

Приближенные граничные условия для задачи нахождения оптических коэффициентов ультратонких металлических пленок в СВЧ и ТГц диапазонах

© П.С. Глазунов^{1,2}, В.А. Вдовин^{1¶}, В.Г. Андреев^{1,2}

¹ Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 125009 Москва, Россия

² Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, 119991 Москва, Россия

¶ e-mail: vdv@cplire.ru

Поступила в редакцию 07.04.2020 г.

В окончательной редакции 13.05.2020 г.

Принята к публикации 20.05.2020 г.

Получены приближенные граничные условия для задачи расчета оптических коэффициентов системы, состоящей из диэлектрической подложки и напыленной на нее неоднородной ультратонкой металлической пленки с произвольной зависимостью проводимости по толщине. Вывод граничных условий основан на методе последовательных приближений Пикара. Приведены аналитические выражения для оценки погрешности вычисления оптических коэффициентов, полученных при помощи предлагаемых приближенных граничных условий. Показано, что погрешность растет с частотой и увеличением толщины пленки. Максимальная погрешность для пленок толщиной 10 nm не превышает 10.7% на частоте 1 THz. В качестве примера рассчитаны комплексные оптические коэффициенты системы типа эталона Фабри-Перо и металлической пленки без подложки с модельной зависимостью проводимости по толщине. Показано совпадение результатов расчетов, выполненных путем численного моделирования и с использованием приближенных граничных условий. Продемонстрирована возможность непосредственного вычисления средней удельной проводимости пленки по экспериментально измеренным коэффициентам отражения и пропускания.

Ключевые слова: ультратонкие металлические пленки, приближенные граничные условия, СВЧ и ТГц диапазон, оптические коэффициенты, электропроводность.

DOI: 10.21883/OS.2020.09.49874.134-20

Введение

Задача изготовления ультратонких металлических пленок с заданными электромагнитными свойствами актуальна во многих областях современной прикладной физики. В качестве примеров можно привести микроэлектронику [1,2], оптическую интерферометрию [3,4], термоакустическое детектирование электромагнитных импульсов нано- и микросекундной длительности [5,6], спектроскопию комбинационного рассеяния [7]. Решение данной задачи требует детального изучения свойств ультратонких металлических пленок, поэтому в последние десятилетия растет число экспериментальных работ по измерениям их параметров.

Одним из основных способов исследования тонких пленок являются волноводные измерения оптических коэффициентов в сантиметровом [8–10], миллиметровом [11] и субмиллиметровом [12] диапазонах длин волн. Измерения проводятся с двухслойной системой в виде диэлектрической подложки с напыленной на нее металлической пленкой. Между тем, поскольку формулы для оптических коэффициентов такой системы весьма громоздки [10], большинство авторов при теоретическом описании так или иначе исключают наличие подложки.

Альтернативным способом упрощенного описания такой слоистой структуры является использование приближенных граничных условий. Теория распространения электромагнитных волн в плоско-слоистых средах начала развиваться еще в начале 20-го века, ее основные положения и результаты изложены в фундаментальных монографиях [13,14]. Идея возможности достаточно точного описания отражения электромагнитных волн от проводящих поверхностей с использованием приближенных граничных условий появилась примерно в 40-х годах прошлого столетия.

Впервые такая идея была высказана А.Н. Щукиным, М.А. Леонтовичем и С.М. Рытовым [15–17]. Они предложили шивать компоненты электромагнитного поля на границе раздела диэлектрической и металлической сред, исключая из рассмотрения поле, прошедшее внутрь металла. В настоящее время еще ведутся споры по поводу границ применимости данного метода [18,19], исследуется возможность его обобщения [20].

