

10,18

Бозонный пик в аморфном графене в рамках модели устойчивых случайных матриц

© И.О. Райков¹, Д.А. Коных², А.Н. Ипатов^{3,1}, Д.А. Паршин^{3,1}, ¶

¹ Санкт-Петербургский академический университет РАН, Санкт-Петербург, Россия

² Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

³ Санкт-Петербургский политехнический университет, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: conyuh.dmitrij@yandex.ru

Поступила в Редакцию 11 июня 2020 г.

В окончательной редакции 11 июня 2020 г.

Принята к публикации 24 июня 2020 г.

Исследовано влияние беспорядка в распределении атомных силовых констант на оптические и акустические фононы в скалярной модели кристаллического графена как для колебаний лежащих в плоскости листа, так и для изгибных мод. Показано, что при достаточной степени беспорядка, в рамках модели устойчивых случайных матриц, обладающих трансляционной симметрией, возникает избыточная, по сравнению с дебаевской, плотность колебательных состояний бозонный пик. С ростом амплитуды относительных флуктуаций силовых констант и уменьшением среднего модуля Юнга системы, бозонный пик смещается в сторону более низких частот. При относительно слабом беспорядке (или в отсутствие беспорядка), в плотности состояний $g(\omega)$ имеется два пика, которые соответствуют логарифмическим сингулярностям ван-Хова для акустических и оптических фононов кристаллического графена. По мере увеличения беспорядка эти пики уширяются и сливаются в один, бозонный пик. Причем первыми за счет беспорядка разрушаются оптические фононы, а акустические фононы плавно трансформируются в бозонный пик. Для изгибных мод картина немного другая. По-прежнему беспорядок размывает сингулярности ван-Хова, но приводит к появлению в системе фононов, которые формируют бозонный пик и движутся вместе с ним в сторону малых частот при возрастании степени беспорядка.

Ключевые слова: аморфный графен, бозонный пик, случайные матрицы.

DOI: 10.21883/FTT.2020.11.50069.126

1. Введение

В настоящее время одним из важных разделов современной теории конденсированных сред является изучение такого интересного материала, как аморфный графен. Он, как и кристаллический графен, представляет собой моноатомный плоский слой атомов углерода, в котором каждый атом связан валентной sp^2 -связью с тремя своими ближайшими соседями в двумерной решетке [1–4] (см. рис. 1). Как известно, кристаллический графен, благодаря уникальным особенностям его зонной структуры, обладает исключительными механическими [5,6], физическими [7,8] и оптическими свойствами [9], которые находят применения [10] в различных областях. Отметим здесь его рекордно большую теплопроводность [11].

Аморфный графен исследован далеко не так подробно как кристаллический. Его электрические свойства резко отличаются от таковых у его кристаллического аналога [2,3,12]. Также было замечено, что аморфный графен имеет высокие прочностные качества по сравнению со своей кристаллической модификацией [13–15]. Теплопроводность аморфного графена была изучена теорети-

чески [16,17] в рамках модели [18,19], где было впервые введено такое важное понятие как *диффузон*.

В силу имеющегося в системе беспорядка, упругие силы между атомами аморфного графена флуктуируют. В связи с этим, большой интерес представляет изучение колебательных свойств аморфного графена в зависимости от амплитуды этих флуктуаций. Известно,

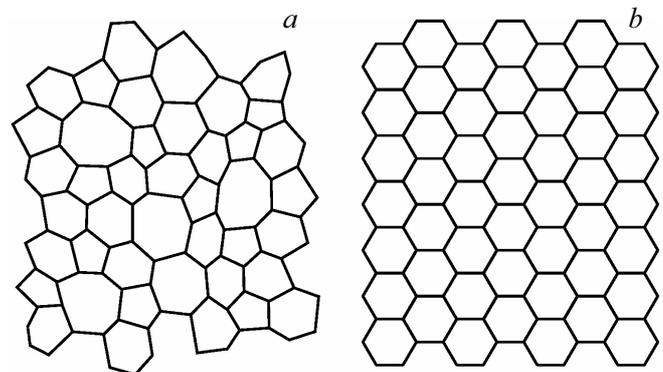


Рис. 1. Монокристаллический графен (a) и аморфный графен (b).

что практически все аморфные тела в низкочастотной области колебательного спектра обладают общими универсальными свойствами. Одним из таких свойств является *бозонный пик*, характеризующий избыточную, по сравнению с дебаевской, плотность колебательных состояний $g(\omega)/g_D(\omega)$. Несмотря на большое число работ, посвященных бозонному пику, его общепринятая физическая интерпретация до сих пор отсутствует [20–25].

Некоторые авторы связывают появление бозонного пика с сингулярностью ван-Хова поперечных акустических фононов в соответствующих кристаллах с одним атомом в элементарной ячейке [26,27]. Однако в решетках с более чем одним атомом в элементарной ячейке, наряду с акустическими фононами, существуют и оптические фононы. Простейшим примером такого материала и является монослой графена. В нем есть продольные и поперечные акустические и оптические фононы, лежащие в плоскости графена, и две сингулярности ван-Хова. В этом случае связь бозонного пика с сингулярностями ван-Хова требует отдельных исследований, и изучение бозонного пика в аморфном графене представляет собой особый интерес.

Также следует принимать во внимание, что кроме планарных колебательных мод в монослое графена имеется еще один тип колебаний, перпендикулярных его плоскости — так называемые изгибные моды. Особенность этих колебаний заключается в том, что при малых частотах они, как предполагается по аналогии с теорией упругости [28], имеют закон дисперсии $\omega \propto q^2$ и соответственно очень малую скорость распространения при малых импульсах $\hbar q$. Однако вопрос о влиянии беспорядка на изгибные моды до сих пор остается открытым. В силу симметрии, изгибные моды никак не взаимодействуют с планарными модами графена (фононами). В связи с этим, возникает интерес рассмотреть изгибные колебания аморфного графена на предмет наличия в них бозонного пика. Ожидается, что при сильном беспорядке в системе изгибные моды исчезнут с появлением бозонного пика, который тогда будет иметь чисто фононное происхождение. Одной из целей нашей работы является проверить это предположение.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разд. 2 описываются имеющиеся в кристаллическом графене типы колебаний, а также обосновывается наш выбор скалярной модели. В разд. 3 представлен вывод закона дисперсии фононов, поляризованных в плоскости листа графена, а в разд. 4 получена их плотность колебательных состояний в рамках скалярной модели. В разд. 5 описываются изгибные моды кристаллического графена с квадратичным законом дисперсии. В разд. 6 представлен подход для описания колебаний аморфного графена, основанный на использовании теории случайных матриц. Наконец, в разд. 7 приводятся полученные плотности колебательных состояний и находятся важные закономерности, связанные с бозонным пиком.

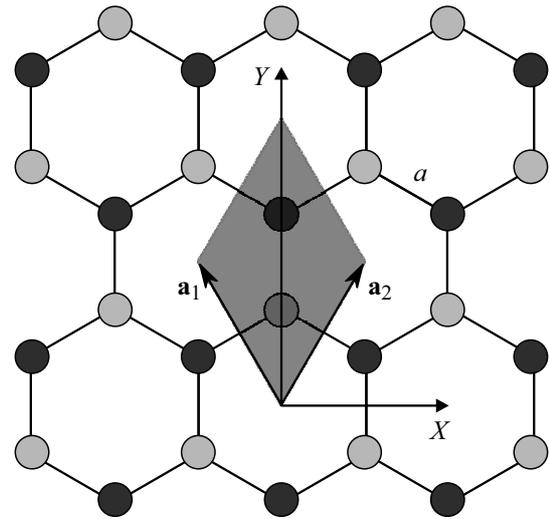


Рис. 2. Изображение гексагональной решетки графена. Серым цветом показана элементарная ячейка, в которой находятся 2 атома углерода, и темным цветом показаны узлы двух разных подрешеток кристалла. \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 — векторы трансляции решетки.

