

03

## Теплопроводность за пределами закона Фурье

© А.И. Жмакин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: a.zhmakin0@gmail.com

Поступило в Редакцию 18 июня 2020 г.  
В окончательной редакции 18 июля 2020 г.  
Принято к публикации 21 июля 2020 г.

Закон Фурье адекватно описывает теплоперенос в большинстве практических макроскопических задач. Однако в случаях теплообмена в быстропотекающих процессах, теплопереноса на микро- и наномасштабах, теплообмена в материалах с внутренней структурой (пористые среды, биологические ткани) требуются иные модели, учитывающие нелинейные эффекты, а также временную (память) и пространственную нелокальность. Рассмотрены такие модели, включая модели с задержкой, фононные и термодинамические модели, а также модели, использующие дифференциальные уравнения в дробных производных.

**Ключевые слова:** закон Фурье, DPL-модель, теплоперенос, термодинамические и дробные модели, релаксон.

DOI: 10.21883/JTF.2021.01.50267.207-20

### Введение

Модель Фурье основана на определяющем соотношении

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}, t),$$

которое после подстановки в уравнение сохранения энергии для покоящегося твердого тела

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} = \nabla \mathbf{q} + Q$$

приводит к классическому параболическому уравнению теплопроводности (также называемому уравнением Фурье–Киркгофа)

$$\frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + Q. \quad (1)$$

Закон Фурье может быть непосредственно выведен в рамках классической неравновесной термодинамики, основанной на гипотезе локального равновесия [1].

С точки зрения неравновесной термодинамики закон Фурье описывает линейную связь между обобщенной силой (градиент температуры) и обобщенным потоком (тепловой поток) [2].

Закон Фурье справедлив, если

- $\frac{L}{\Lambda} \gg O(1)$ ,
- $\frac{t}{\tau} \gg O(1)$ ,
- $T \gg 0 \text{ K}$ ,

где  $L$  — характерный размер системы,  $\Lambda$  — средняя длина свободного пробега носителей тепла,  $\tau$  — время

релаксации. Отношение  $Kp = \Lambda/L$  называется числом Кнудсена как в динамике разреженных газов.

Тепловые волны в виде „второго звука“ [3] в гелии II при 1.4 К наблюдались В. Пешковым в 1944 г. со скоростью около 19 м/с, что на порядок величины меньше скорости звука в гелии II [4].

Позднее второй звук наблюдался при криогенных условиях в других материалах [5,6] твердом гелии-3 [7], флуориде натрия при 10 К [8–10]), висмуте (при 3.4 К [11]), сапфире, титанате стронция [12], в графите при температуре выше 100 К [13].

Волновая природа распространения тепла и релаксационные процессы становятся доминирующими, а эффекты „памяти“ материала и нелинейные и нелокальные эффекты существенными при:

- ультрабыстром нагреве (лазерный нагрев и плавление [14]<sup>1</sup>, например, фемтосекундном нагреве металлических пленок [16–18] или тонких пленок твердого аргона [19]), быстром затверждении жидких металлов [20], переходе в стеклообразное состояние переохлажденных жидкостей [21], экспериментах с импульсами тепла при комнатной температуре [22];
- теплопереносе на наномасштабах [23–26] (микроэлектронные приборы [27–30], например, „горячие“ в нанотранзисторах [31–34], наноструктурные термоэлектрические приборы [35], гетероструктуры [36], лазерная плазма при облучении маленьких мишеней [37]), теплообмен в ДНК при денатурации („плавления“) разворачивании двойной спирали в две обособленные полосы [38]<sup>2</sup>;

<sup>1</sup> Импульсный лазер обеспечивает лучшую локализацию тепла по сравнению с непрерывным лазером [15].

<sup>2</sup> Закон Фурье значительно переоценивает скорость диссипации тепла от источников с размерами меньше длины свободного пробега фононов [39], что существенно при анализе тепловых режимов микроэлектронных приборов. Эта проблема, однако, становится не столь острой с учетом нового явления „коллективной диффузии“,

- теплопереносе в гранулированных и пористых средах [40,41], включая пористый кремний [42];
- теплопереносе в биологических тканях [43–49].

Следует заметить, что ошибки, связанные с использованием закона Фурье вне области его применимости, иногда несущественны. Например, Вилсон и Кахилл [50] перечислили причины, по которым ошибки в определении теплопроводности алмаза не важны при анализе тепловых режимов микроэлектронных приборов, использующих алмазные распределители тепла:

1) баллистико-диффузионные эффекты в поликристаллических пленках алмаза, выращенных методом химического осаждения из газовой фазы, значительно меньше, чем в монокристаллах из-за рассеяния фононов на границах зерен;

2) по крайней мере, в GaN-транзисторах с высокой подвижностью электронов теплопроводность подложки существенна только при размерах активной области, испытывающей перегрев, более  $1\ \mu\text{m}$ ;

3) при достаточно высокой плотности приборов горизонтальные градиенты температуры малы.

Импульсные лазеры с длительностью импульса от наносекунд до фемтосекунд используются в широком спектре медицинских технологий: оптическая томография [51], фотодинамическая терапия [15,52], гипертермия [53–57]. Контроль температуры в тканях может быть усилен путем инъекции наноструктур [58].

Источник возникновения запаздывания по времени, присутствие в материале разных носителей энергии [59] (хорошо известный в физике твердого тела пример — релаксация энергии между электронной и фононной подсистемами), например, перенос энергии от свободных электронов решетке [60,61] в металлах, нагреваемых ультракороткими лазерными импульсами [62,63]), или в материалах с гетерогенной внутренней структурой.

Биологические ткани содержат клетки, суперструктуры, жидкие и твердые элементы. Нагрев или охлаждение биологических тканей вызывает серию химических, электрических и механических процессов, например, диффузию, изменение электрического потенциала, осмотические потоки через клеточную мембрану; клеточные мембраны могут запасать энергию [64]. Таким образом, распространение тепла в биологических тканях задействует энергетические обмены на разных уровнях [64–66].

Известны различные подходы к экспериментальному исследованию теплопереноса на микро- и наномасштабах:

- $3\omega$ -метод [67] (этот метод основан на измерении третьей гармоники в напряжении при нагреве образца синусоидальной волной с частотой  $\omega$ );
- сканирующая тепловая микроскопия [68];

открытого недавно Хугенбум–Потом и др. [39]: когда расстояние между наноразмерными источниками тепла становится малым в сравнении с длиной свободного пробега фононов, возникает рассеяние фононов на фононах, „происходящих“ из соседнего источника тепла, что увеличивает интенсивность диссипации тепла.

- биметаллические приборы;
- оптические методы;
- когерентные рентгеновские методы;
- исследования тепловых отражений.

В последнее время активно используются вычислительные методы:

- вычисления, основанные на „первых принципах“ (*ab initio*);
- неравновесная функция Грина;
- метод молекулярной динамики [69];
- метод Монте-Карло;
- многомасштабные вычисления.

В однородных материалах время релаксации составляет от  $10^{-8}$  до  $10^{-14}$  s [[70–72] (например, это время равно 3 ps для кремния [73], 4.–6.4 ps для ртути, 5.1–7.3 ps для расплавленного галлия [74]), однако время релаксации в гранулированных средах и биологических объектах может составлять до 30 s. Например, Камински [70] сообщил о релаксационном времени 20 s для песка и 30 s для  $\text{NaHCO}_3$ , Митра и др. [75] измерили релаксационное время в 15 s для обработанного мяса.

Однако Грассман и Петерс [40] и Хервиг и Беркерт [76] не обнаружили доказательств гиперболического характера распространения тепла в материалах с неоднородной внутренней структурой. Эти расхождения Ретцел и др. [77] объяснили методическими погрешностями ранних экспериментов независимым определением теплофизических свойств материала и измерением релаксационного времени. Ретцел и др. все параметры находили одновременно из единого эксперимента. Они подтвердили отклонения от закона Фурье, но получили меньшие значения релаксационного времени (2.26 s для песка, 1.77 s для обработанного мяса).

В более поздних экспериментах Антаки и др. [78] измерили релаксационное время 2 s для обработанного мяса.

О наблюдениях тепловых волн в живых тканях см. обзор [79]. Ошибки в предсказании распределения температуры в тканях при криохирургии и криосохранении могут проявляться в виде термоупругих напряжений [80–82] и появлении трещин в тканях [83, 84] из-за значительного теплового расширения [85]. Механические волны наблюдались также в пленках твердого аргона при внезапном нагреве [86].

Yu Т.Н. и др. [87] использовали метод низкочастотного импеданса для изучения реакции биологических тканей на мгновенное переключение сильного охлаждения и нагрева.

Для анализа теплопереноса в живых биологических тканях необходимо учесть вклад в теплообмен потоков артериальной и венозной крови [49,88,89].

Континуальные модели теплопереноса с учетом кровеносной системы разрабатываются путем осреднения эффекта большого числа кровеносных сосудов в рассматриваемой области биологических тканей. Наиболее известная и, безусловно, самая важная континуальная

модель была предложена в 1948 г. Пеннесом [90] и называется уравнением Пеннеса (иногда также „моделью теплового стока“ [91])

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \lambda \nabla T + Q_p, \quad (2)$$

$$Q_p = c_b \omega_b (T_a - T) + \dot{q}_{met} + Q_{ext}, \quad (3)$$

где  $T$ ,  $\rho$ ,  $c$  и  $\lambda$  — температура, плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность тканей как однородной среды,  $\omega_b$  — скорость перфузии крови,  $c_b$  — удельная теплоемкость крови,  $T_a$  — температура артериальной крови,  $\dot{q}_{met}$  и  $Q_{ext}$  — тепловые источники из-за метаболических реакций (этими источниками обычно можно пренебречь в задачах криобиологии) и внешний источник энергии.

Очевидное расширение, приводящее к нелинейному („модифицированному“) уравнению Пеннеса, состоит в учете температурной зависимости скорости перфузии крови  $\omega_b = \omega_b^0 + \omega_b^1 T$  [92].

Отклонения от закона Фурье наблюдаются также для объектов пониженной размерности (систем, ограниченных в пространстве [93]) таких, как тонкие пленки, углеродные и нитрид-боровые нанотрубки, нанопроволоки, полосы графена [94–96], полимерные цепи [97,98]. Объекты низкой размерности демонстрируют так называемый „эффект масштаба“ или „размерный эффект“: теплопроводность уменьшается с размером образца. Например, теплопроводность кристаллических нанопроволок значительно ниже значений для объемного материала и уменьшается с диаметром проволоки [42] и увеличением шероховатости поверхности [99].

Объясняющая такое поведение модель комбинирует некогерентное рассеяние на поверхности коротковолновых фононов и почти баллистическое распространение длинноволновых фононов.

Теплопроводность сверхрешеток значительно уступает теплопроводности составляющих их материалов.

При дальнейшем уменьшении размеров нанопроволока переходит в молекулярную цепь, а тонкие пленки — в молекулярные полосы. Знаменитый численный эксперимент Ферми, Пасты и Улама показал, что теплопроводность длинной цепи взаимодействующих частиц может расходиться с длиной цепи как положительная степень длины цепи в одномерном случае и демонстрировать логарифмическую расходимость в двумерных задачах [100] для так называемых интегрируемых систем (цепь FPU, неупорядоченная гармоническая цепь, одномерный двухатомный газ, двухатомная решетка Тоды). Эта проблема и ее связь с экстремально высокой теплопроводностью нанотрубок из углерода и нитрида бора [101,102] и полос графена не рассматриваются в настоящем обзоре. Эти вопросы подробно обсуждены в обзорах S. Lepri, R. Livi, A. Politi, Thermal conduction in classical low-dimensional lattices, Phys. Rep., **377** (1), 1 (2003), S.R. Xie, G. Zhang, B. Li Liu, X. Xu, Anomalous heat conduction and anomalous diffusion in low dimensional nanoscale systems,

Eur. Phys. J. B, **85**, 337 (2012) и монографии S. Lepri, *Thermal Transport in Low Dimensions: from Statistical Physics to Nanoscale Heat Transfer, Lecture Notes in Physics Book 921*. (Springer, 2016).

Следует помнить, что температура в точке строго определяется при наличии локального равновесия, поэтому можно достоверно рассматривать разность температур между точками, разделенными расстоянием не меньше длины свободного пробега носителей энергии [103,104].

Разработан ряд обобщающих закон Фурье моделей путем модификации определяющего соотношения между градиентом температуры и тепловым потоком. Большинство этих моделей учитывают временную нелокальность („память“ материала), некоторые включают эффекты пространственной нелокальности для материалов с внутренней структурой. Такахаша [105] отметил, что пространственная нелокальность связана с появлением масштаба, промежуточного между микро- и макро- масштабами мезомасштаба.

## 1. Модели с задержкой

Общее соотношение для теплового потока можно записать как [106]:

$$\mathbf{q} = \int_{-\infty}^t Q(t-t') \nabla T dt',$$

где  $Q(s)$  — положительная убывающая функция, называемая релаксационным ядром типа Джеффри [107–109]), стремящаяся к нулю при  $s \rightarrow \infty$ . Для  $Q(s) = \lambda \delta(s)$ , где  $\delta(s)$  — функция Дирака, мы получаем закон Фурье (1).

Различный выбор определяющего соотношения приводит к различным моделям „с задержкой“ (см. [59,64,110,111] и цитированную там литературу).

### 1.1. Уравнение Максвелла–Каттанео–Вернотта

Определяющее соотношение для теплового потока типа Джеффри имеет вид [107,112]:

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T - \tau \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \nabla T. \quad (4)$$

Для случая  $\lambda_1 = 0$  уравнение (4) сводится к хорошо известному уравнению Каттанео (также называемому уравнением Максвелла–Каттанео–Вернотта) — определяющему соотношению, полученному независимо Морсом и Фешбахом (1953), Грэдом (1958) и Верноттом (1958)

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad (5)$$

и, если дополнительно  $\tau = 0$  — к закону Фурье.

Уравнение Каттанео может быть получено в рамках расширенной неравновесной термодинамики [1,113], которая рассматривает диссипативные потоки, такие, как поток тепла, основные независимые переменные. Таким образом, энтропия зависит от внутренней энергии и теплового потока  $s = s(u, q)$  и следует эволюционному уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \mathbf{J}^s = \sigma^s \geq 0,$$

где  $\mathbf{J}^s$  — поток энтропии,  $\sigma^s$  — скорость производства энтропии.