Наряду с граничным условием Леонтовича развивался также подход, использующий метод усреднения, позволяющий находить амплитуды как отраженной, так и прошедшей волн. Впервые данный подход был применен в задачах расчета характеристик волноводов с гиромаг-

нитным заполнением, высота прямоугольного сечения которых была мала по сравнению с шириной [21,22]. Метод усреднения использовался также для описания распространения электромагнитных волн через изотропные киральные слои, при этом использовалась модель четырехполюсников [23].

Дальнейшее развитие метода усреднения и граничного условия Леонтовича и их различные модификации описаны в обзорной статье [24], а также в монографиях [25,26].

Возможность применения метода усреднения к задаче расчета оптических коэффициентов тонких металлических пленок в отсутствие подложек была исследована в работе [27]. В методе усреднения используется предположение о том, что в области, где строится приближенное решение для поперечной компоненты вектора напряженности электрического поля, функция, равная произведению точного решения на квадрат волнового числа, хорошо аппроксимируется линейной зависимостью. Это справедливо для линейной зависимости проводимости пленки по толщине. Между тем проводимость ультратонких металлических пленок существенно неоднородна по толщине вследствие поверхностного окисления и формирования внутренней островковой структуры [28–30]. В таких случаях применение метода усреднения становится некорректным.

Одним из возможных подходов для решения задачи расчета оптических коэффициентов ультратонких металлических пленок состоит в использовании широко известного метода ВКБ [31]. Основным условием его применимости является плавность изменения проводимости пленки в зависимости от толщины. Данное ограничение оказывается достаточно сильным, и оно практически не выполняется для металлических пленок нанометровой толщины. К более детальному анализу применимости метода ВКБ мы вернемся ниже.

Цель настоящей работы состояла в получении приближенных граничных условий для задачи расчета оптических коэффициентов системы, состоящей из подложки и неоднородной ультратонкой металлической пленки с произвольной зависимостью проводимости по толщине. Вывод основан на методе последовательных приближений Пикара [32]. При условии малости некоторых безразмерных параметров предлагаемый метод расчета обладает равномерной и быстрой сходимостью и позволяет получить аналитические выражения для оценки погрешности приближенного решения.

Вывод граничных условий

Для вывода граничных условий рассмотрим пленку толщиной h с удельной проводимостью $\sigma_2 = \sigma_2(z)$ и относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_2 = \epsilon_2(z)$ (рис. 1). Среда 1 и 3, граничащие с пленкой, обладают проводимостями σ_1, σ_3 и диэлектрическими

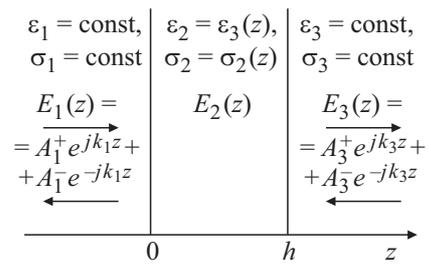


Рис. 1. К выводу приближенных граничных условий.

проницаемостями ϵ_1, ϵ_3 , не зависящими от продольной координаты z .

В случае нормального падения плоской монохроматической электромагнитной волны в каждой из сред выполняется уравнение Гельмгольца для поперечной компоненты вектора напряженности электрического поля $E(z)$:

$$E_i'' + k_i^2 E_i = 0, \tag{1}$$

где $k_i^2 = \omega^2 \hat{\epsilon}_i \mu_0$, $\hat{\epsilon}_i = \epsilon_i + j\sigma_i/\omega$, j — мнимая единица, $i = 1, 2, 3$. Производные по пространственной переменной z обозначаются штрихами. В первой и третьей средах ($i = 1, 3$) решения уравнения (1) представляют собой суперпозицию встречных плоских волн:

$$E_i(z) = A_i^+ e^{jk_i z} + A_i^- e^{-jk_i z}. \tag{2}$$

Из непрерывности $E(z)$ и $E'(z)$ на границе $z = 0$ следует

$$E_2(0) = A_1^+ + A_1^-, \quad E_2'(0) = jk_1(A_1^+ - A_1^-). \tag{3}$$

Решение уравнения (1) с граничными условиями (3) в пленке построим с помощью метода Пикара [32]. Для этого проинтегрируем уравнение (1) дважды от 0 до некоторого значения $z \in [0, h]$. После первого и второго интегрирования получаем выражения