2. Скалярная модель колебаний кристаллической решетки графена

Кристаллическая решетка графена является двумерной гексагональной решеткой, представляющей собой плоскость, состоящую из шестиугольных ячеек, в вершинах которых находятся атомы углерода. Для такой решетки известно, что ее обратная решетка также будет гексагональной, а зона Бриллюэна имеет форму правильного шестиугольника. В элементарной ячейке решетки графена находятся два атома. Каждый из этих атомов при сдвиге на вектора трансляции $\mathbf{a}_{1,2}$ образует подрешетку из эквивалентных ему атомов, расположенных в эквивалентных узлах кристалла, то есть свойства кристалла независимы от точек наблюдения. На рис. 2 представлены эти две подрешетки атомов, закрашенных разными цветами. Выберем вектора трансляции решетки \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 так, как показано на рис. 2. Вектора трансляции связаны с расстоянием a между ближайшими атомами углерода в вершинах шестиугольников следующим образом:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{3a}{2} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}a}{2} \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{3a}{2} \mathbf{e}_x - \frac{\sqrt{3}a}{2} \mathbf{e}_y, \quad (1)$$

где \mathbf{e}_x и \mathbf{e}_y — единичные орты вдоль осей X и Y соответственно.

На элементарную ячейку графена приходится шесть колебательных степеней свободы — три акустических ветви (LA, TA, ZA) и три оптических (LO, TO, ZO). Здесь L — обозначает продольные фононы (волновой вектор \mathbf{q} направлен вдоль направления поляризации), а T — поперечные (перпендикулярные направлению

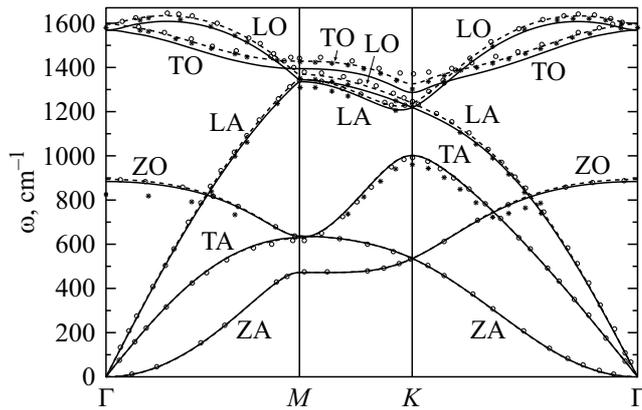


Рис. 3. Колебательные моды в графене [29].

поляризации). Две акустических моды (LA, TA) и две оптических моды (LO, TO) поляризованы в плоскости листа графена, и мы их будем называть фоновыми модами, а две моды (ZA, ZO) поляризованы в направлении перпендикулярном плоскости листа графена. Это так называемые *изгибные моды*. Они всегда являются поперечными. Принято считать, что изгибные моды имеют квадратичный закон дисперсии $\omega = \beta q^2$, как у электронов или магнонов, в отличие от обычного линейного закона дисперсии фононов $\omega = v_s q$, где v_s — скорость звука. Однако это не является распространенной точкой зрения. Необходимы дальнейшие экспериментальные и теоретические исследования. В силу симметрии, изгибные моды не взаимодействуют с модами, поляризованными в плоскости листа графена. Последние невырождены (за исключением особых точек в зоне Бриллюэна). Их скорость распространения и частота ω зависят от направления волнового вектора \mathbf{q} . Но при малых частотах в рамках теории упругости скорость звука v_s не зависит от направления и графен ведет себя как однородная, изотропная сплошная среда. На рис. 3 показан колебательный спектр графена, взятый из работы [29].

Для изучения влияния беспорядка на колебательные моды в графене мы будем использовать простую *скалярную модель*. В этой модели смещения атомов из положения равновесия являются не векторными, а скалярными величинами. Тогда у каждого атома в графене имеются не три степени свободы, а всего лишь одна, и на два атома в элементарной ячейке приходится всего две колебательных степени свободы — акустическая и оптическая. При этом число связей на эти две степени свободы в приближении ближайших соседей равняется трем, что больше числа степеней свободы. Следовательно, согласно критерию Максвелла [30], такая скалярная модель является устойчивой. На такой упрощенной, и, как мы покажем, точно решаемой модели для изгибных и фоновых мод, мы и будем изучать влияние беспорядка на колебательные моды в графене.

Скалярная модель кристаллов с беспорядком в распределении силовых констант (force constant disorder) изучалась нами и ранее в трехмерных [31,32] и двумерных [33] кристаллических решетках со случайными связями (пружинками). Полученные результаты, как мы проверяли, качественно не меняются при переходе к векторной модели [34]. Таким образом, можно утверждать, что скалярная модель, будучи намного проще, качественно правильно описывает ситуацию. Именно в этом неточном, качественном значении она и будет нами использована для изучения аморфного графена. Следует отметить, что скалярная модель вообще достаточно часто используется в физике колебаний для исследования бозонного пика в стеклах, чтобы без затрат на большие компьютерные ресурсы прийти к выводам, которые сохраняются и в векторной модели [22,35,36].

3. Закон дисперсии фононов поляризованных в плоскости листа графена

Если не делать различие между L и T планарными фононами, то можно найти аналитически (а скалярная модель это позволяет) закон дисперсии фононов, поляризованных в плоскости листа графена. Для этого, как можно показать, достаточно учесть взаимодействие атомов в рамках первой конфигурационной окружности, учитывая только три положительных пружинки. В скалярной модели величина смещения атома из положения равновесия не зависит от его направления. Однако все остальные величины сохраняют свой векторный характер. Это, например, волновой вектор \mathbf{q} и вектора трансляций \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 .

Запишем уравнение колебаний атомов графена в гармоническом приближении для каждого сорта атомов (в каждой из подрешеток). Скалярное смещение атомов разного сорта подрешеток из положения равновесия обозначим через U_{nk} и V_{nk} , где индексы n, k нумеруют положение атомов на плоской гексагональной решетке по горизонтали и по вертикали. Учитывая, что каждый атом графена окружен тремя ближайшими соседями атомов другого сорта, уравнения движения в скалярной модели (в приближении лишь ближайших соседей) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{U}_{nk} &= E_0(V_{nk} + V_{n-1k} + V_{nk-1} - 3U_{nk}), \\ m\ddot{V}_{nk} &= E_0(U_{nk} + U_{n+1k} + U_{nk+1} - 3V_{nk}), \end{aligned} \quad (2)$$

где m — масса частицы (все массы частиц одинаковые), E_0 — жесткость скалярной связи-пружинки между ближайшими соседними частицами. Найдем решение этих уравнений в виде плоской волны с частотой ω и волновым вектором \mathbf{q} :

$$U_{nk}^{\mathbf{q}} = U^0 e^{i\mathbf{q}(n\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2) - i\omega t}, \quad (3)$$

$$V_{nk}^{\mathbf{q}} = V^0 e^{i\mathbf{q}(n\mathbf{a}_1 + k\mathbf{a}_2) - i\omega t}, \quad (4)$$

где U^0, V^0 — некоторые амплитуды смещений. Тогда

$$U_{n+1k} = U_{nk}e^{iqa_1}, \quad U_{nk+1} = U_{nk}e^{iqa_2}, \quad (5)$$

$$V_{n-1k} = V_{nk}e^{-iqa_1}, \quad V_{nk11} = V_{nk}e^{-iqa_2}. \quad (6)$$

С учетом этого, уравнения колебаний принимают следующий вид:

$$-\omega^2 U_{nk} = \Omega^2 (V_{nk} + V_{nk}e^{-iqa_1} + V_{nk}e^{-iea_2} - 3U_{nk}), \quad (7)$$

$$-\omega^2 V_{nk} = \Omega^2 (U_{nk} + U_{nk}e^{iqa_1} + U_{nk}e^{iea_2} - 3V_{nk}), \quad (8)$$

где $\Omega = \sqrt{E_0/m}$ — характерная частота колебаний одной пружинки.

