

01.1;05.2;12.1;15.1;15.2

Метод расчета взаимной индуктивности системы катушек с использованием модели аксиально намагниченного цилиндра

© А.К. Андреев

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия
E-mail: alexande_andreev@yahoo.com

Поступило в Редакцию 19 сентября 2019 г.
В окончательной редакции 30 июля 2020 г.
Принято к публикации 30 июля 2020 г.

Предложен метод расчета взаимной индуктивности системы катушек с плотной намоткой через энергию аксиально намагниченных цилиндров. Получены формулы для расчета 3D-полей цилиндра и катушек, выраженные через эллиптические интегралы. Показано, что средний по объему размагничивающий фактор цилиндра равен коэффициенту Нагаока для собственной индуктивности коротких катушек.

Ключевые слова: взаимная индуктивность, 3D-поля, размагничивающий фактор, коэффициент Нагаока.

DOI: 10.21883/PJTF.2020.21.50198.18042

Методы расчета индуктивности катушек были разработаны Максвеллом (Maxwell, 1873 г.) и Лоренцем (Lorenz, 1879 г.). Обширная информация о методах определения индуктивностей и взаимных индуктивностей, а также ссылки на первоисточники приведены в [1]. На практике при расчетах используются аппроксимирующие формулы либо графоаналитические методы [1,2]. В настоящей работе представлен новый альтернативный аналитический метод определения индуктивностей сложной системы катушек. Метод основан на равенстве внутренних энергий катушек и эквивалентных им аксиально намагниченных цилиндров. Задача сводится к расчету энергии и взаимной энергии n цилиндров E_{ni} , имитирующих систему катушек. Энергии вычисляются через 3D-поля цилиндров $\mathbf{H}(r, z) = -\Delta\varphi(r, z)$, где $\varphi(r, z)$ — суммарный магнитостатический потенциал торцевых дисковых „зарядов“ цилиндра.

Схема расчета $\varphi(r, z)$ показана на рис. 1. В скалярной записи связь между M_z , j_s и σ определяется соотношениями [3]:

$$M_z = j_s, \quad \sigma = M_z. \quad (1)$$

При расчете индуктивностей задаются геометрические параметры катушки: длина h , диаметр $2a$, а также число круговых витков w и ток I [A/turn]. Плотность поверхностного тока катушки $j = wI/h$ определяет эквивалентную намагниченность цилиндра $M_z = j$ (рис. 1). Влияние неплотности намотки катушки (шага намотки) на корректность модели определено в [4].

При однородной намагниченности M_z размагничивающее поле равно

$$H_p(\mathbf{r}) = -M_z N(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где $N(\mathbf{r})$ — размагничивающий фактор, безразмерная величина, зависящая от формы образца ($0 \leq N \leq 1$).

$N(\mathbf{r})$ связывает компоненты поля в объеме цилиндра с его намагниченностью: $H_i = -N_{iz} M_z$, $i = r, z$. Вне цилиндра $N(\mathbf{r})$ есть коэффициент, по которому рассчитывается поле рассеяния. Размагничивающие факторы $N_{zz}(r, z)$ и $N_{rz}(r, z)$ часто определяются через функции