Определение неравновесной температуры как  $T^{-1} = \partial s / \partial u$  и предположение, что  $\partial s / \partial q = -\alpha T$ , где  $\alpha$  — материальный коэффициент, приводит (с учетом баланса энергии для находящегося в покое твердого тела) к уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} + \mathbf{q} \cdot \left( \nabla T^{-1} - \alpha \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right),$$

и, таким образом:

$$\sigma^s = \mathbf{q} \cdot \left( \nabla T^{-1} - \alpha \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \right).$$

Простейший способ обеспечить положительность производства энтропии  $\sigma^s$  — предположить линейную связь между тепловым потоком и термодинамической силой (в скобках)

$$\nabla T^{-1} - \alpha \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mu \mathbf{q},$$

где  $\mu$  — положительный коэффициент. Вводя обозначения  $\alpha / \mu = \tau$ ,  $\mu^{-1} \cdot T^{-2} = \lambda$ , получим уравнение Каттанео.

Жоу и Касас-Вазуэз [114] показали, что подобным способом можно включить в уравнение Каттанео нелокальные члены, предполагая, что обобщенная энтропия, поток энтропии и производство энтропии явно зависят от теплового потока тензора  $\hat{Q}$ :

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T + l^2 \nabla^2 \mathbf{q}.$$

Это уравнение отличается от уравнения Гюера—Крумхансла (см. ниже) отсутствием членов вида  $\nabla \nabla \cdot \mathbf{q}$ .

Время релаксации  $\tau$  — время задержки, необходимое для установления стационарного потока тепла в объемном элементе, к которому приложен градиент температуры; временная задержка — результат „тепловой инерции“.

Тепловые возмущения в этой модели распространяются с конечной скоростью

$$s = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho C \tau}}.$$

Оценки времени релаксации для твердых тел и разреженных газов могут быть записаны соответственно как [74]:

$$\tau_s = \frac{3\lambda}{\bar{c}^2}$$

и

$$\tau_g = \frac{3\nu}{\bar{c}^2},$$

где  $\bar{c}$  — скорость фононов в твердом теле или средняя скорость молекул в газе

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}},$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость газа,  $m$  — масса молекулы.

Иногда используется число Каттанео, определяемое как

$$Ca = \frac{\kappa \tau}{L^2},$$

где  $\kappa = \lambda(\rho C)$  — температуропроводность.

Определяющее соотношение Каттанео (5) можно рассматривать как результат разложения в ряд Тэйлора:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t + \tau) = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}, t),$$

называемое иногда „улучшенным“ соотношением Каттанео или моделью с одиночной задержкой (single-phase lag — SPL-модель) [18]. Чен и др. [115] вывели уравнения SPL модели из уравнения Больцмана, используя для производной по времени аппроксимацию

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t + \tau) - f(t)}{\tau}.$$

Недавно Ли и Цао [116] отметили, что модель Каттанео не следует рассматривать как частный случай SPL-модели, поскольку величина отброшенных членов разложения Тэйлора неизвестна и может быть значительной.

Определяющее соотношение Каттанео (5) можно представить как интеграл градиента температуры

$$\mathbf{q} = -\frac{\lambda}{\tau} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \nabla T dt'.$$

Таким образом, модифицированное уравнение Фурье (уравнение Каттанео) можно записать (для случая постоянных свойств) как [117,118]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T.$$

Это уравнение можно рассматривать как частный случай телеграфного уравнения.

Франкел и др. [119] заметили, что альтернативная формулировка — в терминах теплового потока (скалярные уравнения для трех компонент в общем случае) — может быть полезна для задач с граничными условиями, включающими тепловой поток. Распределение температуры в этом случае находится интегрированием уравнения сохранения энергии

$$T(t) = T(0) + \int_0^t \frac{1}{\rho c} [-\nabla \cdot \mathbf{q}(t') + Q] dt'.$$

Нир и Цао [120] сравнили три группы численных методов, использующих различные представления через температуру, тепловой поток и гибридное представление, и нашли последний способ предпочтительным.

Иногда уравнение Каттанео называют демпфированной версией уравнения Фурье [121].

Модель Каттанео устраняет парадокс бесконечной скорости распространения возмущений, но вводит новый: уравнение Каттанео не является инвариантным относительно преобразований Галилея: скорость распространения возмущений в системе, движущейся со скоростью  $U$ , являются нелинейной функцией  $U$  [122]:

$$c_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ U \pm \sqrt{U^2 + 4} \right].$$

Этот парадокс устраняется, когда вместо частной производной по времени используется материальная производная [122]. Позднее Христов [123] предложил использовать независящую от системы координат конвективную производную Олдройда [124] и записывать уравнение Каттанео в виде

$$\tau \left[ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} \right] + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T.$$

Джозеф и Презиози [107] предложили записывать релаксационное ядро в виде  $R_{JP} = \lambda_1 \delta(s) + (\lambda_2/\tau) \exp(-s/\tau)$ , где  $\lambda_1$  — эффективная теплопроводность и  $\lambda_2$  — упругая теплопроводность. В этом случае тепловой поток (в одномерном приближении)

$$q = -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\lambda_2}{\tau} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau}\right) \frac{\partial T}{\partial x} ds.$$

Барлетта и Занчини [125–127] проанализировали совместимость уравнения Каттанео со вторым законом термодинамики и рассмотрели парадокс Тайфеля (превышение температурой граничных значений для слоя, поверхности которого имеют различную температуру) и обнаружили, что производство энтропии может быть отрицательным в областях, где тепловой поток уменьшается быстрее, чем  $\partial \mathbf{q}/\partial t > |\mathbf{q}|/\tau$ . Однако этот результат нельзя рассматривать как нарушение второго закона классической термодинамики, основанной на гипотезе локального равновесия, которая не выполняется [128]. Закон Каттанео совместим со вторым законом в расширенной неравновесной термодинамике [129,130].

Ли и Цао [131] изучали термодинамические проблемы SPL-модели. Используя выражение для скорости производства энтропии

$$S = -\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla T}{T^2}$$

классической неравновесной термодинамики, авторы получили для уравнения Фурье

$$S_F = -\frac{q^2}{\lambda T^2} \geq 0$$

и для SPL-модели

$$S_{SPL}^{CIT} = -\frac{\mathbf{q}(t) \cdot \mathbf{q}(t + \tau)}{\lambda T^2}.$$

Очевидно, что скорость производства энтропии для SPL-модели не обязательно положительна или равна нулю. Второй закон удовлетворяется в расширенной неравновесной термодинамике [129], в которой скорость производства энтропии равна

$$S_{SPL}^{EIT} = -\frac{\mathbf{q}(t + \tau) \cdot \mathbf{q}(t + \tau)}{\lambda T^2}.$$

В биологических задачах уравнение Каттанео (с добавлением источников членов из уравнения Пеннесса (2),(3)) часто называется моделью тепловой волны [132], иногда используется термин „температурная волна“ [133].

## 1.2. Модели с двойной задержкой

Для учета как эффектов релаксации, так и микроструктуры вводятся модели с двойной задержкой (DPL-модели) [134–136]

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t + \tau_q) = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}, t + \tau_T), \quad (6)$$

где  $\tau_q$  и  $\tau_T$  — времена задержки для теплового потока и градиента температуры, возникающие вследствие „тепловой инерции“ и „микроструктурных взаимодействий“ [137].

DPL-модель сводится к SPL-модели (модели с одиночной задержкой) при  $\tau_T = 0$  и к закону Фурье при  $\tau_T = \tau_q = 0$ .

Оба релаксационных времени чрезвычайно малы для обычных материалов. Например,  $\tau_q$  и  $\tau_T$  для золота составляют 8.5 и 90 ps соответственно [138].

В опубликованных данных по времени релаксации в биологических тканях много противоречий. Эти времена составляют от 14–16 до 0.043–0.056 s для обработанного мяса [78], эксперименты с мышцами коровы дают значения 7.36–8.43 и 14.54–21.03 s. [139]. Жанг [140] изучал релаксационное время в зависимости от свойств тканей и крови и ввел межфазный конвективный коэффициент.

Уравнение (6) может быть переписано через разность релаксационных времен

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \nabla T(\mathbf{r}, t + (\tau_T - \tau_q)).$$

Таким образом, DPL-модель не зависит от релаксационных времен  $\tau_T$  и  $\tau_q$  по отдельности, а только от их разности [141], и SPL- и DPL-модели математически эквивалентны [142].

DPL-модель близка [143] к гиперболическим моделям, описывающим обмен энергией между электронами и фононами [144–146], которые в одномерном случае имеют

вид

$$\begin{aligned} c_e \frac{\partial T_e}{\partial t} &= -\frac{\partial q}{\partial x} - G(T_e - T_l) + Q, \\ c_l \frac{\partial T_l}{\partial t} &= G(T_e - T_l), \\ \tau \frac{\partial q}{\partial t} + \lambda \frac{\partial T_e}{\partial x} + q &= 0, \end{aligned}$$

где  $T_e$  — температура электронного газа,  $T_l$  — температура решетки,  $c_e$  и  $c_l$  — теплоемкости электронного газа и решетки соответственно,  $G$  — коэффициент связи электрон-фонон.

Тзоу [147] оценил релаксационные времена DPL-модели через параметры  $G$ ,  $c_e$ ,  $c_l$  и получил для меди, серебра, золота и свинца значения  $\tau_T$  и  $\tau_q$  около  $10^{-11}$  и  $10^{-13}$  соответственно.

Жанг [148] предложил явные выражения для теплообмена в тканях

$$\begin{aligned} \tau_q &= \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{C_{tb}} + (1-\varepsilon)} \frac{\rho_b C_b}{G}, \\ \tau_T &= \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{\frac{\varepsilon}{K_{tb}} + (1-\varepsilon)} \frac{\rho_b C_b}{G}, \end{aligned}$$

где  $C_{tb} = (\rho_t C_t)/(\rho_b C_b)$  — отношение теплоемкостей тканей и крови,  $K_{tb} = \lambda_t/\lambda_b$  — отношение теплопроводностей,  $\varepsilon$  — пористость тканей,  $G$  — конвективно-перфузионный параметр.

Тзоу и Дай [149] рассмотрели задержки в системе со многими носителями. Уравнения для системы с  $N$ -носителями записываются как

$$\begin{aligned} C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} &= \lambda_1 \nabla^2 T_1 - \sum_{j=2}^N G_{1j}(T_1 - T_j), \\ C_m \frac{\partial T_m}{\partial t} &= \lambda_m \nabla^2 T_m + \sum_{j=1}^{m-1} G_{jm}(T_j - T_m) - \sum_{i=m+1}^N G_{mi}(T_m - T_i), \\ m &= 2, 3, \dots, (N-1), \\ C_N \frac{\partial T_N}{\partial t} &= \lambda_N \nabla^2 T_N + \sum_{i=1}^{N-1} G_{iN}(T_i - T_N). \end{aligned}$$

При выводе уравнения для единой температуры в системе трех носителей (например, композитный материал с тремя компонентами или полярные полупроводники, в которых энергия может переноситься электронами, дырками и фононами) Тзоу и Дай обнаружили нелинейные эффекты, связанные с  $\tau_q$  и  $\tau_T$ .

Использование первых членов разложения по  $\tau_q$  и  $\tau_T$  дает

$$q + \tau_q \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \left[ \nabla T + \tau_T \frac{\partial T}{\partial t} \right].$$

Использование этого соотношения в законе сохранения энергии дает DPL-модель типа I [79,150] (также линейная DPL-модель [151]).

Уравнения модели можно переписать в терминах теплового потока вместо температуры и даже в терминах потенциала теплового потока, определяемого как  $q = \nabla \phi$  [152].

Ванг и др. [152] доказали корректность DPL-модели на одномерном интервале с однородными граничными условиями Дирихле, Неймана или Робина. Позднее Ванг и Ху [153] обобщили этот результат на  $n$ -мерный случай.

DPL-модель типа II получается, если использованы разложения Тейлора первого и второго порядка для  $q$  и  $T$  соответственно

$$q + \tau_q \frac{\partial q}{\partial t} = -\lambda \left[ \nabla T + \tau_T \frac{\partial \nabla T}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \nabla T}{\partial t^2} \right],$$

и типа III (DPL-модель второго порядка [154]) — когда для  $q$  и  $T$  использованы разложения второго порядка

$$\begin{aligned} q + \tau_q \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\tau_q}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \\ = -\lambda \left[ \nabla T + \tau_T \frac{\partial \nabla T}{\partial t} + \frac{\tau_T}{2} \frac{\partial^2 \nabla T}{\partial t^2} \right]. \end{aligned}$$

Иногда используется иная нотация для различения DPL-моделей с указанием порядков разложения, например DPL (2,1) [155]. Руколайне [156] установил, что решение DPL-модели неустойчиво. Позднее он подтвердил это заключение для DPL-модели типа III [157].

Квинтанилла и Раке [158] (см. также [159]) проанализировали устойчивость решений различных версий DPL-модели. Авторы ввели параметр, контролирующий устойчивость решения, как отношение времен релаксации DPL-модели

$$\xi = \frac{\tau_T}{\tau_q}.$$

Авторы рассмотрели характеристический полином, связанный с преобразованием Лапласа в ограниченной области для случая условий Дирихле. Поведение решения определяется действительной частью собственного значения.

Результаты исследования можно суммировать как

- если использовано приближение первого порядка по  $\tau_q$  и первого или второго по  $\tau_T$ , система всегда устойчива;
- если использовано приближение второго порядка по  $\tau_q$  и первого по  $\tau_T$ , система устойчива, если  $\xi > 1/2$ , и неустойчива, если  $\xi < 1/2$ ;
- если использовано приближение второго порядка по  $\tau_q$  и  $\tau_T$ , система устойчива, когда  $\xi > 2 - \sqrt{3}$ , и неустойчива, если  $\xi < 2 - \sqrt{3}$ ;
- если  $\xi > 1/2$ , то все типы DPL-моделей ведут себя одинаково.

Условия на отношение  $\xi = \frac{\tau_T}{\tau_q}$  были также выведены Фабрицио и Лаззари из второго закона термодинамики [160].

Совместимость DPL-модели со вторым законом термодинамики в расширенной необратимой термодинамике доказал Ху [161].