Полученные уравнения имеют нетривиальное решение, когда определитель системы равен нулю. Поэтому определяющее уравнение имеет вид

$$\Omega^4 |1 + e^{iqa_1} + e^{iqa_2}|^2 - (\omega^2 - e\Omega^2)^2 = 0. \quad (9)$$

При извлечении квадратного корня появляются два решения. Решение со знаком $(-)$ соответствует акустическим колебаниям ω_a , решение со знаком $(+)$ соответствует оптическим колебаниям ω_o . С учетом формулы Эйлера $2 \cos(x) = e^{ix} + e^{-ix}$, получим окончательное выражение для закона дисперсии фононов, поляризованных в плоскости листа графена в скалярной модели в приближении трех ближайших соседей и пренебрегая всеми остальными вкладами других атомов

$$\omega(\mathbf{q}) = \Omega \sqrt{(3 \pm \sqrt{3 + 2f(\mathbf{q})})}, \quad (10)$$

где функция $f(\mathbf{q})$ определяется выражением

$$f(\mathbf{q}) = \cos(\mathbf{a}_1\mathbf{q}) + \cos(\mathbf{a}_2\mathbf{q}) + \cos((\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)\mathbf{q}). \quad (11)$$

Заметим, что полученные выражения совпадают с законом дисперсии электронов и дырок в графене [37,38]). Далее для удобства будем считать в относительных единицах $\Omega = 1$.

Закон дисперсии фононов (10) для кристаллического графена определяет его так называемые особые точки. Более подробно они будут описаны в следующем разделе.

4. Сингулярности ван-Хова и точки Дирака

Плотность колебательных состояний $g(\omega)$ двумерных систем связана с законом дисперсии $\omega(\mathbf{q})$ следующим образом:

$$g(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega(\mathbf{q})) dq_x dq_y. \quad (12)$$

Используя полученный в предыдущей главе закон дисперсии (10) для мод, поляризованных в плоскости листа

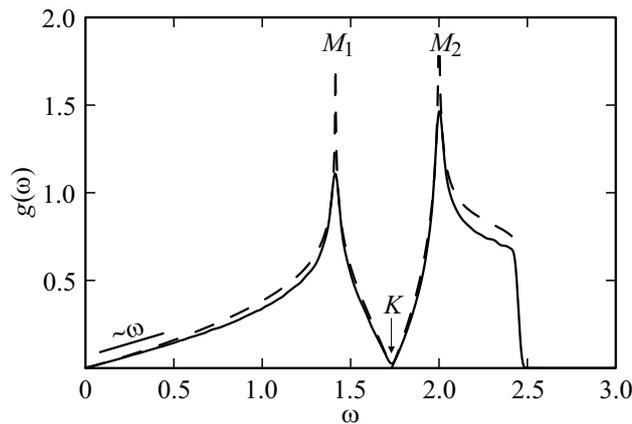


Рис. 4. Плотность колебательных состояний $g(\omega)$ -мод, поляризованных в плоскости кристаллического графена, в скалярной модели. Сплошной линией показан результат численного расчета собственных значений динамической матрицы \hat{C}_p для системы $N = 1000^2$ атомов. Штриховой линией отмечено точное аналитическое решение (13).

графена, можно получить их плотность колебательных состояний в явном аналитическом виде [39]:

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega\sqrt{3-\omega^2}}{\pi^2} K\left(\frac{\omega}{4}\sqrt{\frac{4-\omega^2}{3-\omega^2}}\right), & 0 \leq \omega \leq \sqrt{2} \\ \frac{4(3-\omega^2)}{\pi^2\sqrt{(4-\omega^2)^3}} K\left(\frac{4}{\omega}\sqrt{\frac{3-\omega^2}{(4-\omega^2)^3}}\right), & \sqrt{2} \leq \omega \leq \sqrt{3} \\ \frac{4\omega(\omega^2-3)}{\pi^2\sqrt{(6-\omega^2)(\omega^2-2)^3}} K\left(4\sqrt{\frac{\omega^2-3}{(6-\omega^2)(\omega^2-2)^3}}\right), & \sqrt{3} \leq \omega \leq 2 \\ \frac{\omega\sqrt{\omega^2-3}}{\pi^2} K\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(6-\omega^2)(\omega^2-2)^3}{\omega^2-3}}\right), & 2 \leq \omega \leq \sqrt{6} \end{cases} \quad (13)$$

где функция $K(p) = \int_0^1 [(1-x^2)(1-p^2x^2)]^{-1/2} dx$ — эллиптический интеграл первого рода. На рис. 4 плотность состояний (13) представлена пунктирной линией.

Другим подходом для нахождения колебательной плотности состояний является вычисление всех собственных чисел динамической матрицы \hat{M} , которая соответствует матрице силовых констант [40] и описывает колебания атомов. Вид динамической матрицы \hat{M} зависит от типа колебаний. В частности, он оказывается разным для фононных и изгибных мод. Уравнение движения в гармоническом приближении в скалярной модели может быть записано в следующем виде:

$$\omega_i^2 u_i = \sum_j M_{ij} u_j, \quad (14)$$

где u_i скалярное смещение атома с номером i . Из такого представления следует, что собственные значе-

ния динамической матрицы λ_i соответствуют квадратам собственных колебательных частот системы ω_i^2 .

Для кристаллического графена скалярная динамическая матрица планарных мод \hat{C}_p была построена с учетом только ближайшего взаимодействия атомов с атомами первой координационной окружности по следующему принципу. Если атомы с индексами i и j ближайшии соседи, то соответствующий матричный элемент $C_{p_{ij}}$ равен -1 , что соответствует единичным упругим связям (скалярным пружинкам) между ближайшими соседними узлами. Если пара атомов i и j не является ближайшими соседями, то матричный элемент $C_{p_{ij}}$ равен 0 . Диагональные элементы матрицы \hat{C}_p равны взятой со знаком минус сумме недиагональных элементов соответствующего столбца. Это приводит к равенству $\sum_i C_{p_{ij}} = 0$, что обеспечивает важное условие трансляционной инвариантности системы. В таком построении динамическая матрица C_p оказывается устойчивой.

На рис. 4 сплошной линией изображена плотность фононных состояний, полученная путем численной диагонализации скалярной динамической матрицы кристаллического графена для планарных мод (в приближении трех пружинки) \hat{C}_p . Общее число атомов в системе $N = 1000^2$, распределение собственных чисел матрицы \hat{C}_p было получено с помощью КР-метода [41,42]. Можно уточнить расчет, приняв во внимание следующие координационные окружности решетки графена, однако это не дает новых качественных результатов.

При низких частотах $qa \ll 1$ плотность состояний $g(\omega) \propto \omega$ (рис. 4). Это означает, что низкочастотная плотность состояний обусловлена акустическими фононами с линейным законом дисперсии $\omega = vq$, где v — скорость звука в скалярной модели. Данный закон дисперсии фононов справедлив в пространстве любой размерности и при использовании любого числа координационных окружностей (при условии, что они будут давать вклад одного знака). И действительно, как мы уже отмечали, у графена есть в колебательном спектре две таких акустических моды (ТА и LA), поперечная и продольная, описывающие колебания атомов в плоскости листа графена [29]. Эти скалярные (в нашем случае) фононы с линейным законом дисперсии и описывает наша скалярная модель.

При частотах $\omega_{M_1} = \sqrt{2}$ и $\omega_{M_2} = 2$ в плотности состояний появляются пики логарифмической расходимости (рис. 4). Это так называемые *сингулярности ван-Хова*, соответствующие обращению в ноль производной $d\omega/dq$. Они отвечают двум (на самом деле двенадцати) седловым точкам M функций $\omega_{a,o}(\mathbf{q})$ на границе зоны Бриллюэна (в середине каждой шестиугольной стороны). Частоте ω_{M_1} соответствует логарифмическая сингулярность ван-Хова от акустической ветви, частоте ω_{M_2} — от оптической ветви. Существование этих функций неявно означает, что в отсутствие беспорядка волновой вектор фонона \mathbf{q} является хорошим квантовым числом, и представление о фононах как квазичастицах

имеет физический смысл. Резкий обрыв до нуля плотности состояний в конце спектра на частоте $\omega_{\max} = \sqrt{6}$ это третья сингулярность ван-Хова, связанная с максимумом функции $\omega_o(\mathbf{q})$ оптических колебаний при $\mathbf{q} = 0$.