$$E_2'(z) - E_2'(0) = - \int_0^z k_2^2(z_1) E_2(z_1) dz_1, \tag{4}$$

$$E_2(z) = E_2(0) + z E_2'(0) - \int_0^z \int_0^{z_1} k_2^2(z_2) E_2(z_2) dz_2 dz_1. \tag{5}$$

Используем (5) для реализации схемы метода последовательных приближений. Введем следующие обозначения: $u(z) \equiv E_2(z)$ — точное решение уравнения (1) в пленке, $u^{[0]} \equiv E_2(0) + z E_2'(0)$ и $u^{[n]}(z)$ — соответственно нулевое и n -е приближения решения. Операцию умножения на $-k_2^2(z)$ и последующего двойного интегрирования кратко запишем в виде действия линейного оператора \hat{J} :

$$- \int_0^z \int_0^{z_1} k_2^2(z_2) \dots dz_2 dz_1 \equiv \hat{J}.$$

Тогда (5) может быть переписано в виде

$$u = u^{[0]} + \hat{J}(u). \tag{6}$$

Последовательно подставляя u из левой части равенства (6) в его правую часть, можно показать, что

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{J}^m(u^{[0]}). \tag{7}$$

$\hat{J}^m(u^{[0]})$ обозначает m -кратное последовательное применение оператора \hat{J} к нулевому приближению $u^{[0]}(z)$. В качестве n -го приближения удобно рассматривать величину:

$$u^{[n]} = (1 + \hat{J} + \hat{J}^2 + \dots + \hat{J}^n)u^{[0]}. \tag{8}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости рекуррентного соотношения:

$$u^{[n]} = u^{[0]} + \hat{J}(u^{[n-1]}). \tag{9}$$

Для доказательства равномерной сходимости метода необходимо оценить модуль разности n -го приближения и точного решения $|v^{[n]}| = |u^{[n]} - u|$. Учитывая (9) и (6), а также линейность оператора \hat{J} , получим оценку для $|v^{[n]}|$:

$$\begin{aligned} v^{[n]} &= u^{[n]} - u = u^{[0]} + \hat{J}u^{[n-1]} - u^{[0]} - \hat{J}u \\ &= \hat{J}(u^{[n-1]} - u) = \hat{J}(v^{[n-1]}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |v^{[n]}| &= |\hat{J}(v^{[n-1]})| = \left| \int_0^z \int_0^{z_1} k_2^2(z_2) v^{[n-1]} dz_2 dz_1 \right| \\ &\leq \int_0^z \int_0^{z_1} |k_2^2(z_2) v^{[n-1]}| dz_2 dz_1 \leq k_{\max}^2 \int_0^z \int_0^{z_1} |v^{[n-1]}| dz_2 dz_1, \end{aligned} \tag{10}$$

где $k_{\max} = \max_{z \in [0, h]} |k_2(z)|$ — максимальное значение модуля волнового числа в пленке. Пусть $\Delta u_{\max} = \max_{z \in [0, h]} |u^{[0]}(z) - u(z)|$ — максимальный модуль разности нулевого приближения и точного решения. Полагая в (10) $n = 1$, получим оценку для $|v^{[1]}|$:

$$\begin{aligned} |v^{[1]}| &\leq k_{\max}^2 \int_0^z \int_0^{z_1} |v^{[0]}| dz_2 dz_1 \\ &\leq k_{\max}^2 \Delta u_{\max} \iint dz_2 dz_1 = k_{\max}^2 \Delta u_{\max} \frac{z^2}{2}, \end{aligned}$$

где $|v^{[0]}| = |u^{[0]} - u|$.

