

Метод трансляционного переноса для оценки стабильности нестационарного квантового стандарта частоты

© С.В. Божокин, К.А. Баранцев, А.Н. Литвинов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: bsvjob@mail.ru

Поступило в Редакцию 30 апреля 2020 г.
В окончательной редакции 22 июня 2020 г.
Принято к публикации 22 июня 2020 г.

Непрерывное вейвлет-преобразование применено для анализа работы нестационарного сигнала квантового стандарта частоты. Предложен метод трансляционного переноса, с помощью которого устранены граничные явления в этом преобразовании. Вычислены спектральные интегралы сигнала квантового стандарта частоты в различных диапазонах частот. Введена вейвлет-дисперсия, позволяющая определить моменты времени, когда флуктуации сигнала наиболее сильны. Проведено сравнение вейвлет-дисперсии с обычной дисперсией и с дисперсией Аллена.

Ключевые слова: непрерывное вейвлетное преобразование, квантовый стандарт частоты, вейвлет-дисперсия, нестационарный сигнал.

DOI: 10.21883/JTF.2021.01.50269.152-20

Введение

Известно, что спутниковые навигационные системы имеют своей целью создание глобального координатно-временного поля, доступного в любой точке Земли и в космосе, для высокоточного измерения координат, навигации, управления, синхронизации приема-передачи информации между удаленными объектами. Ключевыми элементами, определяющими точность синхронизации всех бортовых и наземных элементов спутниковых систем навигации, являются квантовые стандарты частоты (атомные часы) [1–5]. Они составляют основу навигационных систем ГЛОНАСС, GPS, а также разрабатываемой в Европе системы GALILEO, в Китае системы Бэйдоу, и в Индии системы IRNSS. Замена существующих стандартов частоты бортового базирования, связанная как с естественным выходом из эксплуатации работающих устройств, так и с проектированием новых систем, предполагает использование более совершенных в техническом отношении решений.

Одной из главных характеристик квантового стандарта частоты (QFS) является его кратковременная и долговременная стабильность. Несовершенство квантового дискриминатора (тепловые, дробовые и фликкер шумы) определяют кратковременную стабильность QFS. Различные температурные эффекты, деградация источников и приемников оптического излучения определяют долговременную стабильность QFS. На стабильность работы QFS также влияют флуктуации сигнала оптического детектирования, нестабильность параметров электромагнитного излучения, неидеальность фотодетекторов, нестабильность источников питания, неоднородности температурного поля и др. Для определения как кратковременной, так и долговременной стабильно-

сти традиционно используется критерий, основанный на вычислении дисперсии Аллена [4,6,7]. Формула для дисперсии Аллена выведена в предположении нормального, стационарного, эргодического случайного процесса, однако в реальных условиях и при длительной работе прибора мы имеем дело с многочисленными переходными процессами, следствием которых является нестационарность шумов сигнала дискриминатора. Это означает, что статистические и спектральные свойства, вычисленные для достаточно большого интервала времени, изменяются. Другими словами, если взять интервал времени, смещенный на произвольную величину относительно первоначального интервала, и сопоставить с исходным интервалом, то статистические и спектральные свойства сигналов на этих интервалах не будут совпадать. Разумно предположить, что в течение работы QFS нестационарные шумы с изменяющимися спектральными характеристиками могут возникать в какие-то моменты времени, и также исчезать в последующие моменты времени.

Несмотря на то, что в подавляющем большинстве работ, посвященных анализу стабильности (QFS), расчеты выполнены в рамках аллановского подхода [8–10], имеется ряд работ по изучению алгоритмов обработки сигнала, учитывающих нестационарность шумов сигнала. Основу этих алгоритмов составляет вейвлет-анализ [11–16]. Основная новизна подхода состоит в том, что при вычислении непрерывного вейвлетного преобразования используется адаптивный вейвлет Морле, позволяющий изменять временное и частотное разрешения исследуемых сигналов с помощью вспомогательного управляющего параметра [17–19]. В [20] метод непрерывного вейвлетного преобразования применен для анализа нестационарного дискретного сиг-

нала квантового стандарта частоты (QFS). Однако данная работа имеет определенный недостаток, а именно, при анализе сигнала QFS не учитываются граничные условия, возникающие при реализации непрерывного вейвлет-преобразования. Это обстоятельство позволило сформировать тематику настоящей работы.