Как модель тепловой волны, так и DPL-модель активно используются для расчета теплопереноса в биологических задачах. Например, воздействие лазерного излучения на биологические ткани исследовали Жоу и др. [162], Яних и др. [163], Африн и др. [164], Ахмадикиа и др. [165], Саху и др. [166], Лиу и Ванг [167], Пур и др. [168], Хухманд и др. [169], Кумар и Сривастава [170], Ясински и др. [171]. Жоу и др. [172] решили двумерную (осесимметричную) задачу для двух случаев — поверхностный нагрев и объемный нагрев; авторы нашли многомерные эффекты существенными.

Норузи и др. использовали модель тепловой волны для изучения теплопереноса в полосе при нагреве лазерным излучением и DPL-модель для объемного нагрева полосы [173].

Лиу и др. [132] вычислили изменение температуры при ультразвуковом воздействии в рамках модели тепловой волны. Ли и др. [174] использовали DPL-модель для расчета температурного отклика *ex vivo* при воздействии сфокусированного ультразвукового нагрева на гомогенный фантом биологической ткани и на гетерогенную ткань печени.

Кумар и др. применили конечноэлементный вейвлет-метод Галеркина для исследования гипертермии в предположении гауссова характера внешнего источника тепла [175].

Хо и др. [176] применили метод решетки Больцмана для решения DPL-модели теплопереноса в двуслойной системе.

Моради и Ахмадикиа [177] использовали DPL-модель для расчета теплопереноса при сверхбыстром замораживании биологических тканей (скорость охлаждения около  $1000^\circ/\text{s}$  [178]) когда в замороженной области формируется аморфный лед [44].

Лиу и Чен [179] исследовали гипертермию с применением магнитной жидкости в рамках DPL-модели.

Борялило и др. применили DPL-модель для решения задачи термоупругости — демпфированные колебания микробалки [180].

Чоу и Янг [181] исследовали в двумерной постановке теплоперенос в многослойной структуре с использованием метода пространственно-временных консервативных элементов [182]. Этот метод был разработан для решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса [183] и обеспечивает локальное и глобальное сохранение потока. Авторы установили разные режимы теплообмена: гиперболический, волнообразный, диффузионный, сверхдиффузионный.

### 1.3. Модель с тройной задержкой

Модель с тройной задержкой получается из DPL-модели введением дополнительно к временам релаксации для теплового потока и градиента температуры релаксационного времени для градиента теплового сме-

щения<sup>3</sup> [110, 187–189]

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t + \tau_q) = -[\lambda \nabla T(\mathbf{r}, t + \tau_r) + Cc \nabla v(\mathbf{r}, t + \tau_v)].$$

Модель с тройной задержкой используется также для анализа задач термоупругости (см., например, [190]).

## 2. Фононные модели

Фононы — квантованные колебания решетки (упругие волны могут существовать только для определенных значений энергии). Фононы являются носителями энергии в диэлектрических и полупроводниковых кристаллах. Следует рассматривать различные механизмы рассеяния фононов: нормальное ( $N$ -процесс), Umklapp ( $U$ -процесс), рассеяние на дефектах решетки, рассеяние на границах.

Функция распределения фононов описывается уравнением Больцмана, имеющим вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{P}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{scatt},$$

где  $\mathbf{P}$  — импульс,  $\mathbf{F}$  — внешняя сила.

Часто для линеаризации уравнения Больцмана используется следующая аппроксимация столкновительно-го члена (приближение времени релаксации)

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{scatt} = -\frac{f - f_0}{\tau},$$

где  $f_0$  — равновесное распределение.

Широко распространено приближение Каллавея [6,96]

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{scatt} = -\frac{f - f_\lambda}{\tau_N} - \frac{f - f_0}{\tau_R},$$

где  $f_\lambda$  — функция распределения однородно дрейфующего фононного газа,  $\tau_N$  — время релаксации  $N$ -процесса и  $\tau_R$  — время релаксации  $U$ -процесса.

Наличие фононов с широким спектром означает отсутствие единого значения средней длины свободного пробега фононов, которое определяет режим теплопереноса.

Вычисления на основе первых принципов показывают различные распределения для разных материалов. Например, в кремнии 80% тепла переносится фононами с длиной свободного пробега от 0.05 до  $8 \mu\text{m}$ , а в алмазе 80% тепла переносится фононами с длиной свободного пробега от 0.3 до  $2 \mu\text{m}$  [50]; более 95% тепла в сапфире переносится фононами с длиной свободного пробега короче  $1 \mu\text{m}$  [39].

<sup>3</sup> Тепловое смещение было введено Р. фон Гельмгольцем [184]. Оно удовлетворяет условию  $\dot{v} = T$ . Эта величина была использована Грино и Нагхди [185,186] как „скалярная историческая переменная“  
 $v = \int_0^t T(\tau) d\tau + v_0.$

## 2.1. Уравнение Гюйера–Крумхансла

Гюйер и Крумхансл [191,192] решили линеаризованное уравнение Больцмана, предполагая, что скорость нормального рассеяния много больше скорости  $U$ -процессов при низких температурах. Они предложили феноменологическую связь между фононами и колебаниями решетки, связанными с ее ангармоничностью.

Когда средняя длина свободного пробега фононов превышает размер образца, поведение фононного газа становится подобным кнудсеновскому течению или баллистическому переносу. Авторы определили условия, при которых течение Пуазейля вносит существенный вклад в теплопроводность.

Течение Пуазейля в цилиндре описывается уравнением [114]

$$\Lambda^2 \nabla^2 \mathbf{q} = \lambda T,$$

решение есть  $q(r) = A(R^2 - r^2)$ ,  $A = -(\lambda \nabla T / (\Lambda^2))$ .

Обычно уравнение Гюйера–Крумхансла записывается в виде

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \beta' \Delta \mathbf{q} + \beta'' \nabla \operatorname{div} \nabla \mathbf{q},$$

где  $\beta'$  и  $\beta''$  — коэффициенты Гюйера–Крумхансла (в случае разреженного газа эти коэффициенты связаны с интегралом Каллавея [22]) или

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \Lambda^2 (\nabla^2 \mathbf{q} + 2 \nabla \cdot \nabla \mathbf{q}),$$

где  $\Lambda$  — средняя длина свободного пробега фононов.

Уравнение Гюйера–Крумхансла может быть получено в расширенной неравновесной термодинамике в предположении, что нелокальные члены могут быть включены в выражение для потока энтропии как [1]

$$\mathbf{J}^s = \frac{\mathbf{q}}{T} + \gamma (\mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} + 2 \mathbf{q} \nabla \cdot \mathbf{q}),$$

где  $\gamma$  — положительный коэффициент.

Недавно Кальво–Шварцвальдер и др. [193] использовали уравнение Гюйера–Крумхансла для решения одномерной задачи Стефана.

## 2.2. Баллистико-диффузионная модель

Введенная Ченом [194,195] баллистико-диффузионная модель основана на расщеплении функции распределения (а также внутренней энергии и теплового потока) на две компоненты

$$f = f_b + f_d, \quad e = e_b + e_d, \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_b + \mathbf{q}_d,$$

отражающем сосуществование двух типов носителей тепла:

- баллистические фононы, которые рассеиваются главным образом на границах,
- диффузионные фононы, испытывающие многочисленные акты рассеяния в объеме системы.

Относительная роль этих компонент определяется значением числа Кнудсена и геометрией системы [196].

Янг и др. [197] использовали уравнение Больцмана относительной интенсивности фононов  $I_\omega = \mathbf{v}_\omega \hbar \omega f D(\omega) / (4\pi)$  ( $\mathbf{v}_\omega$  — групповая скорость носителей,  $\omega$  — частота фононов,  $D(\omega)$  — плотность состояний фононов в единице объема,  $S_\omega$  — источниковый член, который может определяться, например, электрон-фононным рассеянием)

$$\frac{\partial I_\omega}{\partial t} + \mathbf{v}_\omega \nabla I_{b\omega} = -\frac{I_\omega - I_{0\omega}}{\tau_\omega} + S_\omega.$$

Уравнения для баллистической и диффузионной частей записываются соответственно как

$$\frac{\partial I_{b\omega}}{\partial t} + \mathbf{v}_\omega \nabla I_{b\omega} = -\frac{I_{b\omega}}{\tau_\omega} + S_\omega$$

и

$$\frac{\partial I_{d\omega}}{\partial t} + \mathbf{v}_\omega \nabla I_{d\omega} = -\frac{I_{d\omega} - I_{0\omega}}{\tau_\omega} + S_\omega.$$

Аллен [198] провел анализ перехода от баллистического режима к диффузионному, используя компьютерное моделирование и версию уравнения Больцмана, подвергнутого преобразованию Фурье. Эволюционные уравнения для средней заселенности в обратном пространстве фононной моды  $Q$  включают ряд членов (дрейф, рассеяние, внешний)

$$\frac{\partial N_Q}{\partial t} = \left( \frac{dN_Q}{dt} \right)_{drift} + \left( \frac{dN_Q}{dt} \right)_{scatt} + \left( \frac{dN_Q}{dt} \right)_{ext},$$

$$\left( \frac{dN_Q}{dt} \right)_{drift} = -\mathbf{v}_Q \cdot \nabla N_Q = -\mathbf{v}_Q \left[ \frac{dn_Q}{dT} \nabla T + \nabla \Phi_Q \right],$$

$$\left( \frac{dN_Q}{dt} \right)_{scatt} = -\sum_{Q'} S_{Q,Q'} \Phi_{Q'},$$

где  $n_Q$  — локальное равновесное распределение Бозе–Эйнштейна,  $\Phi_Q = N_Q - n_Q$ ,  $S_{Q,Q'}$  — линеаризованный оператор рассеяния.

Васкуез и др. [36] и Лебон и др. [1] рассмотрели двухтемпературный вариант баллистико-диффузионной модели. Васкуез и др. использовали уравнение Гюйера–Крумхансла для описания баллистического и диффузионного тепловых потоков. Лебон и др. использовали уравнение Гюйера–Крумхансла только для баллистического переноса; для описания диффузионной части применялось уравнение Каттанео.

О непосредственном наблюдении баллистического и диффузионного переноса в графене сообщили Пумрол др. [95].

## 2.3. Обобщенный закон Фурье Хуа и др.

Хуа и др. [199] разработали обобщенный закон Фурье, справедливый от баллистического до диффузионного режима на основе помодового уравнения



Больцмана в приближении времени релаксации (модель Бхатнагара–Гросса–Кука)

$$\frac{\partial g_\mu(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_\mu \cdot \mathbf{g}_\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{g_\mu - g_0(T, \mathbf{x}, t)}{\tau_\mu} + \dot{Q}_\mu,$$

где  $g_\mu(\mathbf{x}, t) = \hbar\omega_\mu(f_\mu(\mathbf{x}, t) - f_0(T))$  — функция распределения отклонения энергии для фонона в состоянии  $\mu = (\mathbf{q}, s)$ ,  $\mathbf{q}$  — волновой вектор фонона,  $s$  — индекс ветви фононов,  $f_0$  — распределение Бозе–Эйнштейна,  $g_0(T) = \hbar\omega_\mu f_0(T) - f_0(T_0) \approx C_\mu \Delta T$ ,  $C_\mu$  — удельная теплоемкость, зависящая от моды,  $\dot{Q}$  — скорость поступления энергии в расчете на моду.

Для решения этого уравнения авторы использовали преобразование Фурье по времени и связали температурный градиент с зависящей от моды теплоемкостью  $x$ .

## 2.4. Фононная гидродинамика

Гуо и Ванг [200] получили макроскопические уравнения движения фононного газа на основе уравнения Больцмана для фононов

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_g = C(f),$$

где  $f = f(\mathbf{x}, t, \mathbf{k})$  — функция распределения фононов,  $\mathbf{v}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega$  — групповая скорость фононов.

Столкновительный член  $C(f)$  включает вклад двух основных процессов рассеяния: нормальное рассеяние ( $N$ -процесс) и рассеяние с потерей импульса ( $R$ -процесс).

Энергия сохраняется в процессах рассеяния любого типа, квазиимпульс — только при нормальном рассеянии.

Упрощение уравнения Больцмана основано на использовании модели релаксационного времени Каллавея, которая предполагает, что  $N$ -процесс и  $R$ -процесс протекают независимо. При низких температурах доминирующим является  $N$ -процесс, однако при обычных температурах  $N$ -процессом можно пренебречь, и уравнение Больцмана принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_g = -\frac{f - f_R^{eq}}{\tau_R},$$

где  $f_R^{eq}$  — равновесная функция распределения для  $R$ -процесса.

Модель фононной гидродинамики использует полевые переменные:

плотность энергии фононов

$$e = \int \hbar\omega f d\mathbf{k},$$

тепловой поток

$$\mathbf{q} = \int \hbar\omega \mathbf{v}_g f d\mathbf{k},$$

поток теплового потока

$$\hat{Q} = \int \hbar\omega \mathbf{v}_g \mathbf{v}_g f d\mathbf{k}.$$

Интегрирование уравнения Больцмана в пространстве волновых векторов дает уравнения баланса для плотности энергии

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$$

и теплового потока

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla \cdot \hat{Q} = -\frac{\mathbf{q}}{\tau_R}.$$

Эти уравнения баланса — четырехмоментные полевые уравнения для фононного уравнения Больцмана.<sup>4</sup> Для замыкания системы уравнений переноса для фононов поток теплового потока  $\hat{Q}$  должен быть определен в терминах четырех основных полевых переменных (плотность энергии и три компоненты теплового потока).

Известен ряд подходов к проблеме замыкания в кинетической теории:

- 1) метод Гилбета,
- 2) разложение Чепмана–Энскога,
- 3) метод моментов Грэда,
- 4) „регуляризованный метод моментов“ (R13-метод),
- 5) метод инвариантного многообразия.

Авторы использовали метод возмущений относительно равновесной четырехмоментной функции распределения фононов, полученной с помощью принципа максимума энтропии.

Проблема свелась, таким образом, к максимизации следующего функционала:

$$\Phi = -k_B \int [f \ln(f) - (1+f) \ln(1+f)] d\mathbf{k} + \beta \left( e - \int \hbar\omega f d\mathbf{k} \right) + \gamma_i \left( q_i - \int v_{gi} \hbar\omega f d\mathbf{k} \right),$$

где  $\beta$  и  $\gamma_i$  — множители Лагранжа.

