho, 0)$  импеданс  $z_{yx}$  будет равен импедансу плоской волны  $z_g$ .

Для того чтобы определить условия, необходимые для близости функций, рассмотрим их изменение как

функций  $r_0$ . Начнем с квазистационарного приближения. Для него, согласно [1], полагают  $|\kappa_0| = 0$ ,  $|\kappa_1| \neq 0$  или, в наших представлениях,  $|r_0| = 0$  при ненулевом значении  $|r_1|$ . Тогда из (4), (5) следует, что

$$\Phi_E \equiv F_E(\rho, 0)|_{|r_0|=0} = \int_0^\infty \exp(\sqrt{s^2 + r_1^2} z / \rho) J_1(s) s ds \Big|_{z \rightarrow -0},$$

$$\Phi_H \equiv F_H(\rho, 0)|_{|r_0|=0} = r_1 \int_0^\infty \frac{\exp(\sqrt{s^2 + r_1^2} z / \rho)}{s + \sqrt{s^2 + r_1^2}} J_1(s) s ds \Big|_{z \rightarrow -0}.$$

Способ вычисления интегралов подобного вида изложен в [6], поэтому, пропуская промежуточные математические преобразования, можно получить  $\Phi_E = 1$ ,  $\Phi_H = r_1 I_1(r_1/2) K_1(r_1/2)$ . Здесь  $I_1$  и  $K_1$  — цилиндрические функции мнимого аргумента [8]. При  $|r_1|/2 \gg 1$  можно воспользоваться асимптотическими представлениями функций Бесселя, для которых  $I_1(r_1/2) K_1(r_1/2) \rightarrow 1/r_1$ , следовательно,  $\Phi_H \rightarrow 1$ . Таким образом, в рамках квазистационарного приближения поверхностный импеданс совпадает с импедансом плоской волны при условии  $|r_1|/2 \gg 1$ . Заметим, что  $r_1 = (1 - i)\rho/d_s$ , где  $d_s = 1/(\sqrt{\pi f \mu_0 \sigma_1})$  — толщина скин-слоя, в силу чего требование  $|r_1|/2 \gg 1$  эквивалентно тому, чтобы расстояние до точки измерения было много больше скин-слоя.

Прежде чем переходить к численным расчетам, получим еще одно приближение для функций  $F_E$  и  $F_H$ , учитывая, в отличие от квазистационарного приближения, ненулевое значение  $|r_0|$ .

Вместо условия  $|\kappa_0| = 0$  положим в (1) более мягкое ограничение  $|\kappa_0/\kappa_1| \ll 1$ , что имеет место при возбуждении низкочастотных волн. Тогда, пренебрегая членом, имеющим порядок  $|\kappa_0^2/\kappa_1^2|$ , из (1) получаем

$$E_y^0(\rho, z \rightarrow -0) \simeq -\frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_1^2} i\omega\mu_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \frac{\exp(v_1 z)}{v_0} \times J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda \Big|_{z \rightarrow -0}.$$

Вычисляя интеграл по  $\lambda$  и дифференцируя по  $\rho$ , находим

$$E_y^0(\rho, z \rightarrow -0) \simeq -\frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_1} z_g \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\rho^3} \tilde{F}_E(\rho, 0), \quad (9)$$

где  $\tilde{F}_E(\rho, 0) = (1 + r_0) \exp(-r_0)$ .

При  $|r_0| \rightarrow 0$   $\tilde{F}_E(\rho, 0) = \Phi_E$ , т.е. результат квазистационарного приближения. Отметим, что формула (9) получена при ограничении  $|\kappa_0/\kappa_1| \ll 1$ , что эквивалентно выполнению неравенства  $|r_1/r_0| \gg 1$  или  $r_0^{1/2} \ll \sqrt{120\pi\sigma_1\rho}$ , поэтому при больших значениях  $|r_0|$  результаты заметно расходятся. Следовательно, в дальнейшем представляют интерес исследование в области

$|r_0| \leq 1$ , где можно ожидать практического совпадения величины поля с квазистационарным приближением, а также не рассматривать влияние сферичности Земли для рассматриваемого нами диапазона частот.