Применяя метод математической индукции, можно показать, что для любого n верна оценка

$$|v^{[n]}| \leq k_{\max}^{2n} \Delta u_{\max} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \leq \Delta u_{\max} \frac{(k_{\max} h)^{2n}}{(2n)!}. \tag{11}$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta u_{\max} (k_{\max} h)^{2n} / (2n)! = 0$, приближенное решение $u^{[n]}$ равномерно сходится к точному решению u при $n \rightarrow \infty$.

Задача вычисления последующего приближения весьма проблематична, поскольку каждый раз необходимо проводить двойное интегрирование. Однако можно показать, что $u^{[n]} - u^{[n-1]} = \hat{J}^n(u^{[0]}) = O(p_1^{2n})$, где безразмерный параметр $p_1 = k_{\max} h \sim h/\delta$, δ — толщина скин-слоя в металле пленки. Тогда первое приближение отличается от нулевого на величину порядка $O(p_1^2)$, поэтому имеет смысл учитывать лишь $u^{[0]}$. Действительно, пусть $w^{[n]} = u^{[n]} - u^{[n-1]}$ и $u_{\max}^{[0]} = \max_{z \in [0, h]} |u^{[0]}(z)|$ — максимальное значение модуля нулевого приближения. Совершая с функцией $w^{[n]}$ преобразования, аналогичные тем, что были выполнены с функцией $v^{[n]}$ при получении неравенства (11), можно доказать, что

$$|w^{[n]}| = |\hat{J}^n(u^{[0]})| \leq u_{\max}^{[0]} \frac{(k_{\max} h)^{2n}}{(2n)!}.$$

Используя данное соотношение и формулу Маклорена $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} / (2n)!$, можно получить точную аналитическую оценку для погрешности нулевого приближения:

$$\begin{aligned} |u - u^{[0]}| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \hat{J}^n(u^{[0]}) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\hat{J}^n(u^{[0]})| \\ &\leq u_{\max}^{[0]} (\cosh(k_{\max} h) - 1). \end{aligned}$$

Пусть $A = \max\{|A_1^+|, |A_1^-|\}$, тогда с учетом (3)

$$\begin{aligned} u_{\max}^{[0]} &= |E(0) + E'(0)z| \leq |E(0)| + |E'(0)|h \\ &\leq 2A + 2A|k_1|h, \\ |u - u^{[0]}| &\leq 2A(1 + |k_1|h)(\cosh(k_{\max} h) - 1). \end{aligned}$$

Для большинства металлов вплоть до видимого диапазона длин волн можно считать, что $k_2 \cong (1 + j)\sqrt{\omega\sigma_2\mu_0/2}$. Оценка для частоты 10 GHz и удельной проводимости $\sigma_2 \sim 10^8$ S/m дает значение $|k_2| < 3 \cdot 10^6$ м⁻¹. Поэтому для пленок толщиной вплоть до 30 nm $(p_1)^2 \leq 0.01$. В реальности σ_2 значительно уменьшается при уменьшении толщины пленки, поэтому оценка 0.01 завышена.

В нулевом приближении при $(p_1)^2 \ll 1$ электрическое поле внутри тонкого слоя линейно зависит от продольной координаты z с точностью до $O(p_1^2)$:

$$E_2(z) = u^{[0]} + \Delta_1 = E_2(0) + zE_2'(0) + \Delta_1. \tag{12}$$

Здесь $\Delta_1 = 2\psi_1 A(1 + |k_1|h)(\cosh(k_{\max} h) - 1)$ — погрешность нулевого приближения, ψ_1 — некоторая комплексная функция переменной z , модуль которой ограничен $|\psi_1| \leq 1$. Для расчета максимально возможной по модулю ошибки конкретный вид функции ψ_1 не имеет принципиального значения. Везде далее символ ψ_k будем использовать для обозначения комплексных функций переменной z , обладающих свойством $|\psi_k| \leq 1$. При