В итоге четырехмоментная функция распределения фононов имеет вид

$$f_4 = \frac{1}{\exp\left(\beta \frac{\hbar\omega}{k_B} + \gamma_i \frac{\hbar\omega v_i}{k_B}\right) - 1}.$$

Приближения более высокого порядка для потока теплового потока  $\hat{Q}$  находятся из уравнения баланса

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial M_{ijk}}{\partial x_k} = \frac{1}{\partial \tau_R} \left( \frac{1}{3} v_g^2 e f_{ij} - Q_{ij} \right),$$

тензор третьего порядка  $\hat{M}$  определяется как

$$M_{ijk} = \int v_{gi} v_{gj} v_{gk} \hbar\omega f d\mathbf{k}.$$

Используется разложение по малому параметру числу Кнудсена  $\varepsilon = \text{Kn}$

$$Q_{ij} = Q_{ij}^{(0)} + \varepsilon Q_{ij}^{(1)} + \dots$$

<sup>4</sup> Имеется опечатка в работе [200] —  $\hat{Q}$  представлен как вектор.

и сохраняются члены нулевого и первого порядков

$$Q_{ij} = \frac{1}{3}v_g^2\varepsilon\delta_{ij} + \frac{2}{15}\tau_R v_g^2 \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{1}{5}\tau_R v_g^2 \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{q_j}{\partial x_i} \right).$$

Окончательно уравнение баланса имеет вид

$$\tau_R \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \frac{1}{5}\Lambda^2 \left[ \nabla^2 \mathbf{q} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{q}) \right],$$

где  $\Lambda = v_g \tau_R$  — средняя длина свободного пробега.

Это уравнение отличается только численным коэффициентом при нелокальном члене от уравнения Гюйера–Крумхансла. Авторы подчеркивают, что математическая структура этих уравнений совпадает, однако лежащие в основе физические механизмы переноса различны. Нелокальный член в уравнении Гюйера–Крумхансла отражает нормальное рассеяние фононов — это уравнение предназначено для описания теплопереноса при низких температурах. Нелокальный член в уравнении фоновой гидродинамики есть следствие пространственных неравновесных эффектов, возникающих из-за рассеяния фононов на границах или значительных градиентов температуры.

Гуо и Ванг использовали выведенные уравнения фоновой гидродинамики для решения ряда задач:

- транспорт фононов в плоскости тонкой пленки;
- транспорт фононов в нанопроволоке;
- нестационарный одномерный транспорт фононов поперек тонкой пленки;
- высокочастотный периодический нагрев полубесконечной поверхности;
- нестационарный теплоперенос в тепловой решетке.

## 2.5. Модель релаксонов

Недавно (2020) Симончелли и др. [12] использовали эволюцию релаксонов для вывода пары уравнений, описывающих связанные коллективные колебания решетки в диэлектрических кристаллах.

Понятие релаксона как коллективного неравновесного возбуждения кристаллической решетки, представляющего собой линейную комбинацию фононов, было введено Чапеллотти и Марзари [201]. Теплопроводность можно рассматривать как движение газа релаксонов.

Авторы исходят из линеаризованного уравнения Больцмана для фононов, имеющего вид

$$\frac{\partial n_\mu}{\partial t} + \mathbf{v}_\mu \nabla n_\mu = -\frac{1}{V} \sum_{\mu'} \Omega_{\mu\mu'} \Delta n_{\mu'}.$$

Суммирование ведется по всем возможным состояниям фонона  $\mu$  ( $\mu = (\mathbf{q}, s)$ , где  $\mathbf{q}$  меняется по зоне Бриллюэна, а  $s$  — по ветвям фонона),  $\mathbf{v}_\mu$  — групповая скорость фононов,  $V$  — объем,  $\Omega_{\mu\mu'}$  — линейный оператор рассеяния фононов,  $\Delta n_\mu = n_\mu - \bar{n}_\mu$  — отклонение

функции распределения фононов от равновесной, т. е. от распределения Бозе–Эйнштейна

$$\frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_\mu}{k_B T}\right) - 1},$$

где  $\omega_\mu$  — частота фонона.

Поскольку распределение Бозе–Эйнштейна зависит от пространственных координат и времени только через температуру, уравнение может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{n}_\mu}{\partial T} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_\mu \cdot \nabla T \right) + \frac{\partial \Delta n_\mu}{\partial t} + \mathbf{v}_\mu \cdot \nabla \Delta n_\mu \\ = -\frac{1}{V} \sum_{\mu'} \Omega_{\mu\mu'} \Delta n_{\mu'}. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения в замкнутом виде возможно в приближении единого времени релаксации, когда упрощается столкновительный оператор [201]

$$\frac{1}{V} \sum_{\mu'} \Omega_{\mu\mu'} \Delta n_{\mu'} \approx \frac{\Delta n_\mu}{\tau_{STA}^\mu}.$$

Теплопроводность при использовании гармонического приближения для теплового потока

$$q = \sum_{\mu} \hbar\omega_\mu v_\mu \Delta n_\mu$$

записывается как

$$(\lambda_\mu^{ij})^{SMA} = \frac{1}{V} \sum_{\mu} C_\mu v_\mu^i (\Lambda_\mu^j)^{SMA},$$

где  $(\Lambda_\mu^j)^{SMA}$  — компонент средней длины свободного пробега фонона в направлении  $j$ .

Таким образом, теплопроводность обеспечивается фононами, переносящими удельную теплоемкость

$$\frac{C_\mu}{k_B T^2} \bar{n}_\mu (\bar{n}_\mu + 1) (\hbar\omega_\mu)^2,$$

движущимися со скоростью  $v_\mu$  со средней длиной свободного пробега  $(\Lambda_\mu^j)^{SMA}$  перед термализацией при рассеянии.

Чапеллотти и Марзари подчеркивают, что определение времени жизни фонона или средней длины свободного пробега не может использоваться вне предположения о едином времени релаксации, поскольку внедиагональные члены оператора рассеяния вносят связь между фононами, и термализация фонона не может описываться экспоненциальной релаксацией.

Оператор  $\Omega$  может быть приведен к симметричной форме использованием преобразования

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{\mu\mu'} &= \Omega_{\mu\mu'} \sqrt{\frac{\bar{n}_{\mu'}(\bar{n}_{\mu'} + 1)}{\bar{n}_\mu(\bar{n}_\mu + 1)}}, \\ \Delta \bar{n}_\mu &= \frac{\Delta n_\mu}{\bar{n}_\mu(\bar{n}_\mu + 1)}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\bar{\Omega}$  — действительная положительная матрица, ее можно привести к диагональному виду и найти собственные вектора  $\theta_\mu^\alpha$  и собственные значения  $1/\tau_\alpha$  ( $\alpha$  — индекс собственного значения)

$$\frac{1}{V} \sum_{\mu'} \Omega_{\mu\mu'} = \frac{1}{\tau_\alpha} \theta_\mu^\alpha.$$

Произвольный  $\Delta \bar{n}_\mu$  можно представить как линейную комбинацию собственных векторов  $\theta_\mu^\alpha$ :

$$\Delta \bar{n}_\mu = \sum_\alpha f_\alpha \theta_\mu^\alpha.$$

Уравнение Больцмана можно записать в базе собственных векторов  $\theta^\alpha$ :

$$\sqrt{\frac{C}{k_B T^2}} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \langle 0 | \alpha \rangle + \Delta T + \mathbf{V}_\alpha \right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \sum_{\alpha'} \mathbf{V}_{\alpha\alpha'} \cdot \nabla f_\alpha = -\frac{f_\alpha}{\tau_\alpha}.$$

Чепеллотти и Марзари вывели следующее уравнение для теплопроводности:

$$\lambda^{ij} = \frac{-1}{V \nabla_i T} \sum_\mu \hbar \omega_\mu v_\mu^j \Delta n_\mu = \sum_\alpha C V_\alpha^i \lambda_\alpha^j$$

Авторы также показали, что широко используемое для оценки времени релаксации в системах с различными механизмами рассеяния правило Маттиессена переоценивает теплопроводность.

Релаксоны обладают четностью и только нечетные дают вклад в теплопроводность. Четные определяют термическую вязкость [12]. Симончелли и др. вывели два связанных уравнения для температуры и дрейфовой скорости.

### 3. Термомассовая модель

Термомассовая модель основана на старой идее Толмана [202]: носители тепла обладают дуальностью масса–энергия и проявляют энергетические свойства в процессах преобразования энергии, а массовые — в процессах переноса [203].

Масса тепла определяется, согласно эквивалентности массы и энергии Эйнштейна [204–206]:

$$E = M c^2 = \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где  $E$  — тепловая энергия,  $M_0$  — масса покоя,  $v$  — скорость носителя тепла,  $c$  — скорость света в вакууме,  $M$  — релятивистская масса.

Если  $v \ll c$ , это уравнение упрощается

$$E \approx (M_0 + M_k) c^2.$$

Здесь  $M_k$  — дополнительная масса, индуцированная кинетической энергией. Термомасса (ТМ)  $M_h$  — релятивистская масса внутренней энергии  $U$ :

$$M_h = \frac{U}{c^2}.$$

Термомасса чрезвычайно мала ( $10^{-16}$  kg для 1 J тепла) [203].

Плотность термомассы, содержащейся в среде [207]:

$$\rho_h = \frac{\rho C_V T}{c^2},$$

где  $\rho C_V T$  — плотность внутренней энергии.

Термон определяется как квазичастица, переносящая тепловую энергию.

Макроскопическая дрейфовая скорость газа термонов как сплошной среды есть

$$v_h = \frac{q}{\rho C T}.$$

Полная энергия газа термонов в среде есть сумма кинетической и потенциальной энергий [208]

$$E_T = \iint_V (\rho_T u_T du_T + dp_T) dV,$$

где  $V$  — полный объем среды.

### 3.1. Уравнение состояния (УС) газа термонов

**3.1.1. УС газа термонов в идеальном газе** Два допущения делаются для газа термонов в идеальном газе:

1. Термоны связаны с молекулами газа и описываются распределением Максвелла–Больцмана.
2. Ньютоновская механика применима к газу термонов.

Давление в системе  $n$  частиц с массой  $m$ , движущихся случайным образом в направлении  $x$  со скоростью их:

$$P = n m \bar{u}_x^2$$

и с учетом симметрии в направлениях  $x, y, z$  ( $u_x^2 = u_y^2 = u_z^2 = \frac{1}{3} \bar{u}^2$ ) [206],

$$P = \frac{1}{3} n m \bar{u}^2 = \frac{1}{3} n \bar{u}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{m \bar{u}^2}{c^2} \right) = \frac{1}{6} \frac{n m \bar{u}^4}{c^2}.$$

Используя функцию распределения Максвелла–Больцмана

$$f_M(u) = 4\pi u^2 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m u^2}{2k_B T} \right),$$

получаем

$$\bar{u}^4 = \int_0^\infty u^4 f_M(u) du = 15 \left( \frac{k_B T}{m} \right)^2$$

и окончательно

$$P = \frac{5}{3} \frac{\rho C_V R T^2}{c^2},$$

где  $R$  — газовая постоянная.

Таким образом, давление газа термонов в идеальном газе пропорционально квадрату температуры.

**3.1.2. УС газа термонов в диэлектриках** Фононы — термоны в диэлектриках. Полная энергия колебаний решетки

$$E_D = E_{D0} + E_h = (M_0 + M_h) C_V T,$$

где  $E_h$  — энергия термомассы. Тогда давление газа термонов равно

$$P = \frac{\gamma \rho}{c^2} (C_V T)^2,$$

где  $\gamma$  — константа Грюнейзена.

Давление газа термонов пропорционально квадрату температуры как в идеальном газе.

Для кремния при комнатной температуре давление газа термонов около  $5 \cdot 10^{-3}$  Па [206].

**3.1.3. УС газа термонов в металлах** В металлах термоны присоединены к электронам. Давление газа термонов

$$P = \frac{1}{3} n m_h u_h^2,$$

где  $m_h = \varepsilon/c^2$ ,  $\varepsilon$  — внутренняя энергия, включающая вклады электронов и решетки,  $u_h = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$  скорость случайно движущихся частиц. Таким образом, давление

$$P = \frac{2}{3} \frac{n \varepsilon^2}{c^2 m}.$$

Общее уравнение для давления газа термонов

$$P = \frac{2}{3 m c^2} \int_0^\infty \varepsilon^2 f(\varepsilon, T) Z(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где

$$f(\varepsilon, T) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{k_B T}\right) + 1}$$

— функция распределения Ферми–Дирака и

$$Z(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}$$

— функция плотности состояний электронов Зоммерфельда. Ванг [206] получил следующее выражение для давления газа термонов:

$$P = \frac{5}{12} \frac{\pi^2 n k_B^2}{c^2 m} T^2.$$

## 3.2. Уравнения движения газа термонов

Одномерные уравнения сохранения массы и импульса

$$\frac{\partial \rho_h}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_h u_h)}{\partial x} = \frac{S}{c^2},$$

где  $S$  — источник тепла и

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_h u_h) + \frac{\partial}{\partial x} (u_h \cdot \rho_h u_h) + \frac{\partial P}{\partial x} + f_h = 0;$$

$f_h$  — сопротивление.

Уравнение неразрывности газа термонов — фактически уравнение сохранения энергии.

Течение термонов в твердом теле можно рассматривать как движение сжимаемой жидкости в пористой среде, поэтому закон Д'Арси ( $K$  — проницаемость пористой среды)

$$u = -K \frac{dP}{dx}$$

можно использовать для оценки сопротивления термомассе  $f_h = \beta_h u_h$ ,  $\beta$  — коэффициент пропорциональности [209]

$$\beta_h = \frac{e \gamma \rho^2 C^3 T^2}{c^2 \lambda}.$$

Эффективная сила сопротивления  $f_h$  вводится вместо вязкого члена ( $\mu_h \nabla^2 \mathbf{u}_h$ ), чтобы избежать [203]:

- 1) определения вязкости  $\mu_h$  сложных материалов;
- 2) эффектов взаимодействия термонов с решеткой.

Течение газа термонов в твердом теле (течение фононов) вызывается градиентом давления — значит, градиентом квадрата температуры [2].