Аналогичные вычисления можно провести и для  $H_x^{(1)}(\rho, z \rightarrow -0)$ . Если воспользоваться в (3) условием, что  $|\kappa_0^2/\kappa_1^2| \ll 1$ , то можно написать следующее приближенное выражение для  $H_x^{(1)}(\rho, z \rightarrow -0)$

$$\tilde{H}_x(\rho, -0) = H_x^{(1)}(\rho, z \rightarrow -0) \Big|_{|\kappa_0^2/\kappa_1^2| \ll 1} = \frac{J\Delta x}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \frac{\exp(v_1 z)}{(v_0 + v_1)v_0} J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda.$$

Вычисляя интеграл по  $\lambda$ , получим

$$\tilde{H}_x(\rho, -0) = \frac{J\Delta x}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left[ I_0 \left( \rho \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{2} \right) \times K_0 \left( \rho \frac{\kappa_1 + \kappa_0}{2} \right) + I_1 \left( \rho \frac{\kappa_1 - \kappa_0}{2} \right) K_1 \left( \rho \frac{\kappa_1 + \kappa_0}{2} \right) \right],$$

где  $I_0$ ,  $K_0$ ,  $I_1$ ,  $K_1$  — цилиндрические функции мнимого аргумента [8].

Запишем  $\tilde{H}_x(\rho, -0)$  в виде (5)

$$\tilde{H}_x(\rho, -0) = -\frac{J\Delta x}{2\pi\kappa_1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{\rho^3} \tilde{F}_H(\rho, -0),$$

для чего выполним дифференцирование по  $y$  в предыдущей формуле. В результате находим, что

$$\tilde{F}_H(\rho, -0) = r_1 I_1 \left( \frac{r_1 - r_0}{2} \right) K_1 \left( \frac{r_1 + r_0}{2} \right) + \frac{r_1 r_0}{2} \times \left[ I_0 \left( \frac{r_1 - r_0}{2} \right) K_1 \left( \frac{r_1 + r_0}{2} \right) + I_1 \left( \frac{r_1 - r_0}{2} \right) K_0 \left( \frac{r_1 + r_0}{2} \right) \right].$$

Функция  $\tilde{F}_H(\rho, -0)$  при  $|r_1 - r_0| \gg 1$  имеет следующее асимптотическое представление:  $\tilde{F}_H(\rho, -0) \sim (1 + r_0) \exp(-r_0)$ . Таким образом, функция  $\tilde{F}_H(\rho, -0)$  в широком диапазоне не зависит от  $|r_1|$  и соответственно от  $\rho\sigma_1$  и определяется только изменением  $r_0$ .

## 2. Оценка границы применимости квазистационарного приближения

Представим  $r_1$  в виде

$$r_1 = r_0^{1/2} \sqrt{\frac{\sigma_1 \rho}{c \varepsilon_0}} = r_0^{1/2} \sqrt{120\pi\sigma_1\rho}$$