Таким образом, целью настоящей работы является развитие теории вейвлетов для анализа нестационарных сигналов QFS с учетом граничных условий. При этом непрерывное вейвлетное преобразование (CWT — continuous wavelet transform) будет обобщено на случай дискретного сигнала. Спектральные интегралы, характеризующие работу QFS в различные моменты времени, будут вычислены для всех диапазонов частот. В заключительной части работы проведено сравнение вейвлет-дисперсии (дисперсия, характеризующая нестационарную работу QFS) с традиционными методами, оценивающими стабильность работы QFS.

1. Анализ стабильности QFS с помощью дисперсии Аллена

Рассмотрим анализ стабильности QFS с помощью дисперсии Аллена [6]. Определим относительную частоту сигнала QFS, как $y(t) = (v(t) - v_0)/v_0$, где $v(t)$ — измеренная частота в момент времени t , которая отличается от эталонного значения v_0 вследствие различных флуктуаций. Предположим, что QFS работает в течение времени T . Определим $T = N\Delta t$, где N — число точек, а Δt — время дискретизации. В этом случае сигнал $y_n = y(t_n)$ становится дискретным, причем моменты времени $t_n = n\Delta t$, где $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Спектр частот различных флуктуаций с частотой f также становится дискретным $f_k = k/T$, где $k = 1, 2, \dots$ — целые числа. Рассмотрим модельный сигнал QFS ($N = 131072$, $\Delta t = 0.5$ s), для которого вычислим среднее значение $\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n$, и выборочную

дисперсию $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [y_n - \langle y \rangle]^2$. На рис. 1 построена функция $\sqrt{y^2(t)}/\sigma$ в зависимости от времени t . Для данного QRS величина кратковременной стабильности $\sigma = 2.3 \cdot 10^{-12}$. Из этого графика можно видеть, что сигнал $y(t)$ имеет сильные флуктуации, причем в максимуме величина $\sqrt{y^2_{\max}(t)}/\sigma \approx 4.5$.

Построим спектр мощности сигнала $P(f_k) = |\hat{y}(k)|^2$ (рис. 2), который может быть выражен через фурье-гармоники $\hat{y}(k)$ этого сигнала $y(t)$. Спектр мощности $P(f_k)$, нормированный на единицу, спадает в зависимости от частоты $0 < f_k < 0.75$ Hz. Двухвыборочная дисперсия Аллена $\sigma_{Al}^2(\tau)$, зависящая от текущего времени τ , в настоящее время является наиболее распространенной мерой стабильности частоты QFS [8–10]. Для дискретного набора частот $f_k = k/T$ формула для

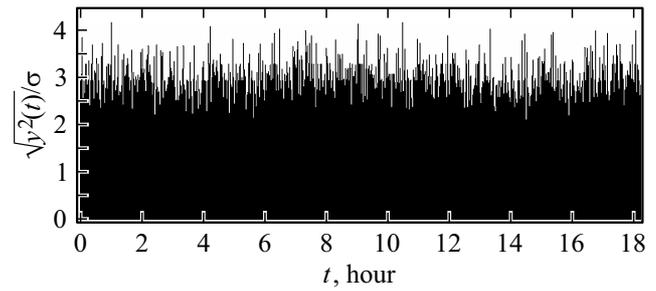


Рис. 1. Зависимость $\sqrt{y^2(t)}/\sigma$ от времени t для QRS.

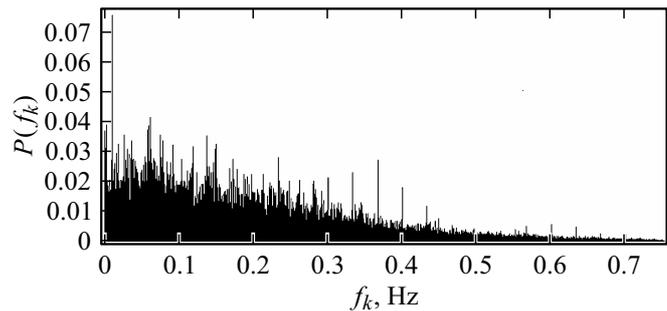


Рис. 2. Спектр мощности $P(f_k)$ сигнала $y(t)$, нормированный на единицу, в зависимости от частоты f_k .