Термомасса слишком мала, чтобы допустить наблюдения в обычных условиях. Однако при сверхбыстром нагреве или чрезвычайно высоком значении теплового потока инерция термомассы приводит к эффектам в теплопроводности, которые допускают их обнаружение.

Закон сохранения импульса газа термонов можно записать как уравнение теплопроводности [206]

$$\tau_h = \left( \frac{\partial q}{\partial t} + 2u_h \frac{\partial q}{\partial x} - u_h^2 \rho C_V \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \lambda \frac{\partial T}{\partial t} + q = 0.$$

Ванг [206] разработал двухшаговую версию термомассовой теории для металлов, подвергнутых ультрабыстрому лазерному нагреву, при следующих допущениях:

- 1) электроны поглощают лазерную энергию и передают ее решетке;
- 2) рассеянием на дефектах и границах зерен пренебрегается;
- 3) взаимодействие электронов и фононов описывается коэффициентом связи.

По аналогии с течением сжимаемой жидкости в пористой среде поправка Бринкмана  $\mu \nabla^2 \mathbf{q}$ , которая учитывает дополнительное сопротивление из-за стенок, может быть введена в уравнения движения газа термонов. Эта поправка существенна только при больших значениях числа Крудсена [207].

Производство энтропии при движении газа термонов обеспечивается диссипацией механической энергии

$$\frac{dE_h}{dt} + \nabla \mathbf{J}_{E_h} = \mathbf{f}_h \cdot \mathbf{u}_h,$$

где  $E_h$  — механическая энергия газа термонов,  $\mathbf{J}_{E_h}$  — поток  $E_h$ .

Полная производная плотности энтропии записывается как [205,210]

$$\frac{dS}{dt} = -\nabla \mathbf{J}_s + \sigma_{TM} = \frac{\mathbf{q}}{\lambda T^2} \cdot (\mathbf{q} + \lambda \nabla T) - \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{T},$$

где  $\mathbf{J}_s$  — поток энтропии.

### 3.3. Явление запираания теплового потока

Газ термонов — это сжимаемая жидкость, поэтому демонстрирует свойства сжимаемой жидкости, например воздух, эффекты.

Один из таких эффектов — поведение газа в конвергентном сопле при числе Маха, равном единице.

Термическое число Маха определяется как

$$Ma_h = \frac{u_h}{C_h},$$

где скорость звука, например, в диэлектриках  $C_h = \sqrt{2\gamma C_V T}$ .

При движении сжимаемого воздуха, вызываемого градиентом давления, в конвергентном канале скорость возрастает, а давление уменьшается в направлении потока. Запираание потока происходит, когда число Маха достигает единицы; при этом появляется скачок в значениях давления.

Дрейфовая скорость газа фононов, вызываемая градиентом температуры, возрастает в направлении, противоположном градиенту температуры. Запираание теплового потока происходит, когда значение термического числа Маха достигает единицы; температура при этом испытывает скачок.

Подтверждение явления запираания теплового потока получено в экспериментах по теплопроводности в одностенных углеродных нанотрубках, подвешенных между металлическими электродами.

## 4. Мезоскопические уравнения моментов

Бергамаско и др. [121] разработали в рамках кинетической теории ряд моментных систем уравнений (двухмоментные и трехмоментные) с введением числа Кнудсена как отношения средней длины свободного пробега носителей тепла к характерному размеру системы. Авторы ввели также понятие „призрачного“ момента.

## 5. Термодинамические модели

Термодинамические модели теплопроводности выводятся из термодинамических ограничений, следующих из второго закона термодинамики [211–218].

Например, Жоу и Симелли [216] ввели новую дополнительную переменную, представляющую собой тензор второго порядка  $\hat{Q}$  и записали уравнение баланса в виде

$$\tau_l \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \nabla \cdot \hat{Q},$$

где  $\tau_l$  — время релаксации. Тензор  $\hat{Q}$  предполагается симметричным и может быть расщеплен  $\hat{Q} = \hat{Q}^I + \hat{Q}^S$ , где скаляр  $Q$  — одна третья часть следа  $\hat{Q}$ ,  $\hat{Q}^S$  — девиаторная часть  $\hat{Q}$ .

Авторы вывели общее уравнение, включающее, как частные случаи уравнения Каттанео и Гюйера–Крумхансля

$$\begin{aligned} \tau_R \mathbf{q} + \mathbf{q} + (\mu \nabla \mathbf{q} + \mu' \nabla^t \mathbf{q}) - \lambda \\ \times (1 + \xi \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}) \nabla T + l_p^2 (\nabla^2 \mathbf{q} + 2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{q}), \end{aligned}$$

где  $\mu$ ,  $\mu'$ ,  $\xi$  — материальные коэффициенты,  $\nabla^t \mathbf{q}$  означает транспонирование  $\nabla \mathbf{q}$ .

Ковач и Ван [213] также ввели тензор второго порядка как внутреннюю переменную и предположили, что поток энтропии можно записать как

$$\mathbf{J} = \hat{b} \cdot \mathbf{q} + \hat{B} : \hat{Q},$$

где  $\hat{b}$  — тензор второго порядка и  $\hat{B}$  — тензор третьего порядка, называемые токовыми множителями (множителями Нири).

Используя ограничения, следующие из второго закона термодинамики (неотрицательное производство энтропии), и исключая внутреннюю переменную, авторы вывели общее определяющее соотношение для теплового потока

$$\begin{aligned} m_1 m_2 \partial_{tt} q + (m_1 l_1 + m_1 k_1) \partial_t q \\ - (m_1 n + m_2 k_2) \partial_{xxt} q + n k_2 \partial_x^4 q - (l_1 + K) \partial_{xx} q \\ + k_1 l_1 q = m_2 \partial_{xt} \frac{1}{T} + k_1 \partial_x \frac{1}{T} + \partial_x^3 \frac{1}{T}. \end{aligned}$$

Выбирая материальные коэффициенты, которые можно положить равными нулю, можно получить ряд известных моделей теплопроводности, например:

- Фурье,
- Каттанео,
- баллистико-диффузионная модель,
- типа Джеффри,
- Гюйера–Крумхансля.

Роголино и др. [218] в качестве основных переменных выбрали удельную (на единицу объема) внутреннюю энергию, тепловой поток и поток теплового потока. Предполагая вид соответствующих уравнений баланса, используя энтропийные ограничения и множители

Лагранжа–Фаркаса, авторы получили две версии обобщенного закона теплопроводности:

1) уравнение второго порядка по пространству и первого по времени в пренебрежении нелокальными эффектами;

2) уравнение четвертого порядка по пространству и второго по времени, включающее нелокальные эффекты.

## 6. Нелокальные модели с дробными производными

### 6.1. Дробные производные

Не существует единого определения дробной производной [219–222]. Наиболее употребительными являются определения Римана–Лиувилля и Капуто. Обе производные основаны на дробном интеграле Римана–Лиувилля, который для любого  $\lambda > 0$  определяется как [223,224]

$$J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Здесь  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \exp(-u) u^{\alpha-1} du$  — гамма функция Эйлера.

Этот интеграл существует, если  $f(t)$  локально интегрируема и при  $t \rightarrow 0$  ведет себя как  $O(t^{-\nu})$ , где  $\nu < \alpha$ .

• Дробная производная Римана–Лиувилля определяется как [225]

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{\partial u(x, s)}{\partial t} (t-s)^{-\alpha} dt, & \alpha \in (0, 1) \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

• Дробная производная Капуто определяется как [225]

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s)}{\partial t} (t-s)^{-\alpha} dt, & \alpha \in (0, 1) \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Известен ряд определений дробных производных помимо Римана–Лиувилля и Капуто (Грюнфельд–Летникова, Рисза, Вейля, Марчо, Капуто–Фабрицио, Янга, Чена, Хе, Жао, Кая–Янга и некоторые другие), которые не эквивалентны [226].

### 6.2. Дифференциальные уравнения с дробными производными

Обычно фрактальную среду нельзя рассматривать как сплошную. Использование пространств нецелой размерности [227] необходимо для описания фрактальной

среды с помощью континуальных моделей [228]. Уравнения с дробными производными [229] (первыми дробное исчисление использовали Абель и Лиувилль) нелокальны (т.е. могут включать эффекты памяти и пространственные корреляции) и могут описывать аномальную диффузию (как субдиффузию, так и супердиффузию) и аномальную теплопроводность [230] — например, теплопроводность в пористой среде описывается моделью супердиффузии [231]).

Начальные условия для дробной производной Капуто можно сформулировать в терминах начальных условий для целочисленных производных. Нулевые начальные условия для производных Римана–Лиувилля, Капуто и Грюнфельда–Летникова совпадают [232].

### 6.3. Дробная модель Фурье

Денг и Ге [233] изучали теплоперенос в фрактальной среде, используя дробное уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^\alpha T(x, y)}{\partial x^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\beta} T(x, y)}{\partial y^{2\beta}} + k^2 T(x, y) = f(x, y),$$

где  $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ .

Хе и Лиу [234] использовали дробную версию закона Фурье

$$\lambda^{2\alpha} \frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha} = q$$

для изучения теплообмена в системе коконов шелкового червя.

Подобный подход использовали Бейбалаев и др. для исследования теплопереноса в фрактальной среде и для изучения промерзания грунта [235,236].

Хе и др. [237] использовали стационарное

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left( \lambda \frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha} \right) = 0,$$

а Ванг и др. [238] нестационарное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \left( \lambda \frac{\partial^\alpha T}{\partial x^\alpha} \right) = 0$$

для исследования теплопереноса в рамках фрактальной модели меха белого медведя.

Мейланов и Шабанова [239] решали одномерные задачи для дробного уравнения

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = \lambda \frac{\partial^\beta T}{\partial t^\beta}.$$

Воллер и др. [240] использовали дробную по времени, а Мейланов и др. [241] — дробную по времени и пространству модель для решения задачи Стефана. Воллер и др. рассмотрели случаи как резкой, так и диффузной границы между жидкой и твердой фазами.

Сироцок и др. использовали дробное по времени уравнение Фурье для расчета теплопереноса неоднородной полубесконечной балке [242].

#### 6.4. Дробная модель Пеннеса

Обобщение с помощью дробной производной Капуто уравнения Пеннеса (2)

$$\rho c \frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = \nabla \cdot \lambda \nabla T + c_b \omega_b (T_a - T) + \dot{g}_{met} + Q^{ext}, \quad (7)$$

было использовано Дамором и др. [243] для исследования гипертермии и аномальной теплопроводности в тканях кожи при постоянном и синусоидальном нагреве поверхности [244,245] и Эззатом и др. [246] для расчета нестационарного теплопереноса в коже при мгновенном нагреве поверхности.

Как отметили Феррас и др. [247], уравнение (7) некорректно с точки зрения размерности, и необходимо либо переопределить коэффициенты в классическом уравнении, либо ввести множитель  $\tau^{1-\alpha}$  для получения „новой“ теплопроводности.

Сингх и др. [248] для анализа поля температуры в тканях при гипертермии применяли дробное по времени и пространству уравнение

$$\rho c \frac{\partial^\beta T}{\partial t^\beta} = \lambda \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} T + Q_p, \quad 0 < \beta \leq 1 < \alpha \leq 2.$$

#### 6.5. Дробная модель Зингалеса

Зингалес [249] (см. также [250]) рассмотрел две компоненты теплопереноса в твердых телах в покое:

1) „близкий“ теплоперенос, описываемый обычным законом Фурье;

2) теплообмен между удаленными элементарными объемами, расположенными в точках  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , который пропорционален

- произведению взаимодействующих масс;
- разности температур  $T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})$ ;
- убывающей функции расстояния  $g(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$ .

Автор предположил, что функция  $g$  убывает как степенная функция расстояния

$$g(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = \frac{1}{d_n(\bar{\alpha})} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{n+\alpha}},$$

где  $d_n(\bar{\alpha})$  — нормализующий коэффициент, связанный с убывающей экспонентой  $\alpha$  и размерностью топологического пространства тела  $n$ .

Окончательно уравнение сохранения энергии записывается в виде

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \mathbf{q} + \rho^2 \lambda_\alpha D_x^\alpha T,$$

где  $D_x^\alpha$  — дробная производная Марчо порядка  $\alpha$  определяется как

$$D_x^\alpha T = \frac{1}{d_n(\bar{\alpha})} \int_{V_y} \frac{T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{n+\alpha}} dV_y.$$

#### 6.6. Дробные модели Каттанео и SPL

Иногда дробную версию уравнения Каттанео называют „нелокальным“ уравнением Каттанео–Вернотта, что отражает свойства дробных производных [251].

Лиу и др. [252] использовали модификацию Христовой модели Каттанео для разработки дробного уравнения с применением пространственно-дробной производной Рисза.

Дробная по времени SPL-модель биологического теплообмена сформулирована в работе [253]

$$\begin{aligned} \rho c \left( \frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} + \tau \frac{\partial^{1+\alpha} T}{\partial t^{1+\alpha}} \right) \\ = \nabla \cdot \lambda \nabla T + c_b \omega_b (T_a - T) + \dot{g}_{met} + Q^{ext}. \end{aligned} \quad (8)$$

Вычисления показывают, что дробная SPL-модель дает то же распределение температуры, что и DPL-модель [253].

Дробная по пространству SPL-модель сформулирована для одномерного случая Кумаром и др. [254]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial^\alpha q}{\partial x^\alpha} + c_b \omega_b (T_b - T) + Q^{ext}, \quad (9)$$

где

$$q(x, t) + \tau \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = -\lambda \nabla T,$$

и для  $m - 1 < \alpha < m$

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int \frac{\partial^m u(x, s)}{\partial s^m} (x - s)^{m-\alpha-1} ds,$$

здесь  $\Gamma(z)$  — гамма-функция.

Джианг и Кви [255] вывели дробную модель тепловой волны, изменив соотношение Каттанео

$$\frac{\tau^\alpha}{\alpha!} D_t^\alpha \mathbf{q} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T,$$

где  $D_t^\alpha$  — модифицированная производная Римана–Лиувилля порядка  $\alpha$ .

Кви и др. [256] изучали лазерный нагрев, обобщив соотношение Каттанео как

$$\tau^p D_t^p \mathbf{q} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T,$$

где  $D_t^p$  — производная Капуто порядка  $p$ ; множитель  $\tau^p$  введен для коррекции размерности.