условии $(p_1)^2 \ll 1$ величина погрешности также мала: $\Delta_1 = O(p_1^2)$. Учитывая, что в силу непрерывности $E(z)$ и $E'(z)$ должны выполняться равенства $E_2(h) = E_3(h)$, $E_2(0) = E_1(0)$, $E_2'(h) = E_3'(h)$, $E_2'(0) = E_1'(0)$, выражение (12) при $z = h$ превращается в одно из граничных условий:

$$E_3(h) = E_1(0) + hE_1'(0) + \Delta_1. \quad (13)$$

Второе граничное условие получается при подстановке выражения (12) в выражение (4) и приравнении $z = h$:

$$E_3'(h) - E_1'(0) = -(E_1(0) + \Delta_1) \times \int_0^h k_2^2(z_1) dz_1 - E_1'(0) \int_0^h k_2^2(z_1) z_1 dz_1. \quad (14)$$

Именно подстановка (12) в (4), а не простое дифференцирование выражения (12) позволяет сохранить интегральные слагаемые, которые, как это будет показано ниже, определяют оптические свойства тонкой пленки.

Упрощение граничных условий

Граничные условия (13), (14) могут быть упрощены при малости второго безразмерного параметра $p_2 = k_1 h \sim h/\lambda_1$, здесь λ_1 — длина волны в первой среде. Например, если волна с частотой 10 GHz падает из кварца с показателем преломления 1.95 на пленку, то $p_2 = 2\pi h/\lambda_1 \leq 2 \cdot 10^{-5}$ для пленок толщиной вплоть до 30 nm.

При $p_2 \ll 1$ в нулевом приближении (12) можно пренебречь слагаемым $zE_2'(0)$, поскольку абсолютные различия между $u^{[0]}(z)$ и $E_1(0)$ оказываются порядка $O(p_2)$:

$$|u^{[0]}(z) - E_1(0)| \equiv |E_1'(0)z| \leq |jk_1 h(A_1^+ - A_1^-)| \leq 2A|k_1|h \equiv 2Ap_2.$$

Можно показать, что при одновременной малости p_1 и p_2 модуль разности также мал: $|E_2(z) - E_2(0)| = O(p_1^2 + p_2)$. Действительно, из выражений (12), (13) следует

$$\begin{aligned} |E_2(z) - E_2(0)| &= \\ &= |zE_1'(0) + \Delta_1| \leq h|E_1'(0)| + |\Delta_1| \leq 2A|k_1|h + |\Delta_1| \\ &= 2A(|k_1|h + (1 + |k_1|h)(\cosh(k_{\max}h) - 1)). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E_2(z) = E_2(0) + \Delta_2, \quad (15)$$

где Δ_2 — погрешность решения, определяемая соотношением

$$\Delta_2 = 2\psi_2 A (|k_1|h + (1 + |k_1|h)(\cosh(k_{\max}h) - 1)).$$

При $p_{1,2} \ll 1$ для погрешности получим оценку $\Delta_2 = O(p_1^2 + p_2)$. После подстановки формулы (15) в выражение (4) и приравнения $z = h$, получаются упрощенные приближенные граничные условия

$$E_3(h) = E_1(0) + \Delta_2, \quad (16)$$

$$E_3'(h) - E_1'(0) = -(E_1(0) + \Delta_2) \int_0^h k_2^2(z_1) dz_1. \quad (17)$$

Граничные условия (16), (17) можно вывести путем расчета поверхностной плотности тока, текущего в пленке, в предположении о том, что изменением напряженности поля $E_2(z)$ в пленке можно пренебречь. Полный поверхностный ток (сумма тока смещения и тока проводимости) при этом оказывается равен

$$I_s = \frac{E_1(0)}{\omega\mu_0} \int_0^h k_2^2(z) dz.$$

Такой подход дает наглядную физическую интерпретацию интеграла в (17), однако он не позволяет получить погрешность приближенного решения Δ_2 .