дисперсии Аллена имеет вид:

$$\sigma_{Al}^2(\tau) = 4 \sum_{k=0}^{N/2} \frac{\sin^4(\pi k \tau / T)}{(\pi k \tau / T)^2} |\hat{y}(k)|^2. \quad (1)$$

Известно, что формула дисперсии Аллена $\sigma_{Al}^2(\tau)$ опирается на измерение разности средних для двух соседних последовательных измерений частоты. Это определение отличается от определения дисперсии, когда наблюдаемые величины сравниваются со средним значением по всему интервалу измерений $[0; T]$. В основе вывода $\sigma_{Al}^2(\tau)$ лежит условие эргодичности стационарного процесса. Следовательно, усреднение по статистическому ансамблю эквивалентно усреднению по времени. Однако в реальной ситуации предположение о стационарности работы QFS может нарушаться. Это связано с тем, что в работе реального устройства имеются флуктуации сигнала оптического детектирования, нестабильность параметров электромагнитного излучения, неидеальность фотодетекторов, нестабильность источников питания, неоднородности температурного поля и др.

Вычислим $\sigma_{Al}(\tau)$ для данного QFS. Подставляя явный вид спектра мощности в (1) (рис. 3) и выполняя суммирование, получаем, что величина $\sigma_{Al}(T/2) = 1.99 \cdot 10^{-14}$. Недостатком формулы дисперсии Аллена является то обстоятельство, что спектр мощности сигнала $P(f_k) = |\hat{y}(k)|^2$ может только указать на присутствие определенных спектральных гармоник. Различная динамика возникновения и исчезновения

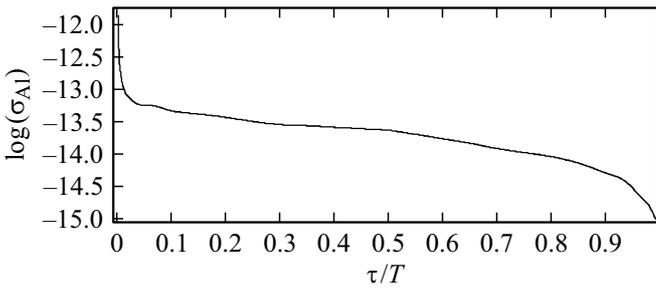


Рис. 3. Зависимость десятичного логарифма $\log(\sigma_{AI}(\tau))$ от безразмерного времени τ/T , где T — период наблюдения.

вспышек активности, возникающая в различные моменты времени в различных спектральных диапазонах, не отражена в формуле (1). Это требует разработки нового подхода, описывающего нестабильность работы QFS, учитывающего нестационарность сигнала $y(t)$. Этот новый подход будет представлен ниже.

2. Непрерывное вейвлет-преобразование сигнала QFS

Для анализа нестационарных сигналов в теории вейвлетов широко используется непрерывное вейвлет-преобразование (Continuous Wavelet Transform) [11–16]. Оно имеет преимущество перед оконным преобразованием Фурье (STFT — Short Time Fourier Transform), поскольку STFT использует постоянное окно продолжительностью W , в то время как CWT использует адаптивное окно. Преимущество использования адаптивного окна в CWT состоит в том, что на малых частотах окно становится широким, а на высоких частотах — узким. Это преимущество CWT перед STFT, так как явный вид STFT зависит от размера окна W . Для многих нестационарных сигналов, имеющих различные продолжительности вспышек с разными частотами, оптимальный выбор окна является сложной задачей.

Обозначим $V(\nu, t)$ непрерывное вейвлет-преобразование, зависящее от частоты ν и времени t . Вместо обычной частоты ν , имеющей размерность Hz, введем безразмерную частоту $Q = \nu\Delta t$. Момент времени t переходит в дискретную величину $t_n = n\Delta t$, где $n = 0, 1, \dots, N-1$. Тогда непрерывное вейвлет-преобразование $V(Q, n)$ дискретного сигнала $y(n)$ будет иметь вид

$$V(Q; n) = Q \sum_{n'=0}^{N-1} y(n') \Psi^*[Q(n' - n)]. \quad (2)$$

Здесь величина $V(Q, n)$ отображает одномерный сигнал $y(n)$ на плоскость изменяющихся аргументов $\{Q; n\}$: безразмерной частоты Q и времени n . Комплексная функция $\Psi(x)$ представляет собой материнский вейвлет,

пространственная протяженность которого равна Δx . Выражения для материнского вейвлета $\Psi(x)$, а также его Фурье компоненты $\hat{\Psi}(F)$ приведены в работах [17–19]. С помощью непрерывного вейвлетного преобразования можно ввести среднее значение локальной плотности спектра энергии сигнала $\varepsilon(Q; n)$:

$$\varepsilon(Q; n) = \frac{1}{C_\Psi} \frac{|V(Q; n)|^2}{Q},$$

где

$$C_\Psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\Psi}(F)|^2 dF}{F}. \quad (3)$$