Ху и др. предложили дробное уравнение Каттанео, используя две производные Капуто разного порядка

$$\frac{\partial^{\beta-1} \mathbf{q}}{\partial t^{\beta-1}} + \tau \frac{\partial^{\alpha-1} \mathbf{q}}{\partial t^{\alpha-1}} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad 0 < \beta \leq \alpha \leq 2,$$

$$\frac{\tau^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \frac{\partial^\alpha \mathbf{q}}{\partial t^\alpha} + \mathbf{q} = -\lambda \nabla T, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Мишра и Рай [257] использовали дробную SPL-модель для анализа теплопереноса в тонких пленках.

Мороз и Масловская [258] использовали дробную по пространству SPL-модель для моделирования теплопроводности в сегнетоэлектриках (триглицинсульфат).

Христов [259] разработал дробное по пространству уравнение нестационарного теплопереноса с демпфирующим членом, описываемым с помощью производной Капуто–Фабрицио [260], которая модифицирует производную Капуто

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t \exp\left[-\frac{\alpha(t-s)}{1-\alpha}\right] \frac{df(s)}{ds} ds,$$

где  $M(\alpha)$  — нормализующая функция, такая, что  $M(0) = M(1) = 1$ .

Численное решение этой задачи рассмотрели Алкахани и Атангана [261].

Танг и др. [262] (см. также [263]) для дробного теплопереноса ввели новую дробную производную без сингулярного ядра как модификацию производной Римана–Лиувилля

$$D_{a^+}^{(\nu)} T = \frac{\mathcal{R}(\nu)}{(1-\nu)} \frac{d}{dx} \int_a^x \exp\left[-\frac{\nu}{1-\nu}(x-x')\right] T dx',$$

где  $\mathcal{R}(\nu)$  — нормализующая функция.

### 6.7. Дробная DPL-модель

Джи [264,265] использовал следующую форму дробной по времени DPL-модели ( ${}_0^C D_t^\alpha$  — дробная производная Капуто)

$$\begin{aligned} \rho C \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\tau_q^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} {}_0^C D_t^{1+\alpha} T \right) \\ = \lambda \left( T + \frac{\tau_T^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} {}_0^C D_t^\alpha T \right) \end{aligned}$$

для исследования теплообмена в тонких пленках.

Ху и др. [266] изучали биологический теплообмен, используя уравнение с производными Капуто порядков  $\alpha$  и  $\beta$

$$\mathbf{q} + \tau_q^\alpha \frac{\partial^\alpha \mathbf{q}}{\partial t^\alpha} = -\lambda \left( \nabla T + \tau_T^\beta \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \nabla T \right).$$

Авторы заменили релаксационные времена DPL-модели  $\tau_q$  и  $\tau_T$  на  $\tau_q^\alpha$  и  $\tau_T^\beta$  для сохранения размерности.

Лиу и др. [267] использовали конвективную производную, введенную Христовым [123], и производную Капуто порядка  $\alpha$  для формулировки модели

$$\begin{aligned} \tau_q \left[ \frac{\partial^\alpha \mathbf{q}}{\partial t^\alpha} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{q} \right] + \mathbf{q} \\ = -\lambda \nabla \left( 1 + \tau_T \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) T. \end{aligned}$$

### 6.8. Дробная TPL-модель

Ахбарзаде и др. [184] обобщили определяющее соотношение TPL-модели и сохранили члены до  $2\alpha_F$ -порядка для  $\tau_q$  и до  $\alpha_F$ -порядка для  $\tau_T$  и  $\tau_v$  и получили

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{\tau_q^{\alpha_F}}{\alpha_F!} \frac{\partial^{\alpha_F}}{\partial t^{\alpha_F}} + \frac{\tau_q^{2\alpha_F}}{(2\alpha_F)!} \frac{\partial^{2\alpha_F}}{\partial t^{2\alpha_F}} \right) \mathbf{q} \\ = \left[ \left( \lambda + \frac{\lambda \cdot \tau_q^{\alpha_F}}{(\alpha_F)!} \frac{\partial^{\alpha_F-1}}{\partial t^{\alpha_F-1}} + \frac{\lambda \tau_q^{\alpha_F}}{(\alpha_F)!} \frac{\partial^{\alpha_F}}{\partial t^{\alpha_F}} \right) \nabla T + \lambda \cdot \nabla v \right]. \end{aligned}$$

Дробная TPL-модель, как и обычная TPL, используется для решения задач термоупругости [268,269].

## Заключение

В обзоре сделана попытка охватить все многообразие моделей, предназначенных для анализа теплопереноса за пределами закона Фурье.

Наиболее перспективными представляются термодинамические и дробные модели, для исследования теплопереноса в диэлектриках привлекательна модель релаксонов.

Как показывает анализ литературы, для исследования теплообмена в биологических тканях чаще всего применяется DPL-модель.

## Приложение. Некоторые точные решения

Точные аналитические решения способствуют изучению процессов теплообмена и служат в качестве эталонов при разработке численных методов.

Фан и Ванг опубликовали обширный обзор точных решений задач биологического теплообмена, включая уравнение Пеннеса, модель тепловой волны и DPL-модели [270].

Саркар и др. [271] рассмотрели стационарный теплоперенос в многослойной ткани кожи, используя уравнение Пеннеса и модели с задержкой для случаев задания температуры или теплового потока.

Модели с задержкой Барлетта и Заечини [272] анализировали теплоперенос в бесконечно широкой полосе с заданным тепловым потоком, используя уравнение Каттанео. Подобная задача в цилиндрических координатах решалась Саердолином и др. [273].

Ахмадикиа и др. [274, 275] и Кунду и Деванжи [276] использовали модель тепловой волны и уравнение Пеннеса для моделирования воздействия на ткань кожи постоянного и импульсного нагрева.

Аль-Хаيري и др. [277] исследовали лазерное воздействие (постоянное, мгновенное или экспоненциальное) на движущуюся полубесконечную среду в рамках модели Каттанео.



DPL-модель использована Аскарizadaх и Ахмадикиа [278, 279] и Лином [280] для исследования нестационарного нагрева тканей кожи.

Акхаири [281] решал уравнения DPL-модели в однородном материале, используя функцию Грина, Дай и Нассар [282] использовали исходную форму DPL-модели без разложения Тейлора.

Кулиш и Новожилов [141] вывели, используя преобразование Лапласа, интегральное уравнение, связывающее температуру с ее градиентом.

Жанг [148] использовал метод „изготовленных решений“, который основан на угадывании возможного решения и определения соответствующих граничных и начальных условий.

Жуковский [283] (см. также [284]) вывел точное решение уравнения Гюйера-Крумхансла, используя операторный метод, и обнаружил, что в некоторых режимах решение может нарушать принцип максимума. Однако это заключение не подтверждается в недавней работе Ковача [285]. Начальные и граничные условия соответствовали лазерному эксперименту. Решение находилось в двух интервалах:  $0 < t < \tau_{\Delta}$  и  $t > \tau_{\Delta}$ , ( $\tau_{\Delta}$  — длительность лазерного импульса).

Дробные модели Дейикайя и Кимаз [286] использовали метод обобщенного дифференциального преобразования для решения уравнения диффузии с производной Капуто.

Повстенко получил точные решения для теплопроводности в двух сопряженных полулиниях [287], полубесконечном композитном материале [288], в среде со сферическими включениями [289].

Джуний и Мингу [290] получили решение задачи Стефана, Янг и др. [291], решая одномерную нестационарную задачу для уравнения с локальной дробной производной.

Каземи и Ерджи [292] изучали дробное уравнение диффузии.

Гош и др. [293] вывели решение линейного дробного уравнения с производной Джумари в терминах функций Миттаг–Леффлера.

## Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] J. Lebon, H. Machraft, M. Grmela, C. Debois. Proc. R. Soc. A, **467**, 3241 (2011).
- [2] B.J. Cao, Z.Y. Guo. Appl. Phys., **102**, 053503 (2007).
- [3] M. Chester. Phys. Rev., **131**, 2013 (1963).
- [4] R.F. Hu, B.Y. Cao. Sci. Chine Ser. E: Technol. Sci., **52**, 1786 (2009).
- [5] J.B. Brown, D.Y. Chung, P.W. Matthews. Phys. Lett. **21**, 241 (1966).
- [6] K.K. Tamma, X.J. Zhou. Thermal Stresses, **21**, 405 (1998).
- [7] C.C. Ackerman, W.C. Overton. Phys. Rev. Lett., **22**, 764 (1969).
- [8] T.F. McNelly, S.J. Rogers, D.J. Channin, R. Rollefson, W.M. Goubau, G.E. Schmidt, J.A. Krumhansl, R.O. Pohl. Phys. Rev. Lett. **24**, 100 (1970).
- [9] H. Jackson, C.I. Walker. Phys. Rev. B, **3**, 1428 (1971).
- [10] R. Kovacs, P. Van. arXiv: 1708.09770 [cond-mat.stat-mech], (2017)
- [11] V. Narayanamurti, R.C. Dynes. Phys. Rev. Lett., **28**, 1461 (1972).
- [12] M. Simoncelli, N. Marzari, A. Cepellotti. Phys. Rev. X, **10**, 011019 (2020).
- [13] S. Huberman, R.A. Duncan, K. Chen, B. Song, V. Chiloyan, Z. Ding, A.A. Maznev, G. Chen, K.A. Nelson. Science, **364**, 375 (2019).
- [14] D. Sands. In *Heat Transfer — Engineering Applications*, (Edit.V. Vikhrenko), (InTech, 2011)
- [15] A. Bannerjee, A.A. Ogale, C. Das, K. Mitra, C. Subranian. Heat Transfer Eng., **26**, 41 (2005).
- [16] H.L. Lee, W.L. Chen, W.J. Chang, E.J. Wei, Y.C. Yang. Appl. Thermal Eng. **52**, 275 (2013).
- [17] D.Y. Ho, M.Y. Wen, B.C. Chen, Y.H. Tsai. J. Nanosci. Nanotechnol., **14**, 1 (2014).
- [18] Y.D. Mao, M.T. Xu. Sci. China Tech. Sci., **58**, 1 (2015).
- [19] Z. Shomali, A. Abbassi. Int. J. Thermal Sci., **83**, 56 (2014).
- [20] A.M. Mullis. Int. J. Heat Mass Transfer., **40**, 4085 (1997).
- [21] R. Hilfer. Chem. Phys., **284**, 399 (2002).
- [22] P. Van, A. Berezovski, T. Fulop, G. Grof, R. Kovacs, A. Lovas, J. Verhas. arXiv: 1704.00341 [cond-mat.stat-mech], (2017)
- [23] D.G. Cahill, W.K. Ford, K.E. Goodson, G.D. Mahan, A. Majumdar, H.J. Maris, R. Merlin, S.R. Phillpot. J. Appl. Phys., **93**, 793 (2003).
- [24] Z.M. Zhang. Nano/Microscale Heat Transfer. (McGraw-Hill, N.Y., 2007).
- [25] D.G. Cahill, P.V. Braun, G. Chen, D.R. Clark, S. Fan, K.E. Goodson, P. Keblinski, W.P. King, G.D. Mahan, A. Majumdar, H.J. Maris, S.R. Phillpot, E. Pop, L. Shi. Appl. Phys. Rev., **1**, 011305 (2014).
- [26] В.И. Хвесьюк, А.С. Скрыбин. ТВТ, **55**, 447 (2017).
- [27] S. Sinha, K.E. Goodson. J. Microel. J., **37**, 1148 (2006).
- [28] B. Vermeersch, G. De May. Analog. Integr. Circ. Sig. Process., **55**, 197 (2008).
- [29] K. Raleva, D. Vasileska, S.M. Goodnick, M. Nedjalkov. IEEE Trans. Electron Devices **55**, 1306 (2008).
- [30] T. Raszkowski, A. Samson. Comput. Sci., **18**, 71 (2017).
- [31] P.G. Sverdrup, S. Sinha, M. Asheghi, S. Uma, K.E. Goodson. Appl. Phys. Lett. **78**, 3331 (2001).
- [32] P.G. Sverdrup, Y. Sungtaek, K.E. Goodson. Trans. ASME, **123**, 130 (2001).
- [33] E. Pop, S. Sinha, K.E. Goodson. Proc. IEEE, **94**, 1587 (2006).
- [34] E. Pop, K.E. Goodson. J. Electron. Packag., **128**, 102 (2006).
- [35] M.G. Kanatzikis. Chem. Mater., **22**, 648 (2009).
- [36] F. Vazquez, P. Van, R. Kovacs. Entropy, **22**, 167 (2020).
- [37] П.П. Волоосевич, Н.В. Змитренко, Е.И. Леванов, Е.В. Северина. Матем. Модел., **20**, 57 (2008).
- [38] K.A. Velizhanin, C.C. Chien, Y. Dubi, M. Zwolak. arXiv: 1101.002 [cond-mat.mes-hall], (2011).