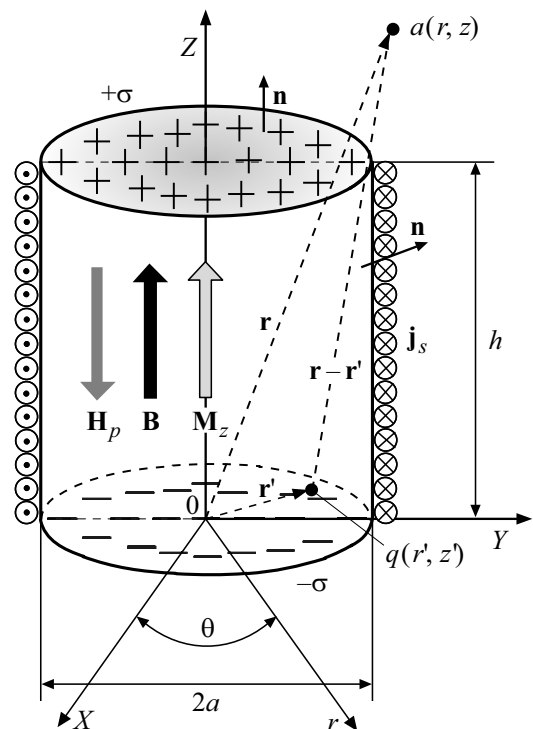


Рис. 1. Схема расчета $\varphi(r, z)$. H_p — размагничивающее поле цилиндра, \mathbf{B} — индукция цилиндра и катушки, $q(r', z')$ — точка источника поля, $a(r, z)$ — точка наблюдения, M_z — намагниченность цилиндра, $\mathbf{j}_s = M_z \mathbf{n}$ — плотность поверхностного тока катушки, $\sigma = M_z \mathbf{n}$ — плотность торцевых „магнитных зарядов“, \mathbf{n} — вектор нормали к поверхностям цилиндра.

Энергия и индуктивность магнитных систем

Номер цилиндра	Радиус цилиндра $a(n)$, см	Энергия цилиндра E_n , 10^3 J	Индуктивность катушки L_n , 10^3 H	Размагничивающий фактор \bar{N}	Коэффициент Нагаока $k(n)$	Взаимная энергия цилиндров E_{ni} , 10^3 J	Взаимная индуктивность катушек M_{ni} , 10^4 H
1	2.5	7.175	0.574	0.128	0.872	$E_{12} = 6.542$	$M_{12} = 5.233$
2	3.8	15	1.211	0.182	0.818	$E_{13} = 6.015$	$M_{13} = 4.811$
3	5	25	2.026	0.23	0.77	$E_{23} = 0.014$	$M_{23} = 11.04$

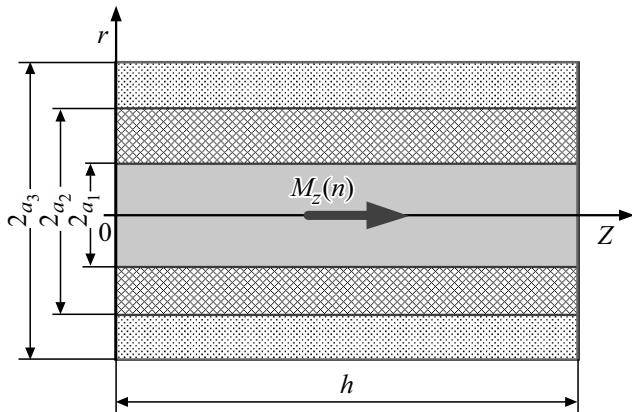


Рис. 2. К расчету взаимной индуктивности. Длины цилиндров $h = 15$ см, диаметры цилиндров: $2a_1 = 5$ см, $2a_2 = 7.6$ см, $2a_3 = 10$ см.

Бесселя [5]. Однако при использовании этой модели возникают проблемы при численном расчете [6].

Как показано в [7], коэффициенты $N_{zz}(r, z)$ и $N_{rz}(r, z)$ могут быть выражены через эллиптические интегралы. В [8] с учетом [7] определены размагничивающие факторы в объеме цилиндра

$$N_{zz}(r, z) = \left[1 - \frac{zk_1 K_C(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2 K_C(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4} \right], \quad 0 \leq z \leq h, \quad (3)$$

$$N_{rz}(r, z) = \left(\frac{1}{\pi} \right) \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ \left(\frac{1}{k_1} \right) \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{2} \right) K_C(k_1) - E_C(k_1) \right] - \left(\frac{1}{k_2} \right) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2} \right) K_C(k_2) - E_C(k_2) \right] \right\}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (4)$$

где

$$K_C(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta,$$

$$E_C(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

— полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулями

$$k_1^2 = 4ar[z^2 + (a+r)^2]^{-1},$$

$$k_2^2 = 4ar[(h-z)^2 + (a+r)^2]^{-1},$$

$$\Lambda_0(\alpha, \beta) = \left(\frac{2}{\pi} \right) [E_C(k)F(\beta, \sqrt{1-k^2}) + K_C(k)E(\beta, \sqrt{1-k^2}) - K_C(k)F(\beta, \sqrt{1-k^2})]$$