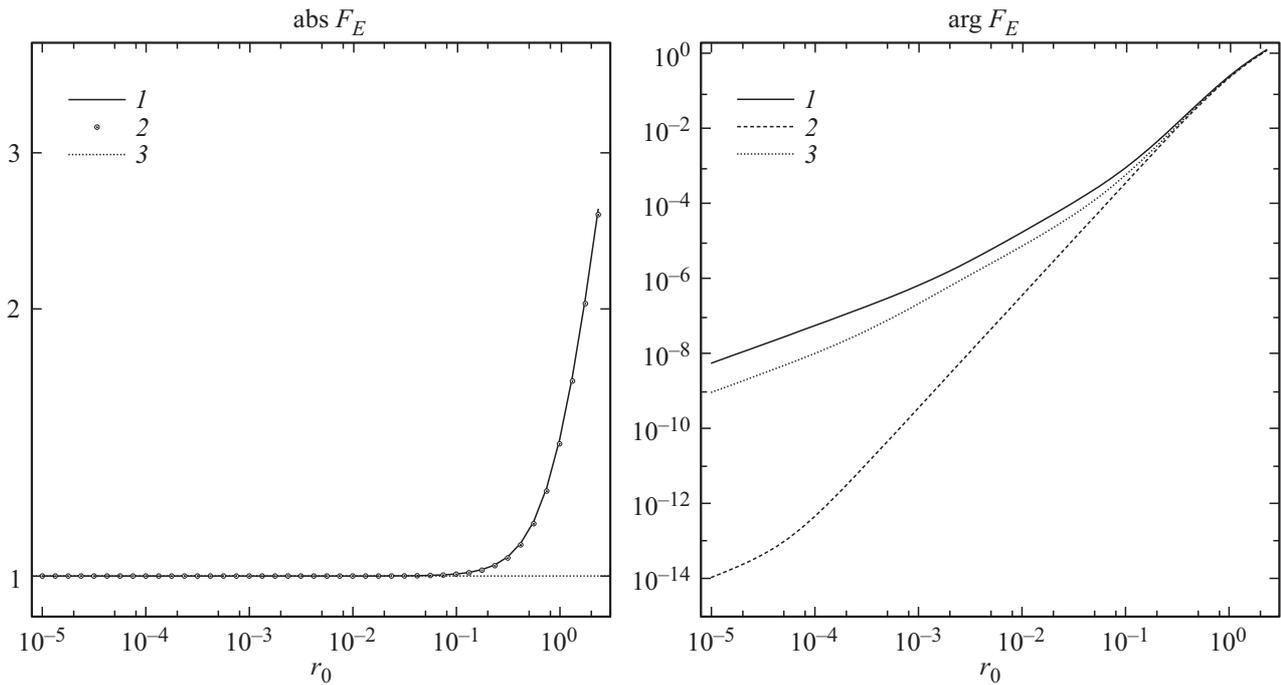


Рис. 1. Модуль и аргумент  $F_E(\rho, 0)$ , рассчитанные по формуле (6) — 1, в квазистационарном приближении  $\Phi_E$  — 2 и  $F_E(\rho, 0)$  — 3.