Спектральный интеграл $E_\mu(n)$, введенный в [17–19]:

$$E_\mu(n) = \frac{1}{\Delta Q} \int_{Q_\mu - \Delta Q/2}^{Q_\mu + \Delta Q/2} \varepsilon(Q, n) dQ, \quad (4)$$

представляет собой среднее значение локальной плотности спектра энергии сигнала $\varepsilon(Q; n)$, проинтегрированное по определенному диапазону частот

$$\mu = [Q_\mu - \Delta Q/2; Q_\mu + \Delta Q/2],$$

где Q_μ — середина частотного интервала, ΔQ — размер интервала частот. Изучая поведение спектрального интеграла $E_\mu(n)$, можно анализировать явления появления и исчезновения вспышек спектральной активности сигнала в диапазоне частот μ в зависимости от дискретного времени $t_n = n\Delta t$.

Введем вейвлетную дисперсию $\sigma_W^2(n)$, представляющую собой интеграл от спектральной плотности, вычисленный по всему спектральному диапазону

$$\sigma_W^2(n) = \int_0^\infty \varepsilon(Q, n) dQ. \quad (5)$$

Для вейвлетного преобразования дискретного сигнала справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\langle y^2(n) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_W^2(n). \quad (6)$$

Вейвлетная дисперсия $\sigma_W^2(n)$, зависящая от конкретного интервала времени $t_n = n\Delta t$, представляет собой величину, усредненную как по временам с помощью адаптивного окна, зависящего от частоты $Q = \nu\Delta t$, так и по всем частотам Q . Отметим, что при выборе окна вейвлетного преобразования существенным становится проблема, связанная с граничными условиями на краях этого окна. Следующий раздел будет посвящен этому вопросу.

3. Устранение граничных условий при выполнении CWT

Особенностью численных методов вычисления CWT (2) для различных времен $t \rightarrow t_n = n\Delta t$ и частот $\nu \rightarrow \frac{Q}{\Delta t}$ является появление граничных эффектов, проявляющихся как на левой ($0 < t < t_{off}$), так и на правой границе ($T - t_{off} < t < T$) промежутка наблюдения сигнала T . Для их устранения обычно результаты $V(Q, n)$ (2), получающиеся как для $0 < t < t_{off}$, так и в правом граничном интервале $T - t_{off} < t < T$, обнуляются. Естественно, что в этом случае теряется ценная информация о частотно-временном поведении сигнала $y(t)$ в этих граничных интервалах. Поясним это более подробно. Для этого введем параметр локализации Δ_x , определяющий протяженность материнского вейвлета $\psi(x)$ по оси x . Минимальная частота исследуемого сигнала ν_{min} связана с моментом времени t_{off} соотношением $t_{off} = \frac{2\Delta_x}{\nu_{min}}$. Аналогичный промежуток времени $[T - t_{off}; T]$ будет и на правом участке интервала времени $[0; T]$. Для определения частоты ν_{min} необходимо, чтобы на оставшемся интервале времени, равном $T - 2t_{off}$, помещалось K периодов колебаний частоты, равных $1/\nu_{min}$, причем величина $K \gg 1$, поэтому $\nu_{min} = (K + 4\Delta_x)/T$. Отсюда становится ясно, что учет граничных эффектов приводит к тому, что величина ν_{min} примерно в $K + 4\Delta_x$ раз больше, чем минимальная частота $f_{min} = 1/T$, используемая в фурье-анализе.

Для устранения граничных эффектов нами был предложен следующий алгоритм, основанный на трансляционном переносе сигнала (TST — translation signal transfer):

1) по известной величине ν_{min} можно расширить интервал изучения сигнала $y(t)$, увеличив его с величины T до величины T_1 ;

2) начало интервала T ($t = 0$) переносится в точку t_{min} . Весь начальный промежуток $[0; t_{min}]$ нового интервала наблюдения сигнала T_1 заполняется постоянными значениями сигнала в начальный момент времени $y(t = 0)$. При этом в качестве величины t_{min} выбирается величина, большая, чем начальный участок, где будут наблюдаться граничные эффекты CWT $t_{min} = 2.5\Delta_x/\nu_{min}$. Отметим, что величина t_{min} немного превосходит величину t_{off} , так как $t_{min} = 1.25t_{off}$;

3) конечный промежуток нового интервала $[T_1 - t_{min}; T_1]$ также заполняется постоянными значениями сигнала в конечный момент времени наблюдения $Z(t = T)$. В этом случае центральный интервал $[t_{min}; T_1 - t_{min}]$ промежутка $T_1 > T$, имеющий продолжительность T , в точности повторяет все значения исследуемого сигнала $y(t)$, заданного на этом же промежутке наблюдения;

4) приравняем значения минимальной частоты $\nu_{min}(T) = -\nu_{min}(T_1)$ для периода T и периода $T_1 = T + 5\Delta_x/\nu_{min}$. В этом случае число периодов $K(T)$ и $K_1(T_1)$ связаны соотношением $K_1(T_1) = K(T) + 5\Delta_x$.