Также на рис. 4 видно, что при некоторой частоте $\omega = \omega_K$ плотность состояний $g(\omega)$ обращается в ноль. Это так называемая *точка Дирака*. Как известно, зона Бриллюэна кристаллического графена имеет форму правильного шестиугольника. Поскольку массы атомов в обеих подрешетках одинаковы, то в шести точках Дирака К [37] (вершинах этого шестиугольника), на границе зоны Бриллюэна, плотность состояний $g(\omega)$ имеет V-образную форму и линейно по частоте ω обращается в ноль. Это означает, что закон дисперсии фононов в окрестности этих точек, как и в начале координат, тоже линейный и имеет вид $\omega = \omega_K \pm v_K |\mathbf{q} - \mathbf{q}_K|$, где v_K — скорость этих фононов. Изочастотные поверхности в точках Дирака К имеют форму конуса (конус Дирака). Конус оптических фононов направлен вниз, а акустических вверх, так что конусы (их всего 6) имеют общую вершину.

5. Изгибные моды

Чтобы найти закон дисперсии изгибных мод, необходимо правильно написать их волновое уравнение, и, как следствие, динамическую матрицу изгибных мод. В макроскопической теории упругости изгибных мод тонких пластинок показывается, что волновое уравнение содержит квадрат оператора Лапласа Δ^2 [28], который играет роль динамической матрицы в низкочастотной области спектра. Поскольку дискретному лапласиану Δ на решетке графена соответствует динамическая матрица планарных мод \hat{C}_p , то можно предполагать, что динамической матрицей изгибных мод является $\hat{C}_f = \hat{C}_p^2$. Это предположение между тем нуждается в проверке. И мы покажем ниже, что оно действительно при определенных условиях имеет место.

В такой матрице изгибных мод \hat{C}_f , построенной на матрице трех ближайших связей \hat{C}_p , пружинки (связи) размещены не только между ближайшими соседями, но и между соседями соседей. Другими словами, вокруг каждого атома имеется не три единичных пружинки, а девять. Легко проверить, возводя известную матрицу \hat{C}_p в квадрат, что знак дополнительных 6 пружинки оказывается не положительным, а отрицательным. Их величина в 6 раз меньше величины трех положительных пружинки. Отрицательные пружинки говорят о близкой неустойчивости в системе, которая возникает в случае, если отрицательные пружинки по модулю превысят одну шестую положительных пружинки (см. Приложение). Об этом же говорят численные результаты по расчету модуля Юнга матрицы \hat{C}_f . Модуль Юнга в термодинамическом пределе оказывается равным нулю.

Такой подход приводит к закону дисперсии изгибных мод в графене в виде

$$\omega(\mathbf{q} = \tilde{\Omega})(3 \pm \sqrt{3 + 2f(\mathbf{q})}), \quad (15)$$

где функция $f(\mathbf{q})$ по-прежнему определяется выражением (11). Согласно макроскопической теории упругости, низкочастотные изгибные моды тонких пластинок и стержней имеют закон дисперсии $\omega \propto q^2$ [28]. Действительно, из полученного закона дисперсии изгибных мод (15) следует, что при малых $qa \ll 1$ частота акустической и оптической ветвей $\omega_{a,o} \propto q^2$. При этом закон дисперсии (15) по-прежнему определяет особые точки графена М и К, а результаты его расчета для изгибных мод имеют хорошее согласие с данными работы [34]. Согласие двух кривых настолько хорошее, что ставит вопрос о физической причине этого совпадения (рис. 5). Одно из предположений заключается в том, что формула (15) действительно является точной и операция возведения матрицы \hat{C}_p в квадрат имеет большие основания, чем кажется на первый взгляд (см. Приложение).

Используя закон дисперсии (15) для изгибных мод листа графена, можно получить их плотность состояний в явном аналитическом виде [39]:

$$g(\omega) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3-\omega}}{2\pi^2} K\left(\frac{1}{4}\sqrt{\omega\frac{4-\omega^3}{3-\omega}}\right), & 0 \leq \omega \leq 2; \\ \frac{2(3-\omega)}{\pi^2\sqrt{\omega(4-\omega)^3}} K\left(4\sqrt{\frac{3-\omega}{\omega(4-\omega)^3}}\right), & 2 \leq \omega \leq 3. \end{cases} \quad (16)$$

На рис. 6 формула (16) представлена пунктирной линией.

Так же на рис. 6 изображена плотность состояний изгибных колебаний, полученная путем численной диагонализации динамической матрицы \hat{C}_f . Общее число атомов в системе $N = 1000^2$, распределение собственных чисел матрицы \hat{C}_f было получено с помощью КР метода [41,42].

При низких частотах $g(\omega) \propto \text{const}$, что согласуется с законом дисперсии изгибных мод $\omega \propto \mathbf{q}^2$. Также из рис. 6 видно, что все особые точки сохраняют свои свойства. Это позволяет говорить о том, что представленная динамическая матрица \hat{C}_f качественно правильно описывает низкочастотные изгибные моды кристаллического графена.

Таким образом, скалярная модель дает результаты, согласующиеся с результатами других более сложных моделей [29,34], и качественно правильно описывает основные структурные особенности графена. Возникает правомерный вопрос — как плотность состояний $g(\omega)$ будет выглядеть в аморфном графене, то есть при наличии беспорядка? Естественно предположить, что две логарифмические сингулярности ван-Хова должны с ростом беспорядка уширяться по частоте, слиться друг с другом и плавно перейти в один бозонный пик. Однако из-за наличия в кристалле графена двух типов фононов, акустических и оптических, не ясно, с какими фононами

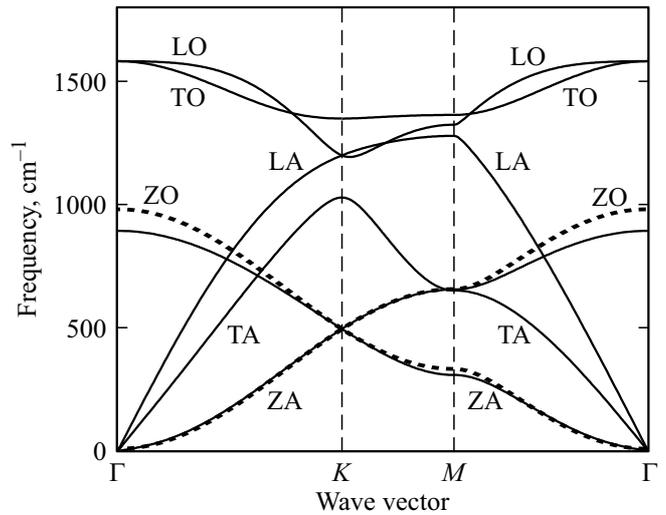


Рис. 5. Сравнение закона дисперсии фононных мод в графене из работы [34] с результатом (15) для Z- и ZA-фононов, обозначенным пунктирной линией.