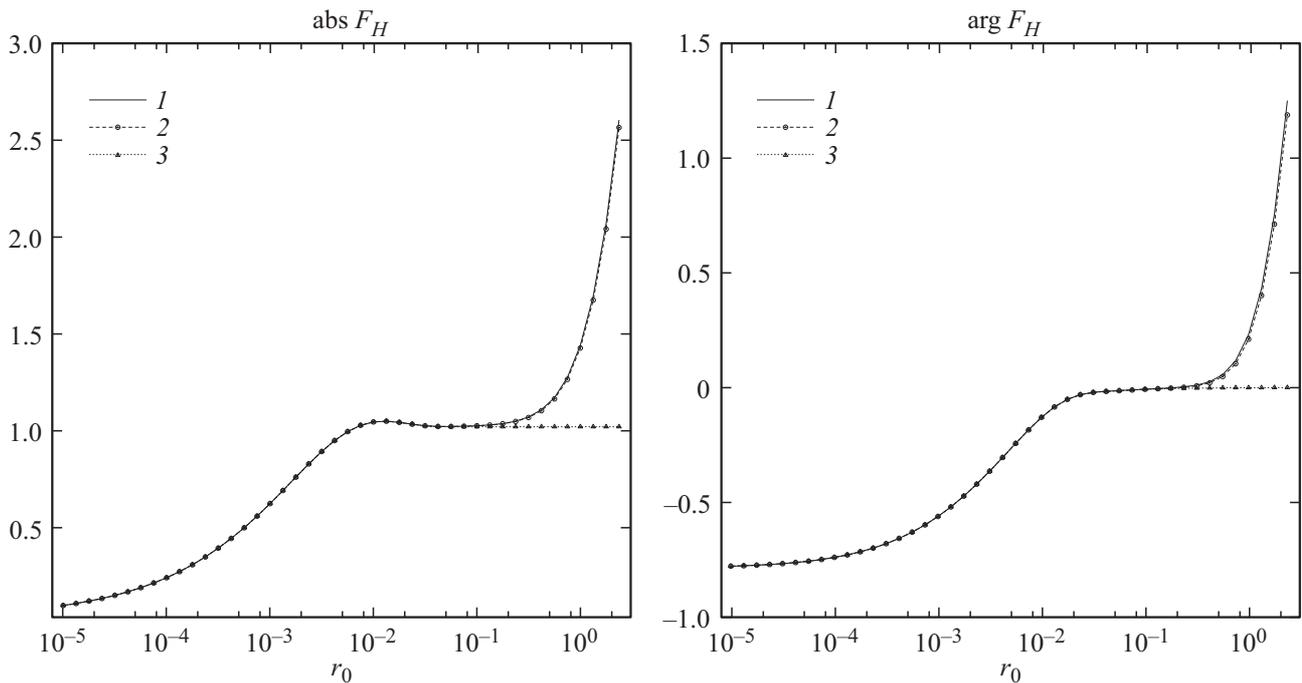
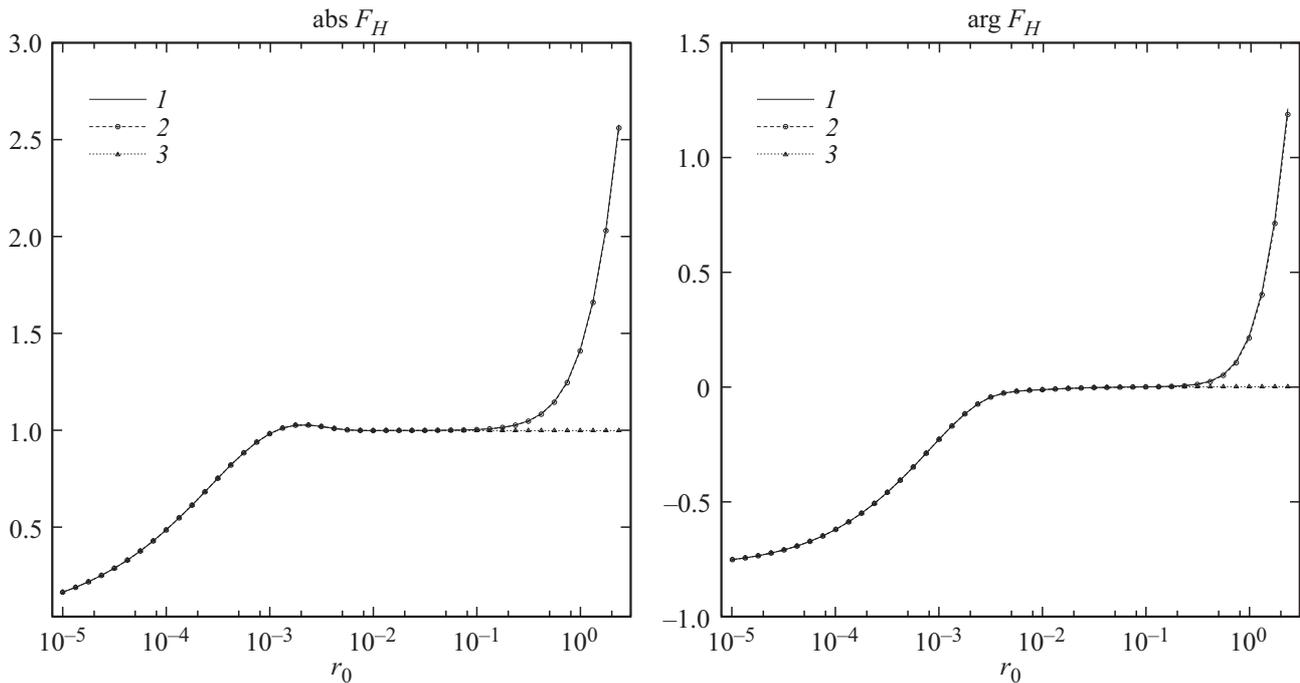


Рис. 2. Модуль и аргумент  $F_H(\rho, 0)$ , полученные по формуле (7) — 1, в квазистационарном приближении  $\Phi_H$  — 2 и функция  $\tilde{F}_H(\rho, 0)$  — 3 при  $\sigma_1\rho = 5$ .

и численно проанализируем, используя формулы (6) и (7), зависимость функций  $F_E$  и  $F_H$  от  $|r_0|$  для различных значений параметра  $\sigma_1\rho$ .