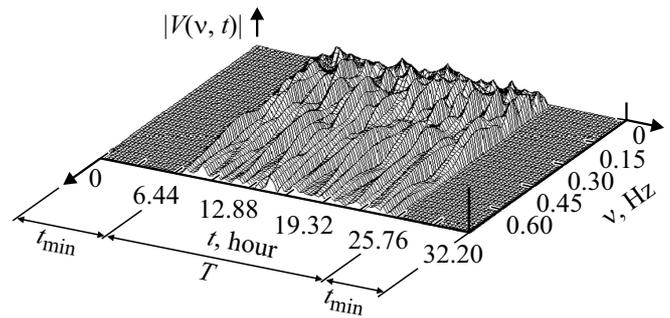


Рис. 4. Зависимость модуля CWT $|V(v, t)|$ от частоты ν и времени t .

Рассмотрим численную реализацию CWT на интервале времени $[0; T_1]$. На рис. 4 показан CWT-сигнал $V(v, t)$, который сдвинут с помощью метода TST. Начальный $[0, t_{min}]$ и конечный интервал $[T_1 - t_{min}; T_1]$ расширенного интервала $[0, T_1]$ заполняются постоянными граничными значениями сигнала, которые вносят нулевой вклад в $V(v, t)$. Таким образом, граничные эффекты в первоначальном интервале сигнала $[0, T]$ оказываются учтенными. Проанализируем численные данные сигнала на рис. 4. Для минимальной частоты $\nu_{min} \approx 2 \cdot 10^{-4}$ Hz период наблюдения за сигналом длительностью $T = 18.2$ h увеличивается до величины $T_1 = 32.2$ h ($T_1 = T + 2t_{min}$). Ранее граничные эффекты исследуемого сигнала $y(t)$ проявляли себя в диапазоне низких частот $\nu \geq \nu_{min}$ на интервалах времени $0 < t < t_{off}$ и $T - t_{off} < t \leq T$. Примененный метод TST приводит к тому, что граничные эффекты при расширении интервала наблюдения сигнала $0 \leq t \leq T_1$ оказываются в центральной части нового интервала T_1 , вне области действия граничных эффектов CWT.

На втором этапе применения метода TST отображаются значения $V(v, t)$, расположенные в начале интервала $[0; t_{min}]$ и в конце интервала $[t_{min}; T_1 - t_{min}]$. Последующий перенос начала отсчета времени из точки $t = t_{min}$ в точку $t = 0$ восстанавливает первоначальный интервал наблюдения $t = [0; T]$ и позволяет сравнивать значения $V(v, t)$ с учетом граничных условий с истинным поведением сигнала $y(t)$. Такой обратный перенос сигнала восстанавливает первоначальную шкалу времени $[0, T]$. Одновременно это позволяет правильно учесть низкочастотные флуктуации сигнала, которые происходят на левом и на правом краю этого интервала $[0, T]$.

Таким образом, метод TST, примененный для численной реализации CWT, позволил сохранить важную информацию об амплитудно-частотном поведении сигналов вблизи начала и вблизи конца интервала наблюдения.

4. Вычисление спектральных интегралов $E_\mu(t)$

Во Введении было сказано о том, что метод оценки стабильности, основанный на анализе дисперсии Аллена $\sigma_{Al}(\tau)$, не может обнаружить моменты времени t , в которых происходят сильные флуктуации сигнала QFS в различных спектральных диапазонах. Для того чтобы решить эту задачу, разработаем технику спектральных интегралов, основанных на CWT. Для этого разобьем весь диапазон частот ν на некоторые спектральные диапазоны $\mu = \{ULF, VLF, LF, HF\}$, имеющие следующие границы:

$$ULF = [\nu_{\min}; F_{ULF}], \quad VLF = [F_{ULF}; F_{VLF}],$$

$$LF = [F_{VLF}; F_{LF}], \quad HF = [F_{LF}; F_{HF}],$$

причем $\nu_{\min} = 1.984 \cdot 10^{-4}$ Hz, $F_{ULF} = 0.030$ Hz, $F_{VLF} = 0.08$ Hz, $F_{LF} = 0.3$ Hz, $F_{HF} = 0.75$ Hz. Такое деление на поддиапазоны μ соответствует делению всего спектра на сверхнизкие ULF (ultra low frequencies), очень низкие VLF (vary low frequencies), низкие LF (low frequencies) и высокие HF (high frequencies) частоты флуктуаций. При таком делении характерные периоды колебаний изучаемых флуктуаций составят: $T_{\min} \approx 5000$ s, $T_{ULF} \approx 30$ s, $T_{VLF} \approx 13$ s, $T_{LF} \approx 3$ s, $T_{HF} \approx 1.3$ s. Поведение спектрального интеграла $E_{ULF}(t)$, определяемого формулой (4), для сигнала QFS представлено на рис. 5. Тонкой линией изображены значения $E_{ULF}(t)$, полученные с помощью метода TST на интервалах времени $0 < t < t_{off}$ и $T - t_{off} < t \leq T$. На интервале времени $t_{off} < t < T - t_{off}$ значения $E_{ULF}(t)$, полученные без использования метода TST (жирная линия), и с использованием метода TST (тонкая линия), совпадают. Характерная продолжительность вспышки в диапазоне ULF составляет величину $\tau_{ULF} \approx 700$ s. Если привести значения $E_\mu(t)$ для других спектральных диапазонов $\mu = \{VLF, LF, HF\}$, то эти кривые также показывают сильную нестационарность сигнала QFS. Подтверждением этого факта являются сильно изменяющиеся спектральные интегралы $E_{VLF}(t)$, $E_{LF}(t)$, $E_{HF}(t)$, изображенные на рис. 6–9. Однако характерные величины продолжительностей вспышек

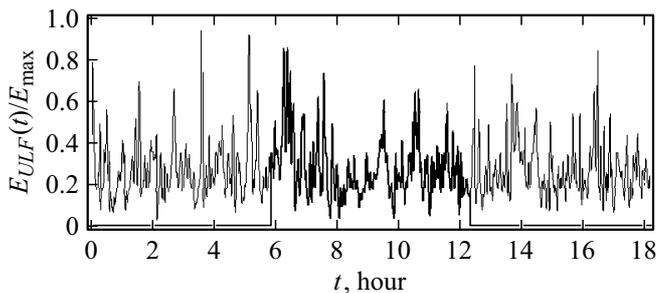


Рис. 5. Зависимость спектрального интеграла $E_{ULF}(t)/E_{\max}$, нормированного на свое максимальное значение, от времени t .

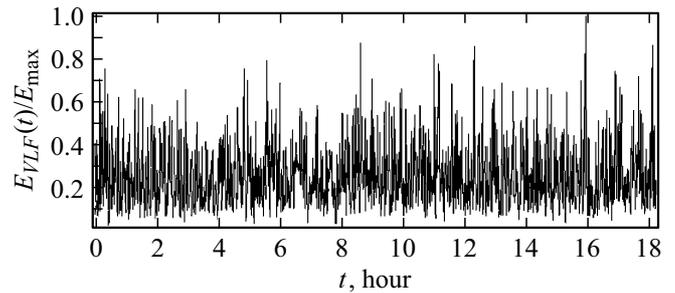


Рис. 6. Зависимость спектрального интеграла $E_{VLF}(t)/E_{\max}$, нормированного на свое максимальное значение, от времени t .

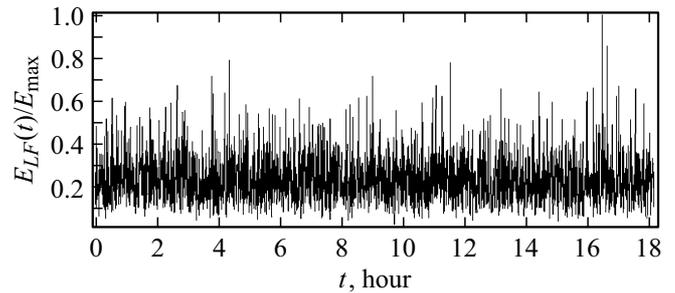


Рис. 7. Зависимость спектрального интеграла $E_{LF}(t)/E_{\max}$, нормированного на свое максимальное значение, от времени t .

в таких спектральных интервалах $\tau \approx 130$ s, $\tau_{LF} \approx 40$ s, $\tau_{HF} \approx 15$ s становятся меньше.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что нестационарный сигнал QFS может быть представлен как совокупность вспышек в различных спектральных диапазонах. Каждая такая вспышка характеризуется временем своего максимума и своей протяженностью во времени.