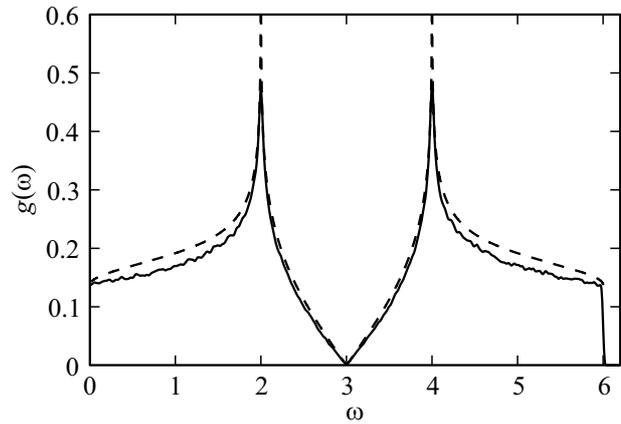


Рис. 6. Плотность колебательных состояний $g(\omega)$ изгибных мод кристаллического графена в скалярной модели. Сплошной линией показан результат численного расчета собственных значений динамической матрицы \hat{C}_f для системы $N = 1000^2$ атомов. Штриховой линией отмечено точное аналитическое решение (16).

будет связан бозонный пик. В следующих разделах мы попытаемся ответить на эти вопросы.

6. Модель устойчивых случайных матриц

Вблизи положения устойчивого равновесия энергия взаимодействия атомов U представима в виде суммы квадратичных по смещениям u_i форм [32]:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^N A_{ik} u_i \right)^2. \quad (17)$$

В скалярной модели смещения u_i являются скалярными величинами, поэтому число степеней свободы системы

равно числу атомов N . Индекс $k = 1, 2, \dots, K$ нумерует „связи“ атомов в системе, энергия которых имеет вид положительно определенной квадратичной формы с коэффициентами A_{ik} . Матрица \hat{A} является в общем случае прямоугольной матрицей размером $N \times K$. При этом для устойчивости всей системы необходимо, чтобы число ее связей K было не меньше числа ее степеней свободы N [30], поэтому $K \geq N$.

Динамическая матрица \hat{M} в случае одинаковых единичных масс $m_i = 1$ связана с энергией взаимодействия U следующим образом:

$$M_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j}. \quad (18)$$

Из формул (17) и (18) следует, что в матричной записи динамическая матрица \hat{M} имеет вид

$$\hat{M} = \hat{A}\hat{A}^T. \quad (19)$$

Из представления (19) следует, что матрица \hat{M} является квадратной, симметричной матрицей $N \times N$, поэтому все ее собственные числа λ_i вещественны. Кроме этого, все λ_i неотрицательны, поскольку равны квадратам сингулярных чисел матрицы \hat{A} . Такое условие на собственные числа \hat{M} обеспечивает важное требование механической устойчивости системы, так как λ_i должны соответствовать квадратам собственных колебательных частот ω_i^2 .

Вследствие локального беспорядка аморфной системы можно предполагать, что матрица \hat{A} должна носить некоторый неупорядоченный характер. Поэтому рассмотрим матрицу \hat{A} как случайную квадратную матрицу, построенную на двумерной решетке графена с учетом только ближайшего взаимодействия по следующему принципу. Если атомы с индексами i и j ближайшие соседи, то соответствующий матричный элемент A_{ij} есть случайное число, распределенное по Гауссу с единичной дисперсией $V^2 = 1$ и средним значением равным нулю. Если атомы i и j не являются ближайшими соседями, то матричный элемент $A_{ij} = 0$. Диагональные элементы матрицы \hat{A} равны взятой со знаком минус сумме недиагональных элементов соответствующего столбца матрицы \hat{A} . Это приводит к равенству $A_{ij} = 0$, что обеспечивает важное условие трансляционной инвариантности системы.

Оказывается, что построенная таким образом случайная динамическая матрица $\hat{M} = \hat{A}\hat{A}^T$ приводит к нулевой макроскопической жесткости всей системы [31,33,43]. Это связано с тем, что число степеней свободы N (число строк матрицы \hat{A}) равно числу связей K (числу столбцов матрицы \hat{A}), так как по описанному выше построению матрица \hat{A} является квадратной [30]. В такой предельно мягкой системе акустические фононы не распространяются, так как скорость звука в ней равна нулю.

Добавление новых связей делает модуль Юнга системы E отличным от нуля, и в такой системе могут распространяться фононы. Число связей можно увеличить, например, следующими способами.

Первый способ. Добавим к случайной квадратной матрице $\hat{A}\hat{A}^T$, обладающей нулевой жесткостью и отвечающей за беспорядок в системе, регулярную матрицу $\mu\hat{C}_p$ планарных мод, отвечающую за порядок

$$\hat{M} = \hat{A}\hat{A}^T + \mu\hat{C}_p. \quad (20)$$

Физический смысл такого суммирования заключается в том, что недиагональные элементы матрицы \hat{C}_p и матрицы $\hat{A}\hat{A}^T$ представляют собой коэффициенты упругости k_{ij} параллельно соединенных упругих пружинок (взяты со знаком минус). А при параллельном соединении пружинок, как известно, их коэффициенты жесткости складываются.

Параметр системы μ , характеризующий жесткость отдельной пружинки, отвечает за степень порядка в системе и меняется в интервале $0 \leq \mu < \infty$. Случай $\mu \gg 1$ соответствует системе с небольшими относительными флуктуациями связей, т.е. слабому беспорядку. В этом случае второе слагаемое в формуле (20) значительно больше первого, и модуль Юнга системы E зависит от параметра μ как $E \propto \mu$. Однако наибольший интерес представляет противоположный предельный случай $\mu \ll 1$, который соответствует аморфному телу с большими флуктуациями, т.е. сильному беспорядку. В этом случае модуль Юнга системы E зависит от параметра μ как $E \propto \sqrt{\mu}$ [31–33].

Второй способ. Для планарных мод. Рассмотрим две случайные матрицы \hat{A}_1 и \hat{A}_2 размером $N \times N$, построенные по такому же принципу, что и случайная квадратная матрица \hat{A} . Будем добавлять случайным образом в \hat{A}_1 некоторую долю столбцов \hat{A}_2 . Полученная таким образом новая прямоугольная матрица \hat{B} описывает систему, у которой число связей (число столбцов K), больше числа степеней свободы (числа строк N). Это означает, что система $\hat{B}\hat{B}^T$ обладает отличной от нуля жесткостью. Параметр κ характеризует относительную долю добавленных столбцов как $\kappa = K/N - 1$. Таким способом можно получить значения κ в диапазоне $0 \leq \kappa \leq 1$. При $\kappa \ll 1$ модуль Юнга $E \propto \kappa$.

Для получения больших значений κ необходимо повторить описанную выше процедуру добавления столбцов, взяв в качестве „стэковых“ матриц полученную прямоугольную матрицу \hat{B} и другую реализацию матрицы \hat{A} . Полученная таким способом динамическая матрица \hat{M} при $n \rightarrow \infty$ стремится к кристаллической матрице $\sqrt{\kappa}\hat{C}_p$. При $\kappa \gg 1$ (т.е. при слабом беспорядке) модуль Юнга увеличивается с ростом κ по закону $E \propto \sqrt{\kappa}$ [33,44].

7. Бозонный пик

Увеличение числа связей приводит к тому, что в системе появляются упругие колебания — фононы. На рис. 7 показан результат численного расчета плотности колебательных состояний $g(\omega)$ для двух способов увеличения числа связей при различных параметрах систе-

мы μ и κ . Как видно, две совершенно разных модели случайных матриц обладают схожими колебательными свойствами.

В низкочастотной области плотности состояний наблюдается дебаевский (фононный) вклад $g(\omega) \propto \omega$. При достаточно слабом беспорядке в системе $\mu, \kappa \gg 1$ наблюдаются два высокочастотных пика, обусловленных сингулярностями ван-Хова в спектре кристаллического графена, показанных на рис. 4. Однако, как видно из рис. 7, по мере увеличения беспорядка в системе эти пики размываются, растут по величине и сдвигаются влево, в область более низких частот. При этом правый пик, обусловленный оптическими фононами, быстро уменьшается по амплитуде и сливается с пиком слева, обусловленным акустическими фононами. При частотах $\omega \simeq \sqrt{\mu}$ (или $\omega \simeq \kappa$) наблюдается только один низкочастотный пик в приведенной плотности состояний $g(\omega)/\omega$ бозонный пик.