На рис. 1 приведен результат расчета модуля и фазы функции  $F_E$ . Для сравнения на нем также нанесена функция  $\tilde{F}_E$ . Графики показывают хорошее совпадение

функций  $F_E$  и  $\tilde{F}_E$ . В то же время наблюдается их значительное отличие от единицы (квазистационарного приближения) по мере достижения  $|r_0|$  единицы. Следующие графики (рис. 2, 3) относятся к сравнению результатов расчета  $F_H$  по формуле из (5), в квазистационарном приближении —  $\Phi_H$  и функции  $\tilde{F}_H$ . Здесь



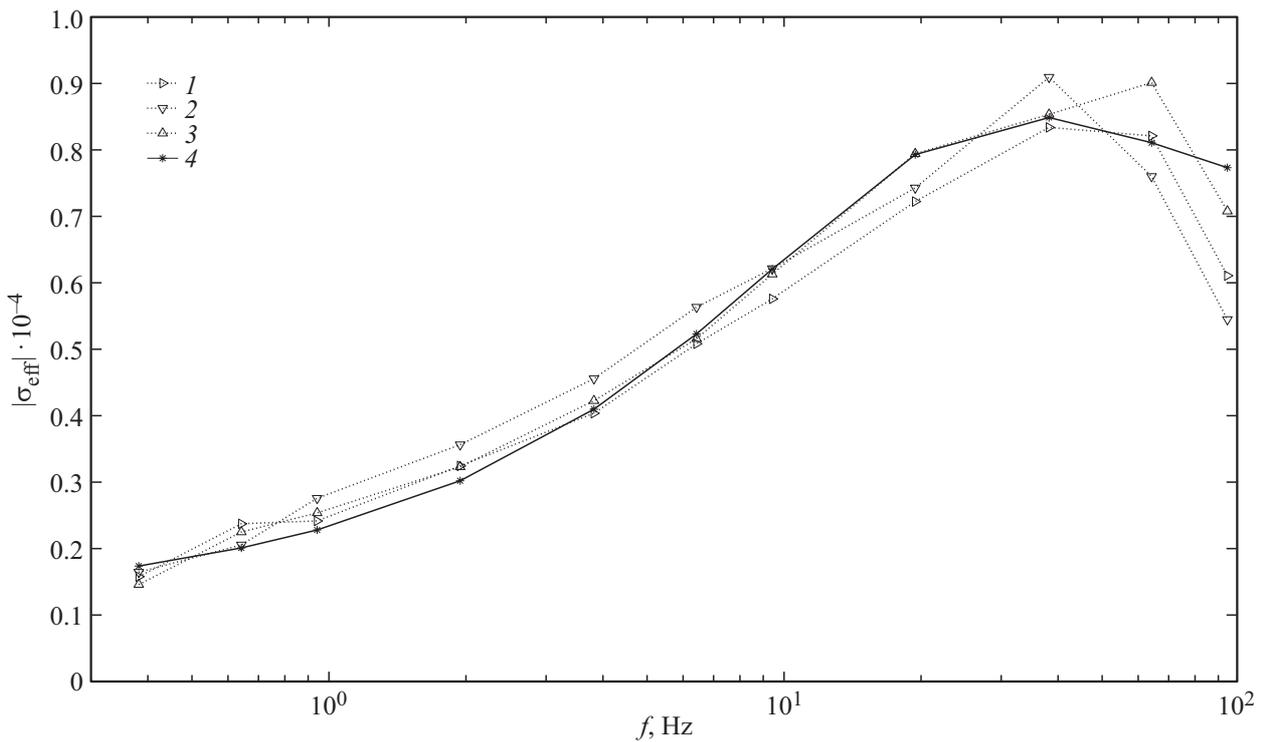
**Рис. 3.** Модуль и аргумент  $F_H(\rho, 0)$ , полученные по формуле (7) — 1, в квазистационарном приближении  $\Phi_H$  — 2 и функция  $\tilde{F}_H(\rho, 0)$  — 3 при  $\sigma_1\rho = 30$ .

наблюдается более сложная зависимость  $F_H(\rho, 0)$  от  $|r_0|$ : идет рост функции, затем она выходит на плато, после которого опять начинается рост. Расчеты показывают хорошее соответствие между функцией  $F_H(\rho, 0)$  и ее приближением  $\tilde{F}_H(\rho, 0)$  в большом диапазоне изменения  $|r_0|$ . При этом в квазистационарном приближении имеется только выход на плато со значением функции, равным единице. Область начиная с плато — это потенциальная область, где в рамках квазистационарного приближения поверхностный импеданс поля близок к импедансу плоской волны.