— лямбда-функции Хеймана, полные эллиптические интегралы третьего рода [9],

$$F(\beta, m) = \int_0^\beta (1 - m^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta,$$

$$E(\beta, m) = \int_0^\beta \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

— неполные эллиптические интегралы первого и второго рода с дополнительными модулями m и амплитудами β :

$$m_1 = \sqrt{1 - k_1^2}, \quad m_2 = \sqrt{1 - k_2^2},$$

$$\beta_1 = \arcsin \left[z [z^2 + (a-r)^2]^{-1/2} \right],$$

$$\beta_2 = \arcsin \left[(h-z) [(h-z)^2 + (a-r)^2]^{-1/2} \right],$$

где β_1, β_2 — главные значения \arcsin .

При расчетах полей вне цилиндрической области — полей рассеяния — необходимо переопределение формул (3), (4). Далее получены коэффициенты N_{zz} и N_{rz} , позволяющие вычислять 3D-поля во всем пространстве. Формулы записаны отдельно для характерных областей

внутри и вне цилиндра в пределах диапазонов изменения z и r [6]:

$$N_{zz}(r, z) = \begin{cases} \left[1 - \frac{zk_1 K_C(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2 K_C(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4} \right], & \text{если } (0 \leq z \leq h) \wedge (|r| \leq a) \\ 0, & \text{если } (0 \leq z \leq h) \wedge (r = 0), \\ -\frac{zk_1 K_C(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2 K_C(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4}, & \text{если } (z < 0) \wedge (0 < |r|) < a, \\ -\frac{zk_1 K_C(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2 K_C(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4}, & \text{если } (z > h) \wedge (0 < |r|) < a, \\ -\frac{zk_1 K_C(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2 K_C(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4}, & \text{если } (0 < z < h) \wedge (|r| > a), \\ -\frac{zk_1 K_C(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2 K_C(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4}, & \text{если } (z < 0) \wedge (|r| > a), \\ -\frac{zk_1 K_C(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2 K_C(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4}, & \text{если } (z > h) \wedge (|r| > a), \\ -\frac{1}{2} \left[\frac{h-z}{\sqrt{(h-z)^2 + a^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{h-z}{|h-z|} - \frac{z}{|z|} \right], & \text{если } r = 0, \\ 0 & \text{везде,} \end{cases} \quad (5)$$

$$N_{rz}(r, z) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\pi} \right) \left(\sqrt{\frac{a}{r}} \right) \left\{ \left(\frac{1}{k_1} \right) \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{2} \right) K_C(k_1) - E_C(k_1) \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{k_2} \right) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2} \right) K_C(k_2) - E_C(k_2) \right] \right\}, & \text{если } r > 0, \\ - \left(\frac{1}{\pi} \right) \left(\sqrt{\frac{a}{r}} \right) \left\{ \left(\frac{1}{k_1} \right) \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{2} \right) K_C(k_1) - E_C(k_1) \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{k_2} \right) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2} \right) K_C(k_2) - E_C(k_2) \right] \right\}, & \text{если } r < 0, \\ 0 & \text{везде.} \end{cases} \quad (6)$$

Последняя строка в (5) определяет размагничивающий фактор на оси. С учетом (2) z - и r -компоненты поля и индукции цилиндра равны

$$H_z(r, z) = -M_z N_{zz}(r, z), \quad (7)$$

$$H_r(r, z) = -M_z N_{rz}(r, z), \quad (8)$$

$$B_z(r, z) = \begin{cases} \mu_0(H_z + M_z), & \text{если } (0 \leq z \leq h) \wedge (0 \leq |r| \leq a), \\ \mu_0 H_z(r, z) & \text{везде,} \end{cases} \quad (9)$$

$$B_r(r, z) = \mu_0 H_r(r, z). \quad (10)$$

Расчет полей рассеяния через эллиптические интегралы обеспечивает получение стабильных численных результатов при любых параметрах магнитной системы. В модели не накладываются какие-либо ограничения на

взаимное расположение цилиндров (катушек) и их геометрические и магнитные параметры. Программы расчета $N_{zz}(r, z)$ и $N_{rz}(r, z)$ опубликованы в [10]. В [11,12] получены аналитические выражения для полей цилиндра при произвольной ориентации намагниченности.