Для расчета плотности состояний изгибных колебаний в аморфном графене будем использовать ансамбль матриц, аналогичный форме (20), с динамической матрицей кристалла \hat{C}_f :

$$\hat{M} = \hat{A}\hat{A}^T + \mu\hat{C}_f. \quad (21)$$

Результат численных расчетов показан на рис. 8.

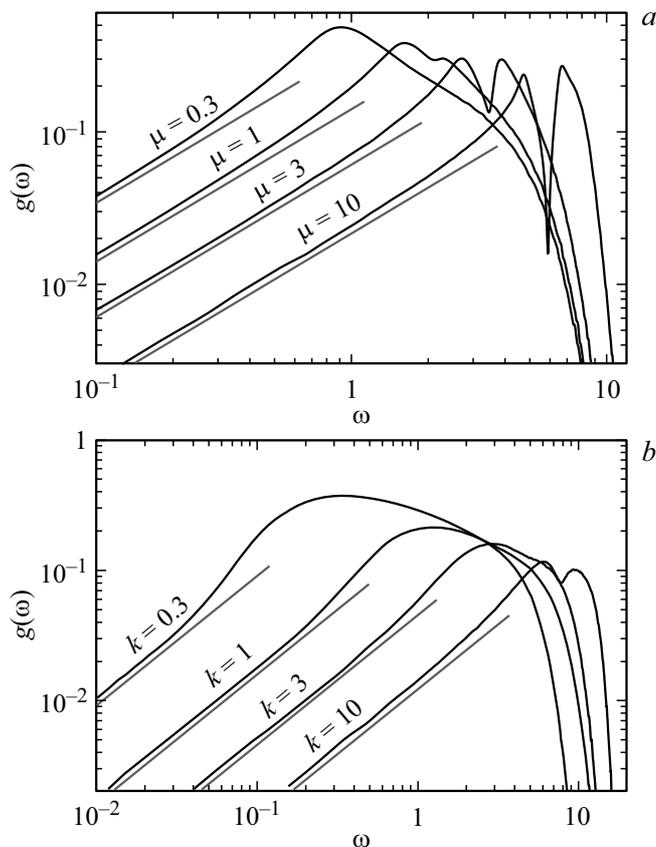


Рис. 7. Плотность колебательных состояний скалярной модели аморфного графена для разных параметров системы μ (a) и κ (b). Прямыми линиями отмечен дебаевский фононный вклад $g(\omega) \propto \omega$.

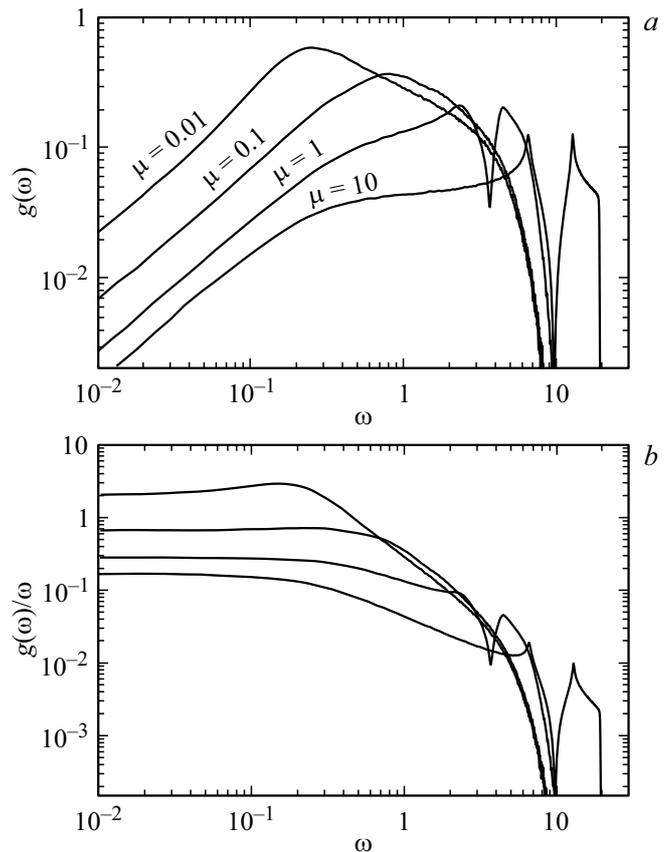


Рис. 8. a — плотность колебательных состояний $g(\omega)$ динамической матрицы $\hat{M} = \hat{A}\hat{A}^T + \mu\hat{C}_f$ для различных параметров системы μ ; b — приведенная плотность колебательных состояний $g(\omega)/\omega$.

Видно, что низкочастотная область плотности состояний имеет зависимость $g(\omega) \propto \omega$. Это означает, что при добавлении даже малого беспорядка в системе появляются фононы с законом дисперсии $\omega \propto q$. Их появление связано с тем, что в выражении (21) каждое из слагаемых описывает систему с нулевой макроскопической жесткостью, находящуюся по критерию Максвелла на пороге устойчивости $N = K$. Суммирование приводит к увеличению числа связей K в 2 раза, а число степеней свободы N оставляет прежним. В результате, модуль Юнга системы не равен нулю, и при малых частотах вместо изгибных мод в системе распространяются фононы.

При достаточно слабом беспорядке в системе $\mu \gg 1$ наблюдаются два высокочастотных пика, обусловленных сингулярностями ван-Хова для оптических и акустических фононов. Затем отчетливо наблюдается небольшое плато, связанное с законом дисперсии изгибных мод $\omega \propto q^2$. Однако по мере увеличения беспорядка $\mu \ll 1$ пики сингулярностей ван-Хова пропадают, и возникает бозонный пик. При этом наблюдается переходное состояние системы, в котором и пики сингулярностей ван-Хова, и бозонный пик отсутствуют (на рис. 8 этому случаю соответствует значение параметра $\mu = 0.1$).

8. Заключение

Используя модель устойчивых случайных матриц, обладающих трансляционной симметрией, мы показали, что в аморфном графене, при достаточно сильном беспорядке в распределении силовых констант может наблюдаться только один бозонный пик в приведенной плотности состояний $g(\omega)/\omega$. Напротив, при относительно слабом беспорядке мы имеем два пика в плотности состояний, соответствующих сингулярностям ван-Хова для акустических и оптических фононов кристаллического графена. Эти два пика говорят о том, что волновой вектор \mathbf{q} в этой области частот является хорошим квантовым числом. С ростом беспорядка пики смещаются влево, в область малых частот, и постепенно сливаются в один бозонный пик, который далее смещается в область все более низких частот по мере роста беспорядка в системе. Причем первыми за счет беспорядка разрушаются оптические фононы, а уже потом акустические. Как и в случае решеток с одним атомом в элементарной ячейке, при наличии только одного пика, бозонного, фононы как квазичастицы существуют только при частотах ниже частоты бозонного пика. Справа от бозонного пика собственным модам можно приписывать частоту ω , но не волновой вектор \mathbf{q} . Однако эти аспекты мы собираемся рассмотреть в отдельной работе.

Также в работе отдельно были рассмотрены изгибные моды графена, для которых плотность состояний при увеличении беспорядка из пиков сингулярностей ван-Хова переходит в бозонный пик. Однако существует диапазон значений параметра μ , при которых пики сингулярностей ван-Хова уже исчезли, а бозонный пик еще не возник. При этом изгибные моды с плотностью состояний $g(\omega) \propto \text{const}$ уступают обычным фононам. В связи с этим, можно предполагать, что формирование бозонного пика скорее связано не с сингулярностями ван-Хова, а с наличием в системе низкочастотных фононов с дебаевской плотностью состояний $g(\omega) \propto \omega$.

Кроме этого, мы показали, что изгибные моды разрушаются даже при относительно слабом беспорядке в системе, и в аморфном графене доминирующую часть низкочастотного спектра занимают фононы. Это, в свою очередь, означает, что наблюдать изгибные моды на малых частотах трудно или даже невозможно. Это важный результат нашей теории изгибных мод.