На рис. 9 вычислено отношение $\frac{\sigma_W(n)}{\sigma}$ в зависимости от времени $t_n = n\Delta t$. Среднеквадратичное вейвлет-отклонение $\sigma_W(n)$ (5) найдено с помощью CWT $V(Q, n)$ сигнала $y(n)$. Заметим, что при численном определении поведения спектральных интегралов $E_\mu(t_n)$ и вейвлет-дисперсии $\sigma_W(t_n)$ необходимо выбирать минимально возможное значение приращения по времени, равное Δt . Это связано с тем, что все эти вычисляемые величины сильно флуктуируют по времени. При численном расчете $\sigma_W(n)$ нижним пределом интегрирования в выражении (5) является величина $Q_{\min} = \nu_{\min}\Delta t$, а верхним пределом — $Q_{\max} = F_{HF}\Delta t$. Сравнивая рис. 1 с рис. 9, мы видим, что максимальные вспышки сигнала QFS достигают величины $\sqrt{y_{\max}^2}/\sigma \approx 4.4$. Для вейвлет-дисперсии $\sigma_W^2(n)$ максимальная величина $\sigma_{W \max}/\sigma \approx 1.7$. Результат снижения величины $\sqrt{y_{\max}^2}/\sigma$ по сравнению с $\sigma_{W \max}/\sigma$ связан с тем, что вейвлет-дисперсия, вычисленная для каждого момента времени $t_n = n\Delta t$, представляет собой величину, усредненную как по времени, так по всему диапазону частот. Величина $\sigma_{Al}(\tau)$, основанная на измерении разности средних для двух последовательных из-

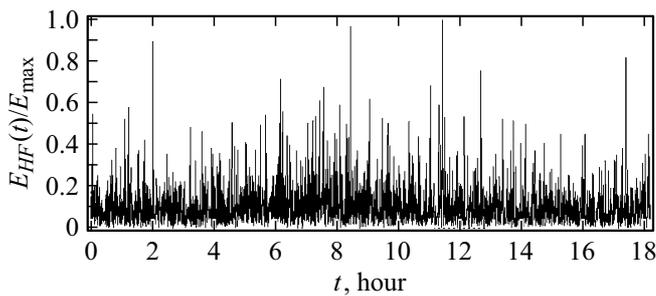


Рис. 8. Зависимость спектрального интеграла $E_{HF}(t)/E_{\max}$, нормированного на свое максимальное значение, от времени t .

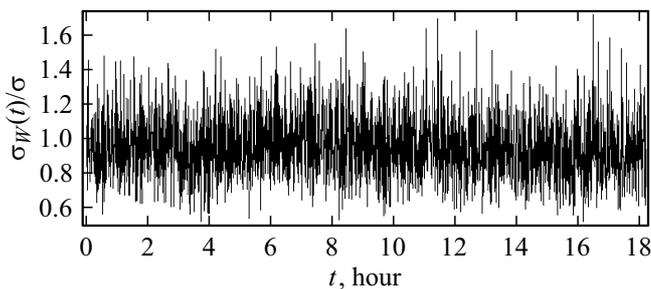


Рис. 9. Зависимость отношения $\sigma_w(t)/\sigma$ от времени t .

мерений частоты и вычисленная в предположении стационарного эргодического процесса, оказывается примерно на два порядка меньше, чем σ . Это свидетельствует о том, что введенная нами величина $\sigma_w(n)$ соответствует реальным параметрам стабильности QRS.

С математической точки зрения учет граничных условий позволяет выполнить условия теоремы Парсеваля, включив в рассмотрение низкочастотные флуктуации сигнала QRS на границах интервала наблюдения, которые обычно не учитываются. Величина $\sigma_{Al}(\tau)$, основанная на измерении разности средних для двух последовательных измерений частоты и вычисленная в предположении стационарного эргодического процесса, оказывается примерно на два порядка меньше, чем σ ($\sigma_{Al}(\tau) \ll \sigma$). Подтверждением этого неравенства является анализ слагаемых в формуле суммирования для дисперсии Аллена (1) и сравнение его с равенством Парсеваля. Аргумент времени τ в формуле Аллена (1) не показывает тех моментов времени, в которых QFS испытывает сильные флуктуации сигнала. Наилучшим показателем развития флуктуаций QFS во времени являются найденные нами спектральные интегралы $E_\mu(t)$ в конкретных диапазонах частот $\mu = \{ULF, VLF, LF, HF\}$. Аргумент времени t_n для вейвлет-дисперсии $\sigma_w^2(t_n)$ указывает на моменты развития сильных флуктуаций работы QFS. При вычислении $\sigma_w^2(t_n)$ производится усреднение флуктуаций по всем спектру частот, а также по интервалу времени, зависящему от этих диапазонов частот. Эти аргументы позволяют сделать вывод о том, что

спектральные интегралы и вейвлет-дисперсия позволяют точнее диагностировать стабильность работы QFS.