Как видим из рис. 2, 3, по мере уменьшения  $\sigma_1$  при фиксированном  $\rho$  длина плато сокращается и выход на него происходит при больших значениях  $|r_0|$ , что увеличивает погрешность использования квазистационарного приближения. То есть низкая проводимость среды ограничивает снизу область частот, где применимо квазистационарное приближение. Ограничение частоты сверху происходит из-за параметра  $|r_0|$ , который по мере приближения к единице дает для  $F_E$  результат, существенно отличающийся от квазистационарного приближения. Поэтому квазистационарное приближение применимо к описанию поля до значений  $|r_0|$ , значительно меньших единицы. Его точность в этой области имеет порядок  $r_0^2/2$ . Более эффективной является аппроксимация функциями  $\tilde{F}_E$  и  $\tilde{F}_H$ , справедливая до значений  $|r_0| < 120\pi\sigma_1\rho$ . Расчеты по этим функциям показывают, что для описания поверхностного импеданса импедансом плоской волны необходимо еще ограничение снизу  $|r_0| > 1/(120\pi\sigma_1\rho)$ .

В то же время, опираясь на функции  $\tilde{F}_E$  и  $\tilde{F}_H$ , можно утверждать, что, в отличие от полей, поверхностный импеданс совпадает с импедансом плоской волны в более широком, чем ограниченном квазистационарным приближением, интервале изменения параметра  $|r_0|$ . При  $|r_1 - r_0| \gg 1$ , и равенство импедансов будет справедливо до  $r_0$ , ограниченных условием  $|r_1/r_0| \gg 1$  или  $|r_0| \ll 120\pi\sigma_1\rho$ .

В заключение рассмотрим применение результатов и выводов работы для экспериментов, выполненных в рамках проектов FENICS-2014 и FENICS-2019. Измерения на Кольском полуострове проводились в обсерватории Ловозеро в 2014 г. [9] и вблизи села Варзуга в 2019 г. [10]. Антенна находилась на севере Мурманской области, расстояние от концов антенны до точки измерений Ловозеро составило 100 km и 125 km, до Варзуги — 314 km и 370 km. Рассмотрим две крайние ситуации с проводимостью  $5 \cdot 10^{-5}$  и  $5 \cdot 10^{-4}$ . При этом первое значение подходит для описания эксперимента в 2014 г., а второе — для эксперимента в 2019 г. Диапазон частот, используемых в экспериментах, составлял 0.02–200 Hz. Оценим возможность использования импеданса плоской волны для интерпретации экспериментальных данных. Для точки Ловозеро минимальное значение параметра  $\sigma_1\rho$  равно пяти. В соответствии с рис. 2, область изменения  $|r_0|$ , в которой поверхностный импеданс равен импедансу плоской волны, определяется неравенством  $|r_0| \geq 10^{-2}$ . Используя значение  $|r_0|$ , зная  $\rho$  и  $\sigma_1$ , получим ограничение по частоте —  $f \geq 5$  Hz. Для точки Варзуга имеем —  $f \geq 0.2$  Hz. По результатам из-



**Рис. 4.** Частотные зависимости модуля эффективной проводимости  $|\sigma_{\text{eff}}|$ , рассчитанные по экспериментальным данным — 1–3 и для двухслойной модели — 4.

мерений амплитуд компонент электромагнитного поля монохроматического источника в точке Варзуга можно оценить эффективную проводимость литосферы во всем диапазоне использованных частот. Для эффективной проводимости плоской двуслойной структуры, используя подход, описанный в [7], получим

$$\sqrt{\sigma_{\text{eff}}} = \sqrt{\sigma_1} \frac{1 + R_{12} \exp(-2\kappa_1 d)}{1 - R_{12} \exp(-2\kappa_1 d)},$$

где  $\kappa_1 = (1 - i)\sqrt{\omega\mu_0\sigma_1/2}$ ,  $R_{12} = (\sqrt{\sigma_2} - \sqrt{\sigma_1})(\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2})$ . Сравнение результатов модельных расчетов с экспериментально полученными (рис. 4, кривые 1–3) показало, что оптимальными оказались следующие модельные параметры подстилающей поверхности:  $\sigma_1 = 0.75 \cdot 10^{-4}$  S/m,  $\sigma_2 = 10^{-5}$  S/m,  $d = 11.5$  km (рис. 4, кривая 4).