- [39] K.M. Hoogeboom-Pot, J.N. Hernandez-Charpak, X. Gu, T.D. Frazer, E.H. Anderson, W. Chao, R.W. Falcone, R. Yang, M.M. Murnane, H.C. Kapteyn, D. Nardi. *PNAS*, **112**, 4846 (2015).
- [40] A. Grassman, F. Peters. *Heat Mass Transfer*, **35**, 289 (1999).
- [41] J. Ordonez-Miranda, J.J. Alvarado-Gill. *Granular Mater.*, **12**, 569 (2010).
- [42] F.X. Alvarez, V.A. Cimmelli, A. Sellitto. *Nanosc. Systems*, **1**, 112 (2012).
- [43] K.C. Liu, P.J. Chen. *J. Thermophys. Heat Transfer*, **22**, 775 (2008).
- [44] A.I. Zhmakin. *Fundamentals of Cryobiology. Physical phenomena and mathematical models.* (Springer Series „Biological and Medical Physics“), (Springer, Berlin, 2009).
- [45] H. Ahmadikia, A. Moradi. *Heat Mass Transfer*, **48**, 1559 (2012).
- [46] D.F. Stranges, R.E. Khayat, B. Albaalbaki. *Int. J. Thermal Sci.*, **74**, 14 (2013).
- [47] D.F. Singh, S. Kumar. *Math. Model. Anal.*, **20**, 443 (2015).
- [48] C.B. Sobban, S. Thomas, G.P. Peterson. *Adv. Nanomater.*, **2**, 41 (2017).
- [49] A.I. Zhmakin. *Handbook of Thermal Science and Engineering*, Edit: F. Kulacki, (Springer, 2018).
- [50] R.B. Wilson, D.J. Cahill. *Appl. Phys. Lett.*, **107**, 203112 (2015).
- [51] R.R. Alfano, S.G. Demos, S.K. Guyen. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, **820**, 248 (1997).
- [52] A. Obana, Y. Gohto. *Las. Surg. Med.*, **30**, 170 (2002).
- [53] M. Panjehpour, A. Wilke, D.J. Frazier, B.F. Overholt. *Proc. SPIE*, **1427**, 307 (1991).
- [54] F.H. Loesel, E.P. Fisher, H. Suhan, J.F. Bille. *Appl. Phys. B*, **66**, 121 (1998).
- [55] S.W. Jeong, H. Liu, W.R. Chen. *Proc. SPIE*, **5068**, 216 (2003).
- [56] K.C. Liu. *Int. J. Thermal Sci.*, **47**, 507 (2008).
- [57] X. Li, Y. Zhong, J. Smith, C. Gu. *Bioengin.*, **8**, 71 (2017).
- [58] Y. Hou, Z. Sun, W. Raw, J. Liu. *Nanomed. Nanotechnol. Biol. Med.*, **14**, 493 (2018).
- [59] D.J. Tzou, W. Dai. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **52**, 1206 (2009).
- [60] B. Rethfeld, A. Kaiser, M. Vicanck, G. Simon. *Phys. Rev. B*, **65**, 214303 (2002).
- [61] Д.С. Поляков, Е.Б. Яковлев. *Квантовая электроника*, **45**, 917 (2015).
- [62] S.V. Anisimov, B.L. Kapeliovich, T.L. Perelman. *Sov. Phys. JETP*, **39**, 375 (1974).
- [63] T.Q. Qiu, C.L. Tien. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **37**, 2789 (1994).
- [64] J. Liu. *Forsch. Ingenieur.*, **66**, 1 (2000).
- [65] D.T.W. Lin. *Int. J. Sci. Eng.*, **1**, 17 (2011).
- [66] T. Nakano, G. Kikugawa, T.J. Ohara. *Heat Transfer*, **135**, 661301 (2013).
- [67] D.J. Cahill. *Rev. Sci. Instr.*, **61**, 802 (1990).
- [68] C.C. Williams, H.K. Wickramasinghe. *Appl. Phys. Lett.*, **49**, 1587 (1986).
- [69] D. Poulidakos, S. Arcidiacono, S. Maruyama. *Microsc. Thermophys. Eng.*, **7**, 181 (2003).
- [70] W.J. Kaminski. *Heat Transfer*, **112**, 555 560 (1990).
- [71] S.L. Sobolev. *Sov. Phys. Usp.*, **34**, 217 (1991).
- [72] M.N. Ozisik, D.Y. Tzou. *J. Heat Transfer*, **116**, 526 535 (1994).
- [73] M. Janicki, G. DeMay, M. Zubert, A. Napieralski. 30th SEMI-THERM Symposium, 202–206, (2014).
- [74] R.E. Khayat, J. deBruyn, M. Niknami, D.F. Stranges, R.M.H. Khorasani. *Int. J. Thermal Sci.*, **997**, 163 (2015).
- [75] K. Mitra, S. Kumar, A. Vedavarz, M.K. Moallemi. *J. Heat Transfer*, **117**, 568 (1995).
- [76] H. Herwig, K. Beckert. *Heat Mass Transfer*, **36**, 387 (2000).
- [77] W. Roetzel, N. Putra, S.K. Das. *Int. J. Thermal Sci.*, **42**, 541 (2003).
- [78] P.J. Antaki. *J. Heat Transfer*, **127**, 189 (2005).
- [79] F. Xu, K.A. Seen, T. Lu. *J. Int. J. Heat Mass Transfer*, **51**, 2237 (2008).
- [80] Y. Rabin, P.S. Steif. *J. Appl. Mech.*, **65**, 328 (1998).
- [81] Y. Rabin, P.S. Steif. *Int. J. Solids Struct.*, **37**, 2363 (2000).
- [82] Z.S. Deng, J. Lin. *J. Thermal Stresses*, **26**, 779 (2003).
- [83] X. Shi, A.K. Datta, S. Mukharjee. *J. Thermal Stresses*, **22**, 275 (1999).
- [84] Z.Z. Hua, H.Y. Xu, G.Y. Zhou, J.F. Liu, H. Huang, W.X. Ding. *Sci. in China, Ser. E.*, **44**, 159 (2001).
- [85] X. Shi, A.K. Datta. *J. Biomech. Eng.*, **120**, 720 (1998).
- [86] Q. Liu, P. Jiang, H. Xiang. *Prog. Nat. Sci.*, **18**, 999 (2008).
- [87] T.H. Yu, J. Liu, Y.X. Zhou. *J. Thermal Stresses*, **27**, 1089 (2004).
- [88] I.A. Lubashevsky, V.V. Gaychuk, B.Y. Datsko. arXiv:cond-mat/020105/v1 [cond-mat.soft], (2002).
- [89] N. Afrin, Y. Zhang, J.K. Chen. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **54**, 2419 (2011).
- [90] H.H. Pennes. *J. Appl. Physiol.*, **1**, 93 (1948); reprinted: *Ibid*, **85**, 5 (1998).
- [91] J. Crezee, J. Lagendijk. *J. W. Phys. Med. Biol.*, **37**, 1321 (1992).
- [92] A. Lakssass, E. Kengne, H. Semmaoui. *Natural Sci.*, **2**, 1375 (2010).
- [93] R. Livi, S. Lepri. *Nature*, **421**, 327 (2003).
- [94] A. Sellitto, F.X. Alvarez. *Nanosc. Systems*, **1**, 38 (2012).
- [95] M. Pumarol, M.C. Rosamond, P.D. Tovee, M.C. Petty, D. Zeze, V.I. Falko, O.V. Kolosov. *Nano Lett.*, **12**, 2906 (2012).
- [96] A.K. Majee, Z. Aksamija. *Phys. Rev. B*, **93**, 235423 (2016).
- [97] A. Henry, G. Chen. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 235502 (2008).
- [98] A. Henry, G. Chen. *Phys. Rev. B*, **79**, 144305 (2009).
- [99] A. Jou, A. Sellitto, F.X. Alvarez. *Proc. R. Soc. A*, **467**, 2520 (2011).
- [100] P. Grassberger, L. Yang. arXiv: [cond-mat/020424], (2002).
- [101] C.W. Chang, D. Okawa, H. Garcia, A. Majumdar, A. Zettl. *Phys. Rev. Lett.*, **101**, 075903 (2008).
- [102] А.В. Елецкий. *УФН*, **179**, 225 (2009).
- [103] A.J. Majumdar. *Heat Transfer*, **115**, 7 (1993).
- [104] E.M. Moares. *Heat Conduction - Basic Research*, Edit: V. Vikrenko, (InTech, 2011).
- [105] K. Takahashi. *JSME Int. J. Ser. A*, **40**, 99 (1997).
- [106] M.E. Gurtin, A.C. Pipkin. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, **31**, 113 (1969).
- [107] D.D. Joseph, L. Presiosi. *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 41 (1989).
- [108] J. Hristov. *Thermal Sci.*, **17**, 733 (2013).
- [109] S. Rukolaine, A. Samsonov. *Phys. Rev. E*, **88**, 062116 12 (2013).
- [110] A.H. Akbarzadeh, D. Pasini. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **75**, 656 667 (2014).
- [111] K.C. Liu. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **81**, 347 (2015).
- [112] D.D. Joseph, L. Presiosi. *Rev. Mod. Phys.*, **62**, 375 (1990).
- [113] S.I. Serdyukov. *Theor. Found. Chem. Eng.*, **47**, 122 (2013).

- [114] D. Jou, J. Casas-Vazouez. *Physica A*, **163**, 47 (1990).
- [115] L. Cheng, M. Xu, L. Wang. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **51**, 6018 (2008).
- [116] S.N. Li, B.Y. Cao. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **98**, 824 (2016).
- [117] M. Ciesielski, M. Duda, B. Mochnacki. *J. Appl. Math. Comput. Mech.*, **15**, 33 (2016).
- [118] J.H. Choi, S.H. Yoon, S.G. Park, S.H. Choi. *J. Korean Soc. Marine Eng.*, **40**, 389 (2016).
- [119] J.I. Frankel, B. Vick, M.N. Ozisik. *J. Appl. Phys.*, **58**, 3340 (1985).
- [120] B.D. Nie, B.Y. Cao. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **135**, 974 (2019).
- [121] L. Bergamasco, M. Alberhini, M. Fasano, A. Cardellini, E. Chiavazzo, P. Asinari. *Entropy*, **20**, 126 (2018).
- [122] C.I. Christov, P.M. Jordan. *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 154301 (2005).
- [123] C.I. Christov. *Mech. Res. Comm.*, **36**, 481 (2009).
- [124] R.E. Khayat, M. Ostoja-Starzewski. *Discrete Contin. Dynam. Syst., Series B*, **15**, 991 (2011).
- [125] A. Barletta, E. Zanchini. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **40**, 1007 (1997).
- [126] A. Barletta, E. Zanchini. *Phys. Rev. B*, **55**, 14208 (1997).
- [127] E. Zanchini. *Phys. Rev. B*, **60**, 991 (1999).
- [128] J.A. Conejero, A. Peris, M. Trujillo. *Int. J. Bifurc. Chaos*, **20**, 2943 (2010).
- [129] D. Jou, J. Casa-Vazquez, G. Lebon. *Rep. Prog. Phys.*, **51**, 1105 (1988).
- [130] D. Jou, J. Casa-Vazquez, G. Lebon. *Rep. Prog. Phys.*, **62**, 1035 (1999).
- [131] S.N. Li, B.Y. Cao. *Entropy*, **18**, 391 (2016).
- [132] X. Liu, Y. Zhu, F. Zhang, X.F. Gong. *Chin. Phys. B*, **22**, 024301 (2013).
- [133] A. Salazar. *Ur. J. Phys.*, **27**, 1349 (2006).
- [134] D.Y. Tzou. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **36**, 1845 (1993).
- [135] D.J. Tzou. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **38**, 3231 (1995).
- [136] D.Y. Tzou. *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior*, 2nd ed. (Wiley, N.Y., 2015).
- [137] F. Xu, T. Lu. *J. Adv. Appl. Math.*, **43**, 147 (2009).
- [138] W. Dai, N. Nassar. *Num. Heat Transfer*, **127**, 243 (2000).
- [139] K.C. Liu, H.T. Chen. *Int. J. Thermal Sci.*, **49**, 1138 (2010).
- [140] Y. Zhang. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **52**, 4829 (2009).
- [141] V.V. Kulish, V.B. Novozhilov. *J. Heat Transfer*, **126**, 805 (2004).
- [142] J. Ordóñez-Miranda, J. Alvarado-Gill. *Nanosc. Res. Lett.*, **6**, 327 (2011).
- [143] M. Xu, J. Guo, L. Wang, L. Cheng. *Int. J. Heat Sci.*, **50**, 825 (2011).
- [144] M.I. Kaganov, I.M. Lifshitz, M.V. Tanatarov. *Sov. Phys. JETP*, **4**, 173 (1957).
- [145] S.I. Anisimov, B.L. Kapeliovich, T.L. Perelman. *Sov. Phys. JETP*, **39**, 375 (1974).
- [146] T.Q. Qiu, C.L. Tien. *J. Heat Transfer*, **115**, 835 (1993).
- [147] D.Y. Tzou. *Int. J. Heat Transfer*, **38**, 3231 (1995).
- [148] Y. Zhang. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **52**, 4829 (2009).
- [149] D.Y. Tzou, W. Dai. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **52**, 1206 (2009).
- [150] K.C. Liu. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **54**, 2829 (2011).
- [151] K.C. Liu, P.J. Cheng, J.C. Wang. *Int. J. Eng. Technol.*, **6**, 132 (2014).
- [152] L. Wang, M. Xu, X. Zhou. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **44**, 1650 (2001).
- [153] L. Wang, M. Xu. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **45**, 1165 (2002).
- [154] K.C. Liu, P.J. Cheng, Y.N. Wang. *Thermal Sci.*, **15**, S61 (2011).
- [155] J. Escolano, F. Rodriguez, M.A. Castro, F. Vives, J.A. Martin. *Math. Comput. Model.*, **54**, 1841 (2011).
- [156] S.A. Rukolaine. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **78**, 58 (2014).
- [157] S.A. Rukolaine. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **113**, 83 (2017).
- [158] R. Quintanilla, R. Racke. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **49**, 1209 (2006).
- [159] R. Quintanilla. *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, **27**, 217 (2001).
- [160] M. Fabrizio, B. Lazzari. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **74**, 484 (2014).
- [161] M. Xu. *J. Heat Transfer*, **133**, 041401 (2011).
- [162] J. Zhou, Y. Zhang. *Comput. Biol. Med.*, **39**, 288 (2009).
- [163] M. Jaunich, S. Rajc, K. Kim, K. Mitra, Z. Guo. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **51**, 5511 (2008).
- [164] N. Afrin, J. Zhou, Y. Zhang, D.Y. Tzou, J.K. Chen. *Numer. Heat Transfer, Part A*, **61**, 483 (2012).
- [165] H. Ahmadikia, A. Moradi, R. Fazlali, A. Parsa. *J. Mechan. Sci. Technol.*, **26**, 1937 (2012).
- [166] N. Sahoo, S. Ghosh, A. Narasimhan, S.K. Das. *Int. J. Thermal Sci.*, **76**, 208 (2014).
- [167] K.C. Liu, J.C. Wang. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **70**, 621 (2014).
- [168] H.Z. Poor, H. Moosavi, A. Moradi, H.G. Menghari, M. Parastarfeizabadi. *Int. J. Mech. Syst. Eng.*, **4**, 33 (2014).
- [169] P. Hooshomand, A. Moradi, B. Khezri. *Int. J. Thermal Sci.*, **90**, 214 (2015).
- [170] S. Kumar, A. Srivastava. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **90**, 166 (2015).
- [171] M. Jasinsky, E. Majhrzak, L. Turchan. *Appl. Math. Model.*, **40**, 750 (2016).
- [172] J. Zhou, Y. Zhang, J.K. Chen. *Int. J. Thermal Sci.*, **48**, 1477 (2009).
- [173] M.J. Noroozi, S. Saedodin, D.D. Gangi. *Alexandria Eng. J.*, **55**, 1745 (2016).
- [174] C. Li, J. Miao, K. Yang, X. Guo, J. Tu, P. Huang, D. Zhang. *J. Appl. Phys.*, **123**, 174906 (2018).
- [175] P. Kumar, D. Kumar, K.N. Rai. *J. Thermal Biol.*, **49–50**, 98 (2015).
- [176] J.R. Ho, C.P. Kuo, W.S. Jiaung. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **46**, 55 (2013).
- [177] A. Moradi, H. Ahmadikia. *J. Eng. Med.*, **226**, 406 (2012).
- [178] H. Ahmadikia, A. Moradi. *Heat Mass Transfer*, **48**, 2559 (2012).
- [179] K.C. Li, H.T. Chen. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **52**, 1185 (2009).
- [180] V. Borjalilou, M. Asghari, E.J. Bagheri. *Thermal Stresses*, **42**, 1 (2019).
- [181] Y. Chou, R. Yang. *J. Int. J. Heat Mass Transfer*, **52**, 239 (2009).
- [182] S.C. Chang. *J. Comput. Phys.*, **119**, 295 (1995).
- [183] C.Y. Loh, S.C. Hultgren, S.C. Chang. *AIAA J.*, **39**, 794 (2001).
- [184] A.H. Akbarzadeh, Y.Y. Cui, Z.T. Chen. *RSC Adv.*, **7**, 13623 (2017).
- [185] A. Green, P. Naghdi. *Proc. Roy. Soc. L.*, **357**, 253 (1991).
- [186] A. Green, P. Naghdi. *J. Thermal Stresses*, **15**, 253 (1992).
- [187] S.K.R. Choudhuri. *J. Thermal Sci.*, **30**, 231 (2016).
- [188] A.H. Akbarzadeh, J. Fu, Z. Chen. *Trans. Canadian Soc. Mech. Eng.*, **38**, 155 (2014).
- [189] R. Kumar, A.K. Vashishth, S. Ghangas. *Int. J. Appl. Mech. Eng.*, **24**, 603 (2019).