Заключение

Проведено обобщение дисперсии Аллена, характеризующей стабильность работы квантового стандарта частоты, на случай нестационарного сигнала. Предложен и развит новый подход, основанный на вейвлетном преобразовании, для анализа нестационарного сигнала квантового стандарта частоты. Непрерывное вейвлет-преобразование сигнала обобщено для дискретного сигнала, показывающего относительное отклонение частоты от ее эталонного значения. Применен метод трансляционного переноса сигнала для устранения граничных эффектов непрерывного вейвлетного преобразования как на начальных, так и на конечных временах изучения сигнала. На основе анализа спектральных интегралов показано, что нестационарный сигнал квантового стандарта частоты представляет собой систему вспышек активности в каждом спектральном диапазоне.

Вычислено значение вейвлет-дисперсии сигнала при усреднении как по времени, так и по всем спектральным диапазонам. Определены моменты времени, в которых наблюдается нестабильность работы квантового стандарта частоты в конкретном спектральном диапазоне.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 18-32-20022_мол_а_вед.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] J. Vanier. Appl. Phys. B, **81**, 421 (2005).
- [2] Дж.Л. Холл. УФН, **176** (12), 1353 (2006).
- [3] В.Л. Величанский, М.А. Губин. УФН, **179** (11), 1219 (2009). [V.L. Velichansky, M.A. Gubin. Phys. Usp., **52**, 1153 (2009)].
- [4] Fr. Riehle. *Frequency Standards. Basic and Applications* (Wiley-VCH, 2004).
- [5] А.В. Тайченачев, В.И. Юдин, С.Н. Багаев. УФН, **186**, 193 (2016). [A.V. Taichenachev, V.I. Yudin, S.N. Bagayev. Phys. Usp. **59**, 184 (2016)].
- [6] D.W. Allan. Proc. IEEE, **54** (2), 221 (1966).
- [7] А.Г. Чирков, Б.Г. Матисов. *Современная теория стабильности прецизионных генераторов* (Изд-во Политехнического ун-та, СПб., 2010).
- [8] С.А. Зибров, В.Л. Величанский, А.С. Зибров, А.В. Тайченачев, В.И. Юдин. Письма в ЖЭТФ, **82** (8), 534 (2005). [S.A. Zibrov, V.L. Velichansky, A.S. Zibrov, A.V. Taichenachev, V.I. Yudin. JETP Lett., **82** (8), 477 (2005)].

- [9] К.А. Баранцев, Е.Н. Попов, А.Н. Литвинов, В.М. Петров. Радиотехника, **12**, 164 (2016).
- [10] M.A. Hafiz, G. Coget, M. Petersen, C. Rocher, S. Guérandel, Th. Zanon-Willette, E. de Clercq, R. Boudot. Phys. Rev. Appl., **9**, 064002 (2018).
- [11] S. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing, 3rd ed.* (Academic Press, NY., 2008).
- [12] C.K. Chui. *An Introduction to Wavelets* (Academic Press, NY., 1992).
- [13] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelet* (Society for industrial and applied mathematics. Philadelphia, 1992).
- [14] O.A. Rosso, M.T. Martin, A. Plastino. Physica A, **347**, 444 (2005).
- [15] M.E. Pereyra, P.W. Lamberti, O.A. Rosso. Physica A, **379** (1), 122 (2007).
- [16] A.E. Hramov, A.A. Koronovckii, V.A. Makarov, A.N. Pavlov. *Wavelets in neuroscience* (Springer Series in Synergetics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2015).
- [17] С.В. Божокин, С.В. Жарко, Н.В. Ларионов, А.Н. Литвинов, И.М. Соколов. ЖТФ, **87** (6), 822 (2017). [S.V. Bozhokin, S.V. Zharko, N.V. Larionov, A.N. Litvinov, I.M. Sokolov. Techn. Phys., **62** (6), 837 (2017).]
- [18] S.V. Bozhokin, N.B. Suvorov. Biomed. Radioelektron, **3**, 21 (2008).
- [19] S.V. Bozhokin, I.B. Suslova. Physica A, **421**, 151 (2015).
- [20] С.В. Божокин, К.А. Баранцев, А.Н. Литвинов. Радиотехника, **84** (1(2)), 15 (2020).