Приложение

Рассмотрим по-отдельности связанные колебания „темных“ и „светлых“ атомов решетки графена, изображенных на рис. 2, с амплитудами $V_{n,m}$ и $U_{n,m}$ соответственно. Индексы n и m нумеруют положение атома вдоль направлений векторов трансляций \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 . Пусть χ_1 и χ_2 упругие константы взаимодействия атома с соседями из первой и второй координационных окружностей, насчитывающих три и шесть атомов соответственно.

Считая массы атомов одинаковыми, запишем их уравнения движения

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 U_{n,m}}{dt^2} &= \chi_1 (V_{n,m} + V_{n-1,m} + V_{n,m-1} - 3U_{n,m}) \\
 &+ \chi_2 (U_{n+1,m} + U_{n-1,m} + U_{n,m+1} \\
 &+ U_{n,m-1} + U_{n-1,m+1} + U_{n+1,m-1} - 6U_{n,m}), \\
 m \frac{d^2 V_{n,m}}{dt^2} &= \chi_1 (U_{n,m} + U_{n+1,m} + U_{n,m+1} - 3V_{n,m}) \\
 &+ \chi_2 (V_{n+1,m} + V_{n-1,m} + V_{n,m+1} \\
 &+ V_{n,m-1} + V_{n-1,m+1} + V_{n+1,m-1} - 6V_{n,m}), \quad (22)
 \end{aligned}$$

Будем искать решение уравнений (22) в виде плоских бегущих волн возмущения с частотой ω и волновым вектором \mathbf{q} :

$$\begin{aligned}
 U_{n,m} &= U^0 e^{i\mathbf{q}(n\mathbf{a}_1+m\mathbf{a}_2)-i\omega t}, \\
 V_{n,m} &= V^0 e^{i\mathbf{q}(n\mathbf{a}_1+m\mathbf{a}_2)-i\omega t}. \quad (23)
 \end{aligned}$$

После подстановки (23) в уравнения движения (22), получим

$$\begin{aligned}
 -m\omega^2 U_{n,m} &= \chi_1 (V_{n,m} A(-\mathbf{q}) - 3U_{n,m}) \\
 &+ 2\chi_2 U_{n,m} (f(\mathbf{q}) - 3), \\
 -m\omega^2 V_{n,m} &= \chi_1 (U_{n,m} A^*(-\mathbf{q}) - 3V_{n,m}) \\
 &+ 2\chi_2 V_{n,m} (f(\mathbf{q}) - 3), \quad (24)
 \end{aligned}$$

где для удобства введены функции

$$A(\mathbf{q}) = (1 + e^{i\mathbf{a}_1\mathbf{q}} + e^{i\mathbf{a}_2\mathbf{q}}), \quad (25)$$

$$f(\mathbf{q}) = \cos(\mathbf{a}_1\mathbf{q}) + \cos(\mathbf{a}_2\mathbf{q}) \cos((\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)\mathbf{q}) \quad (26)$$

Введя обозначения $\Omega_1^2 = \chi_1/m$ и $\Omega_2^2 = \chi_2/m$ и условно допуская, что значение Ω_2^2 может быть отрицательным, перепишем систему уравнений (24) в виде

$$\begin{aligned}
 U_{n,m} (\omega^2 - 3\Omega_1^2 - 2\Omega_2^2(3 - f(\mathbf{q})) + V_{n,m}\Omega_1^2 A(\mathbf{q})) &= 0, \\
 V_{n,m} (\omega^2 - 3\Omega_1^2 - 2\Omega_2^2(3 - f(\mathbf{q})) + U_{n,m}\Omega_1^2 A^*(\mathbf{q})) &= 0. \quad (27)
 \end{aligned}$$

Уравнения (27) имеют нетривиальное решение при условии равенства нулю определителя

$$(\omega^2 - 3\Omega_1^2 - 2\Omega_2^2(3 - f(\mathbf{q}))^2 - \Omega_1^4 A(\mathbf{q})A^*(\mathbf{q})) = 0. \quad (28)$$

После преобразования сомножителей во втором слагаемом

$$A(\mathbf{q})A^*(\mathbf{q}) = 3 + 2f(\mathbf{q}), \quad (29)$$

мы получаем формулу для закона дисперсии изгибных мод в графене с учетом двух координационных окружностей

$$\omega^2(\mathbf{q}) = \Omega_1^2 \left(3 \pm \sqrt{3 + 2f(\mathbf{q})} \right) + 2\Omega_2^2(3 - f(\mathbf{q})). \quad (30)$$

„Критическое“ соотношение значений упругих констант κ_1 и κ_2 может быть получено из условия стремления к нулю частоты (30) в пределе малых значений $aq \ll 1$ для акустической ветви. Частоты оптической ветви всегда отличны от нуля, поэтому для них это условие роли не играет. В первом приближении функция $f(\mathbf{q})$ равна.

$$f(\mathbf{q}) \approx 3 - \frac{9}{4} a^2 q^2 + \frac{27}{64} a^4 q^4. \quad (31)$$

В этом случае частота акустической ветви определяется соотношением

$$\omega(\mathbf{q}) \approx \frac{3}{4} (\Omega_1^2 + 6\Omega_2^2) a^2 q^2 - \frac{3}{64} (\Omega_1^2 + 18\Omega_2^2) a^4 q^4. \quad (32)$$

При соотношении упругих констант $\kappa_2 = -\kappa_1/6$, $\kappa_2 < 0$, квадратичный по q член в (32) пропадает, что дает закон дисперсии изгибных мод

$$\omega(\mathbf{q}) \approx \frac{3}{4} (\Omega_1^2 + 6\Omega_2^2) a^2 q^2 - \frac{3}{64} (\Omega_1^2 + 18\Omega_2^2) a^4 q^4. \quad (32)$$

Физически это понять легко. При критическом значении коэффициентов упругости $\kappa_2 = -\kappa_1/6$ модуль Юнга графеновой пленки на изгиб равен нулю. Изгибные фононы не могут распространяться в такой мягкой среде, где их модуль упругости и скорость звука равны нулю. Их сменяют изгибные волны с иным, более сложным законом дисперсии. Вблизи критического состояния феноменологически это можно записать в виде

$$\omega^2(\mathbf{q}) = \alpha q^2 + \beta q^4. \quad (34)$$

где $\alpha \propto \kappa_2 + \kappa_1/6$, а $\beta \sim 1$. В точке изгибного перехода $\alpha = 0$. Отсюда следует, что при низких частотах $\omega < \sqrt{\alpha}$ эти колебания являются фононами с линейным законом дисперсии, и скорость звука $v \propto \sqrt{\alpha}$ обращается в ноль в критической точке. При более высоких частотах это изгибные волны с квадратичным законом дисперсии. Стоит отметить, что исчезновение квадратичного по q члена в законе дисперсии (32) возможно только при рассмотрении более дальних отрицательных связей.

В случае учета взаимодействия только с соседями из первой координационной окружности (что эквивалентно условию $\kappa_2 = 0$), уравнение (30) сводится к соотношению

$$\omega_1^2(\mathbf{q}) = \Omega_1^2 \left(3 \pm \sqrt{3 + 2f(\mathbf{q})} \right). \quad (35)$$

Покажем, закон дисперсии изгибных $\omega_f(\mathbf{q})$ мод соответствует $\omega^2(\mathbf{q})$. Для этого преобразуем уравнение (30) с учетом „критического“ соотношения упругих констант $\kappa_2 = -\kappa_1/6$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_f^2(\mathbf{q}) &= \Omega_1^2 \left(2 \pm \sqrt{3 + 2f(\mathbf{q})} + \frac{f(\mathbf{q})}{3} \right) \\ &= \frac{\Omega_1^2}{6} \left(3 \pm \sqrt{3 + 2f(\mathbf{q})} \right)^2 = \frac{1}{6\Omega_1^2} \omega_1^4(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (36)$$

Другими словами, закон дисперсии изгибных мод (36) может быть определен как квадрат закона дисперсии фононов (35) при учете первой координационной окружности. В свою очередь, это обосновывает наш выбор динамической матрицы изгибных мод \hat{C}_f , определенной как квадрат динамической матрицы планарных колебаний \hat{C}_p .