- [190] R. Kumar, V. Gupta. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **23**, 896 (2016).
- [191] R.A. Guyer, J.A. Krumhansl. *Phys. Rev.*, **148**, 766 (1966).
- [192] R.A. Guyer, J.A. Krumhansl. *Phys. Rev.*, **148**, 778 (1966).
- [193] M. Calvo-Schwartzwalder, T.G. Meyers, M.G. Hennessy. arXiv: 19055.06320 [cond-mat.mes-hall], (2019).
- [194] G. Chen. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 2297 (2001).
- [195] G. Chen. *J. Heat Transfer*, **124**, 320 (2002).
- [196] H.L. Li, B.Y. Cao. *Nanosc. Microsc. Thermophys. Eng.*, **23**, 10 (2018).
- [197] R. Yang, G. Chen, M. Laroche, Y. Taur. *Trans. ASME*, **127**, 298 (2005).
- [198] P.B. Allen. *Phys. Rev. B*, **97**, 134307 (2018).
- [199] C. Hua, L. Lindsay, X. Chen, A.J. Minnich. arXiv: 1902.10020 [cond-mat.mtrl-sci], (2019).
- [200] Y. Guo, M. Wang. *Phys. Rev. B*, **97**, 035421 (2018).
- [201] A. Cepellotti, N. Marzari. *Phys. Rev. X*, **6**, 041013 (2016).
- [202] R.C. Tolman. *Phys. Rev.*, **35**, 904 (1930).
- [203] M. Wang, N. Yang, Z.Y. Guo. *J. Appl. Phys.*, **110**, 064310 (2011).
- [204] Z.Y. Guo. *J. Eng. Thermophys.*, **27**, 631 (2006).
- [205] Y. Dong, B.Y. Cao, Z.Y. Guo. *Phys. Rev. E*, **87**, 032150 (2013).
- [206] H.D. Wang. *Theoretical, Experimental Studies on Non-Fourier Heat Conduction Based on Thermomass Theory*. (Springer, 2014).
- [207] Y. Dong, B.Y. Cao, Z.Y. Guo. *J. Appl. Phys.*, **110**, 063504 (2011).
- [208] M. Wang, B.Y. Cao, Z.Y. Guo. *Front. Heat Mass Transfer*, **1**, 013004 (2010).
- [209] J. Wu, Z. Guo, B. Song. *Tsinghua Sci. Technol.*, **14**, 12 (2009).
- [210] Y. Dong, B.Y. Cao, Z.Y. Guo. *Phys. Rev. E*, **85**, 061107 (2012).
- [211] С.И. Соболев. *УФН*, **167**, 1045 (1997).
- [212] P. Van, T. Fulop. *Ann. Phys.*, **524**, 470 (2012).
- [213] R. Kovacs, P. Van. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **83**, 613 (2015).
- [214] A. Sellitto, V.A. Cimmelli. *J. Heat Transfer*, **134** (2012).
- [215] G.J. Lebon. *Non-Equilib. Thermodyn.*, **39**, 35 (2014).
- [216] D. Jou, V.A. Cimmelli. *Commun. Appl. Industr. Math.*, **7**, 196 (2016).
- [217] A. Sellitto, P. Rogolino, I. Carlomagno. *Commun. Appl. Industr. Math.*, **7**, 39 (2016).
- [218] P. Rogolino, R. Kovacs, P. Van, V.A. Cimmelli. arXiv: 1709.05502 [cond-mat,stat-mech], (2018).
- [219] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. (Наука и техника, Минск, 1987).
- [220] А.М. Нахушев. *Дробное исчисление и его применение*. (Физматлит, Москва, 2003).
- [221] В.А. Нахушева. *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов*. (Наука, М., 2006).
- [222] В.Е. Тарасов. *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка*. (Higher Education Press, Москва-Ижевск, 2011).
- [223] F. Mainardi, R. Goremo. *Int. J. Theor. Appl.*, **10**, 269 (2007).
- [224] M. Delkhosh. *Appl. Math. Phys.*, **1**, 103 (2013).
- [225] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. (AP, 1998).
- [226] C. Li, D. Qian, Y.Q. Chen. *Discr. Dyn. Nat. Soc.*, **2011**, 562493 (2011).
- [227] K.B. Oldham, J. Spanier. *The Fractional Calculus*. (AP, 1974).
- [228] V.E. Tarasov. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **93**, 427 430 (2016).
- [229] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. *Theory, Applications of Fractional Differential Equations*. (North Holland, 2006).
- [230] B. Li, J. Wang. *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 044301 (2003).
- [231] Y. Yu, D. Xu, Y.S. Xu, Q. Zhang. *Appl. Math. Model.*, **40**, 23 (2016).
- [232] M. Rahimy. *Appl. Math. Sci.*, **4**, 2453 (2010).
- [233] S.X. Deng, X.X. Ge. *Thermal Sci.*, **23**, 1671 (2019).
- [234] J.H. He, F. Liu. *Nonlinear Sci. Lett.*, **4**, 15 (2013).
- [235] V.D. Beybalaev. *Матем. Модел.*, **21**, 55 (2009).
- [236] V.D. Beybalaev, A.A. Aliverdiev, R.A. Magomedov, R.R. Meilanov, E.N. Akhmedov. *Vestn. Samar. Gos. Techn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **21**, 376 387 (2017).
- [237] J.H. He, Z.B. Li, Q.J. Wang. *King Saud Univ. — Sci.*, **28**, 190 (2016).
- [238] Q.L. Wang, J.H. He, Z.B. Li. *Thermal Sci.*, **16**, 339 (2012).
- [239] Р.П. Мейланов, М.Р. Шабанова. *ЖТФ*, **81**, 1 (2011).
- [240] V.R. Voller, F. Falcini, R. Garcia. *Phys. Rev. E*, **87**, 042401 (2013).
- [241] R. Meylanov, M. Shabanova, E. Akhmedov. *Int. Rev. Chem. Eng.*, **3**, 810 813 (2011).
- [242] D. Sierociuk, A. Dzielinski, G. Sarwas, I. Petr, I. Podlubny, T. Skovranek. *Phil. Trans., Series A*, **371**, 20120146 (2013).
- [243] R.S. Damor, S. Kumar, A.K. Shukla. *J. Mech. Med. Biology*, **14**, 1450018 (2014).
- [244] R.S. Damor, S. Kumar, A.K. Shukla. *Am. J. Math. Analysis*, **1**, 20 (2013).
- [245] R.S. Damor, S. Kumar, A.K. Shukla. *Fractional Differential Calculus*, **5**, 43 (2015).
- [246] M. Ezzat, N. Al-Sowayan, Z. Al-Muhammed, S. Ezzat. *Heat Mass Transfer*, **50**, 907 914 (2014).
- [247] L.L. Ferras, N.J. Ford, M.L. Morgado, J.M. Nobrea, M.S. Rebelo. *Fract. Calculus Appl. Anal.*, **18**, 1080 (2015).
- [248] J. Singh, P.K. Gupta, K.N. Rai. *Math. Comput. Model.*, **54**, 2316 2325 (2011).
- [249] M. Zingales. *Comm. Nonlin. Num. Simul.*, **19**, 3938 (2014).
- [250] M. Zingales. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **67**, 593 (2013).
- [251] N.J. Burch, R.B. Lehoucq. SAND2010-8783P, (2010).
- [252] L. Liu, L.C. Zheng, F.W. Liu, X.X. Zhang. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **103**, 1191 (2016).
- [253] B. Yu, X. Jiang, C. Wan. *Appl. Math. Comp.*, **274**, 106 (2016).
- [254] P. Kumar, D. Kumar, K.N. Rai. *Proc. Eng.*, **127**, 56 (2015).
- [255] X. Jiang, H. Qi. *J. Phys. A: Math. Theor.*, **45**, 485101 (2012).
- [256] H.T. Qi, H.Y. Xu, X.W. Guo. *Appl. Math. Comput.*, **186**, 286 (2007).
- [257] T.N. Mishra, K.N. Rai. *Propuls. Power Res.*, **5** (1), 45 (2016).
- [258] Л.И. Мороз, А.Г. Масловская. *Матем. матем. модел.*, **2**, 29 (2019).
- [259] J. Christov. *Thermal Sci.*, **20**, 757 (2016).
- [260] M. Caputo, M. Fabrizio. *Progr. Fract. Di er. Appl.*, **1**, 73 (2015).
- [261] B.S. Alkahtani, A. Atangana. *Thermal Sci.*, **21**, 1 (2017).
- [262] X.L. Yang, H.M. Srivastava, J.A.T. Machado. arXiv: 1601.01623, (2015).
- [263] X.J. Yang, Y. Han, J. Li, W.X. Liu. *Thermal Sci.*, **20**, S717 (2016).
- [264] C.C. Ji, W. Dai, Z.Z. Sun. *J. Sci. Comput.*, **75**, 1307 (2018).
- [265] C.C. Ji, W. Dai, Z.Z. Sun. *J. Sci. Comput.*, **81**, 1767 (2019).

- [266] H.Y. Xu, X.Y. Jiang. *Chin. Phys. B*, **24**, 034401 (2015).
- [267] L. Liu, L. Zheng, F. Liu. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **127**, 165 (2018).
- [268] M.A. Ezzat, A.S. El Karamany, M.A. Fayik. *Arch. Appl. Math.*, **82**, 557 (2012).
- [269] M.A. Ezzat, A.A. El-Bary, M.A. Fayik. *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **20**, 593 (2013).
- [270] J. Fan, L.J. Wang. *Appl. Phys.*, **109**, 104202 (2011).
- [271] D. Sarkar, A. Haji-Sheikh, A. Jain. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **91**, 602 (2015).
- [272] A. Barletta, E. Zanchini. *Heat mass transfer*, **31**, 443 (1996).
- [273] S. Saerdodin, M. Torabi, H. Eskandar, M.J. Akbari. *Comput. Anal. Appl.*, **13**, 411 (2011).
- [274] H. Ahmadikia, R. Fazlali, A. Moradi. *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, **39**, 121 (2012).
- [275] H. Ahmadikia, A. Moradi, R. Fazlali, A. Basiri Parsa. *J. Mech. Sci. Technol.*, **26**, 1937 (2012).
- [276] B. Kundu, D. Dewanjee. *Case Stud. Therm. Eng.*, **5**, 79 (2015).
- [277] R.T. Al-Khairy, Z.M. Al-Ofey. *J. Appl. Math.*, **2009**, 504 (2009).
- [278] H. Askarizadeh, H. Ahmadikia. *Int. J. Engin.*, **27**, 971 (2014).
- [279] H. Askarizadeh, H. Ahmadikia. *Heat Mass Transfer*, **50**, 1673 (2014).
- [280] S.M. Lin. *J. Mech. Med. Biol.*, **13**, 1350063 (2013).
- [281] R. Alkhairy. *Appl. Math.*, **3**, 1170 (2012).
- [282] W. Dai, R. Nassar. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **45**, 1585 (2002).
- [283] K. Zhukovski. *Entropy*, **19**, 440 (2017).
- [284] K. Zhukovski, D. Oskolkov, N. Gubina. *Axioms*, **7**, 48 (2018).
- [285] R. Kovacs. arXiv: 1804.05225 [cond-mat.sta-mech], (2018).
- [286] A. Getinkaya, O. Kiyamaz. *Math. Comput. Model.*, **57**, 2349 (2013).
- [287] Y. Povstenko. *Cent. Eur. J. Phys.*, **11**, 1284 (2013).
- [288] Y. Povstenko. *Comm. Appl. Industr. Math.*, **6**, 1 (2014).
- [289] Y. Povstenko. *Entropy*, **15**, 4122 (2013).
- [290] L. Junyi, X. Mingyu. *J. Math. Anal. Appl.*, **351**, 536 (2009).
- [291] A.M. Yang, C. Cattani, H. Jafari, X. Yang. *J. Abstract Appl. Anal.*, **2013**, 462535 (2013).
- [292] M. Kazemi, G.H. Erjaee. *Iran. J. Sci. Tech.*, **A3**, 185 (2011).
- [293] U. Ghosh, S. Sengupta, S. Sarkar, S. Das. *Am. J. Math. Anal.*, **3**, 32 (2015).