Сравнивая параметры использованной модели с моделью электропроводности земной коры Фенноскандинавского щита и его обрамления из работы [5], можно сделать следующий вывод: используемые частоты не показывают неоднородности слоя литосферы глубже десяти километров. Для более детального изучения верхнего слоя, где наиболее заметно расхождение экспериментальных данных и модели, необходимо расширение частотного диапазона в сторону более высоких частот.

## Выводы

Использование более мягкого ограничения (длина волны в вакууме много больше длины волны в нижнем полупространстве) по сравнению с квазистационарным приближением, введенным в [1] и послужившим обоснованием для применения импедансного подхода при исследовании структуры литосферы [2,3], позволило оценить границы применимости квазистационарного приближения как для описания полей, так и поверхностного импеданса.

Найдены условия, при выполнении которых, возможна замена поверхностного импеданса на импеданс плоской волны.

Полученные в работе аналитические аппроксимации для электромагнитного поля, возбуждаемого горизонтальной заземленной антенной в СНЧ-КНЧ и более низком диапазоне, хорошо совпадают с точными численными расчетами.

Проанализирована ограниченность квазистационарного приближения и оценены границы его применения для описания результатов измерений электромагнитных полей в различных частях Кольского полуострова в рамках экспериментов  $F_E$ NICS-2014 и  $F_E$ NICS-2019. Показано, что в рамках измерений, проведенных на юго-востоке Кольского полуострова, квазистационарное приближение не работает при описании полей во всем диапазоне использованных частот (0.02–95 Hz), однако возможна

замена поверхностного импеданса на импеданс плоской волны.

На основе импедансного подхода получены результаты по структуре проводимости литосферы в юго-восточной части Кольского полуострова, не противоречащие существующим геологическим данным. Финансирование работы Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-05-00823).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] V. Fock. *Annalen Der Physik*, **409** (4), 401 (1933). DOI: 10.1002/andp.19334090405
- [2] А.В. Вешев. *Электропрофилирование на постоянном и переменном токе. 2 издание, переработанное и дополненное.* (Недра, 1980).
- [3] Л.Л. Ваньян. *Электромагнитные зондирования.* (Научный мир, М., 1997).
- [4] А.А. Ковтун. *Строение коры и верхней мантии на северо-западе Восточно-Европейской платформы по данным магнитотеллурического зондирования.* (Из-во ЛГУ, 1989).
- [5] А.А. Zhamaletdinov, A.N. Shevtsov, E.P. Velikhov, A.A. Skorokhodov, V.E. Kolesnikov, T.G. Korotkova, P.A. Ryazantsev, B.V. Efimov, V.V. Kolobov, M.B. Barannik, P.I. Prokopchuk, V.N. Selivanov, Yu.A. Kopytenko, E.A. Kopytenko, V.S. Ismagilov, M.S. Petrishchev, P.A. Sergushin, P.E. Tereshchenko, B.V. Samsonov, M.A. Birulya, M.Yu. Smirnov, T. Korja, Yu.M. Yampolski, A.V. Koloskov, N.A. Baru, S.V. Poljakov, A.V. Shchennikov, G.I. Druzhin, W. Jozwiak, J. Reda, Yu.G. Shchors. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, **51** (8), 826 (2015). DOI: 10.1134/s0001433815080083
- [6] Е.Д. Терещенко, П.Е. Терещенко. *Радиотехника и электроника*, **63** (4), 1 (2018). DOI: 10.7868/S0033849418040034 [E.D. Tereshchenko, P.E. Tereshchenko. *Journal of Communications Technology and Electronics*, **63** (4), 335 (2018). DOI: 10.1134/S1064226918040125]
- [7] Г. И. Макаров, В. В. Новиков, С.Т. Рыбачек. *Распространение электромагнитных волн над земной поверхностью.* (Наука, М., 1991).
- [8] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* (Физматгиз, М., 1962).
- [9] Е.Д. Терещенко, А.Е. Сидоренко, П.Е. Терещенко. *ЖТФ*, 2019, **89** (7), 1098 (2019). DOI: 10.21883/JTF.2019.07.47805.388-18 [E.D. Tereshchenko, A.E. Sidorenko, P.E. Tereshchenko. *Tech. Phys.*, **64** (7), 1029 (2019). DOI: 10.1134/S1063784219070259]
- [10] П.Е. Терещенко. *Наука и технологические разработки*, **4**, 34 (2019). DOI: 10.21455/std2019.4-3