Таким образом, включение взаимодействия с атомами из второй координационной окружности коренным образом меняет закон дисперсии колебательных мод графена и в случае „критического“ соотношения упругих констант приводит к смене линейного закона дисперсии, следующего из взаимодействия с атомами первой координационной окружности, квадратичной зависимостью. Ответить на вопрос, какой же в действительности закон дисперсии у изгибных мод в графене, мы не можем. Он зависит от соотношения упругих констант κ_1 и κ_2 , которые должны быть определены либо из эксперимента, либо из более глубокой теории. Так, если отталкиваться от эксперимента, то экспериментальные точки на рис. 3 говорят, что мы находимся либо в критической ситуации, либо очень близко к ней. Это ясно из параболического на вид закона дисперсии (понятно, что требуется более тщательная обработка экспериментальных данных). К такому же выводу мы приходим после анализа теоретических данных, показанных на рис. 5. Там тоже отчетливо видна нелинейная зависимость $\omega(q)$ в точке Γ для изгибных мод ZA-типа. Но авторы этой работы признают, что они получили квадратичную зависимость путем обращения скорости звука в ноль. Также ведут себя изгибные моды и у нас. В критической точке модуль Юнга и скорость звука у нас тоже обращаются в ноль. Ясно, что требуется более подробное изучение этого вопроса для доказательства существования отрицательных пружинки в графене и закона дисперсии q^2 .

Благодарности

Мы искренне благодарим Я.М. Бельтюкова и В.Л. Гуревича за полезные критические замечания и Л.Е. Голуба за ссылку [34]. Мы благодарим М.М. Глазова за интересную дискуссию по изгибным модам. Мы также особо благодарны А.С. Иоселевичу за подробное обсуждение статьи.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] A. Kumar, M. Wilson, M.F. Thorpe. J. Phys. Condens. Matter **24**, 485003 (2012).
- [2] R. Ravinder, R. Kumar, M. Agarwal, N.M. Anoop Krishnan. Sci. Rep. **9**, 4517 (2019).

- [3] J. Kotakoski, A.V. Krasheninnikov, U. Kaiser, J.C. Meyer. Phys. Rev. Lett. **106**, 105505 (2011).
- [4] S. Bazrafshan, A. Rajabpour. Int. J. Heat Mass Transf. **112**, 379 (2017).
- [5] C. Lee, X. Wei, J.W. Kysar, J. Hone. Science **321**, 385 (2008).
- [6] J.S. Bunch, A.M. van der Zande, S.S. Verbridge, I.W. Frank, D.M. Tanenbaum, J.M. Parpia, H.G. Craighead, P.L. McEuen. Science **315**, 490 (2007).
- [7] A.K. Geim, K.S. Novoselov. Nature Mater **6**, 183 (2007).
- [8] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009).
- [9] V.M. Apalkov, T. Chakraborty. Phys. Rev. B **84**, 033408 (2011).
- [10] А.В. Елецкий, И.М. Искандарова, А.А. Книжник, Д.Н. Красиков. УФН **181**, 233 (2011).
- [11] A.A. Balandin, S. Ghosh, W. Bao, I. Calizo, D. Teweldebrhan, F. Miao, C.N. Lau. Nano Lett. **8**, 902 (2008).
- [12] D.V. Tuan, A. Kumar, S. Roche, F. Ortman, M.F. Thorpe, P. Ordejon. Phys. Rev. B **86**, 121408 (2012).
- [13] C. Carpenter, D. Maroudas, A. Ramasubramaniam. Appl. Phys. Lett. **103**, 013102 (2013).
- [14] A. Zandiatashbar, G.-H. Lee, S.J. An, S. Lee, N. Mathew, M. Terrones, T. Hayashi, C.R. Picu, J. Hone, N. Koratkar. Nature Commun. **5**, 3186 (2014).
- [15] G. Lypez-Polin, C. Gymeze-Navarro, V. Parente, F. Guinea, M.I. Katsnelson, F. Perez-Murano, J. Gymeze-Herrero. Nature Phys. **11**, 26 (2015).
- [16] T. Zhu, E. Ertekin. Phys. Rev. B **93**, 155414 (2016).
- [17] T. Zhu, E. Ertekin. Nano Lett. **16**, 4763 (2016).
- [18] P.B. Allen, J.L. Feldman. Phys. Rev. B **48**, 12581 (1993).
- [19] P.B. Allen, J.L. Feldman, J. Fabian, F. Wooten. Phil. Mag. B **79**, 1715 (1999).
- [20] V.L. Gurevich, D.A. Parshin, H.R. Schober. Phys. Rev. B **67**, 4203 (2003).
- [21] D.A. Parshin, H.R. Schober, V.L. Gurevich. Phys. Rev. B **76**, 064206 (2007).
- [22] W. Schirmacher, G. Diezemann, C. Ganter. Phys. Rev. Lett. **81**, 136 (1998).
- [23] M. Baggioli, A. Zacccone. Phys. Rev. Lett. **122**, 145501 (2019).
- [24] T. Nakayama. Rep. Prog. Phys. **65**, 1195 (2002).
- [25] H. Shintani, H. Tanaka. Nature Mater. **7**, 870 (2008).
- [26] S.N. Taraskin, Y.L. Loh, G. Natarajan, S.R. Elliott. Phys. Rev. Lett. **86**, 1255 (2001).
- [27] A.I. Chumakov, G. Monaco, A. Monaco, W.A. Crichton, A. Bosak, R. Ruffer, A. Meyer, F. Kargl, L. Comez, D. Fiorretto, H. Giefers, S. Roitsch, G. Wortmann, M.H. Manghnani, A. Hushur, Q. Williams, J. Balogh, K. Parlinski, P. Jochym, P. Piekarczyk. Phys. Rev. Lett. **106**, 225501 (2011).
- [28] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. Наука, М. (1987). Т. 7. 248 с.
- [29] L. Wirtz, A. Rubio. Solid State Commun. **131**, 141 (2004).
- [30] J.C. Maxwell. Phil. Mag. **27**, 294 (1865).
- [31] Y.M. Beltukov, V.I. Kozub, D.A. Parshin. Phys. Rev. B **87**, 134203 (2013).
- [32] Y.M. Beltukov, D.A. Parshin. Письма в ЖЭТФ **104**, 570 (2016).
- [33] Д.А. Конох, Я.М. Бельтюков, Д.А. Паршин. ФТТ **60**, 369 (2018).
- [34] Л.А. Фальковский. ЖЭТФ **142**, 560 (2012).
- [35] J.W. Kantelhardt, S. Russ, A. Bunde. Phys. Rev. B **63**, 064302 (2001).
- [36] T.S. Grigera, V. Martin-Mayor, G. Parisi. J. Phys.: Condens. Matter **14**, 2167 (2002).
- [37] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos, A.A. Firsov. Nature **438**, 197 (2005).
- [38] P.R. Wallace. Phys. Rev. **71**, 622 (1947).
- [39] J.P. Hobson, W.A. Nierenberg. Phys. Rev. **89**, 662 (1953)
- [40] А. Марадудин, Э. Монтролл, Дж. Вейсс. Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. Мир, М. (1965). 383 с.
- [41] Y.M. Beltukov, C. Fusco, D.A. Parshin, A. Tanguy. Phys. Rev. E **93**, 023006 (2016).
- [42] A. Weise, G. Wellein, A. Alvermann, H. Fehske. Rev. Mod. Phys. **78**, 275 (2006).
- [43] Y.M. Beltukov, D.A. Parshin. Письма в ЖЭТФ **93**, 660 (2011).
- [44] В.А. Марченко, Л.А. Пастур. Мат. сб. **72**, 114, 507 (1967).

Редактор Ю.Э. Кутяев