Далее приведена схема расчета взаимной индуктивности в системе трех соосных катушек ($n = 3$). На рис. 2 представлены конфигурация системы и используемые расчетные параметры. Равные намагниченности и длины цилиндров были введены для демонстрации работоспособности модели на простом примере. Расчеты выполнены в соответствии с формулами (5), (9). Суть метода заключается в расчете взаимной энергии между всеми парами цилиндров. Понятие „индуктивность цилиндра“ не имеет физического смысла. Вычисление же энергии цилиндра есть важнейший промежуточный

этап при расчете взаимной индуктивности катушек. Цилиндры нумеруются с присвоением номера (индекса) для каждого параметра и формулы. Задавая равные токи в моделируемых катушках $I(n) = 5 \text{ A/turn}$, получаем $M_z(n) = 6.667 \text{ A/m}$. Энергия n -го цилиндра радиусом $a(n)$ в поле i -го цилиндра радиусом $a(i)$ равна

$$E_{cyl}(n, i) = 2\pi \int_0^h \int_0^{a(n)} \frac{M_z(n)B_z(i, r, z)}{2} r dr dz. \quad (11)$$

Коэффициент взаимной индуктивности с учетом (11) определяется по формуле

$$M_{ni} = \frac{2E_{cyl}(n, i)}{I(n)I(i)}. \quad (12)$$

Учитывая равенство взаимных энергий цилиндров, расчеты M_{ni} достаточно проводить только для одной пары системы. Энергию n -го цилиндра и собственную индуктивность n -й катушки L вычисляем по формулам (11), (12), полагая $n = i$.

Собственная индуктивность катушки L определяется также через коэффициент Нагаока k_{1L} [13] с помощью соотношения

$$L = (\mu_0 w^2 \pi (2a)^2 / 4h) k_{1L} \quad (0 \leq k_L \leq 1).$$

Выражение в скобках есть индуктивность участка длиной h бесконечно длинного соленоида. Из (5) (строки 1, 7) аналог k_{1L} следует из среднего по объему размагничивающего фактора цилиндра \bar{N}_z :

$$k_L = 1 - \frac{2\pi}{\pi a^2 h} \int_0^h \int_0^a N_{zz}(r, z) dr dz = 1 - \bar{N}_z. \quad (13)$$

Результаты расчетов параметров магнитных систем при $n = 3$ суммированы в таблице.

Тестовые расчеты M_{ni} основных схем взаимного расположения катушек по приведенной модели соответствуют результатам, полученным в [2].

Независимость размагничивающих факторов цилиндров от внешних полей позволяет применять „энергетический подход“ для расчета сложных систем, составленных из отдельных элементов. Существуют и другие области применения полученных в настоящей работе результатов. Например, по известной взаимной энергии цилиндров можно определить пондеромоторные силы в системе катушек, минуя стадию расчета индуктивности.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] <http://coil32.ru/>; <http://g3ynh.info/zdocs/magnetics/>
- [2] Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. Л.: Энергоатомиздат, 1986. 488 с.
- [3] Парселл Э. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1975. 440 с.
- [4] Андреев А.К. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 1. С. 34–43.
- [5] Bateman H. Partial differential equations of mathematical physics. N.Y.: Dover Publ., 1944. 556 p.
- [6] Андреев А.К. Магнитостатика ферромагнетиков. М.: Изд-во МАИ, 2011. 162 с.
- [7] Eason G., Noble B., Sneddon I.N. // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A. 1955. V. 247. P. 529–551.
- [8] Joseph R.I., Schlömann E. // J. Appl. Phys. 1964. V. 36. P. 1579–1593.
- [9] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [10] Андреев А.К. Программы для ЭВМ. Свидетельство о государственной регистрации № 2012614673. 2012. Бюл. № 3. Ч. 2. С. 378–379.
- [11] Taniguchi T. // J. Magn. Magn. Mater. 2018. V. 452. P. 464–472.
- [12] Caciagli A., Baars R.J., Philipse A.P., Kuipers B.W.M. // J. Magn. Magn. Mater. 2018. V. 456. P. 423–432.
- [13] Nagaoka H. // J. Coll. Sci. 1909. V. 27. P. 18–33.