Введем удобный для дальнейших вычислений коэффициент η — показатель преломления пленки:

$$\eta(\omega) = \int_0^h k_2^2(z, \omega) dz / jk_0(\omega), \quad (18)$$

здесь k_0 — волновое число вакуума. В общем случае, согласно (18), коэффициент η зависит от частоты. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^h k_2^2(z, \omega) dz / jk_0 &\sim h(k_{\max})^2 / k_0 = \\ &= (hk_{\max})^2 n_1 / hk_1 = n_1 p_1^2 / p_2, \end{aligned}$$

где $n_1 = k_1/k_0$ — показатель преломления первой среды. Поскольку p_1, p_2 — малые параметры, коэффициент η может быть как малой, так и большой величиной, из чего следует, что интегральным слагаемым в (17) пренебрегать нельзя. Учет же следующих приближений в (17) будет давать поправки $O(p_1^2 + p_2)$, поэтому именно коэффициент η при $p_1, p_2 \ll 1$ определяет оптические свойства пленки. При справедливости приближения $k_2^2 \cong j\omega\mu_0\sigma_2$, формула (18) значительно упрощается:

$$\eta = Z_0 h \langle \sigma_2 \rangle,$$

здесь $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ — волновое сопротивление вакуума, а $\langle \sigma \rangle = \int_0^h \sigma_2(z_1) dz_1 / h$ — удельная проводимость металла, усредненная по толщине пленки. Удельная проводимость металла σ_2 , как правило, не зависит от частоты в широком диапазоне длин волн. Поэтому

при справедливости приближения $k_2^2 \cong j\omega\mu_0\sigma_2$ коэффициент η также не зависит от частоты. Данное обстоятельство позволяет утверждать, что ультратонкие пленки являются частотно независимыми оптическими элементами, что представляет интерес, например, для ряда задач оптической интерферометрии [3,4].

Найдем связь между амплитудами поля $A_{1,3}^\pm$ в средах 1 и 3 при условии выполнения граничных условий (16) и (17). Приведем подробный вывод первого уравнения для амплитуд поля $A_{1,3}^\pm$, используя условие (17). Рассмотрим общий случай, когда пленка локализована в интервале $z \in [a, a+h]$. Продифференцировав решения в виде плоских волн (2), а затем подставив их в граничное условие (17), с учетом (18) получим

$$A_1^+ jk_1 e^{jk_1 a} - A_1^- jk_1 e^{-jk_1 a} - (A_3^+ jk_3 e^{jk_3(a+h)} - A_3^- jk_3 e^{-jk_3(a+h)}) = (A_1^+ e^{jk_1 a} + A_1^- e^{-jk_1 a} + \Delta_2) jk_0 \eta.$$

Разделим данное равенство на jk_0 , введем показатели преломления i -й среды: $n_i = k_i/k_0$,

$$A_1^+ n_1 e^{jk_1 a} - A_1^- n_1 e^{-jk_1 a} - (A_3^+ n_3 e^{jk_3(a+h)} - A_3^- n_3 e^{-jk_3(a+h)}) = (A_1^+ e^{jk_1 a} + A_1^- e^{-jk_1 a} + \Delta_2) \eta.$$

Экспоненты, содержащие h , внесем в общую погрешность решения. Поскольку

$$|A_3^\pm e^{\pm jk_3(a+h)} - A_3^\pm e^{\pm jk_3 a}| = |A_3^\pm| |e^{\pm jk_3 h} - 1| = |A_3^\pm| |\sin(k_3 h/2)| \leq |A_3| |\sin(k_3 h/2)|,$$

где $A_3 = \max\{|A_3^+|, |A_3^-|\}$, справедливо равенство

$$A_3^+ e^{jk_3(a+h)} + A_3^- e^{-jk_3(a+h)} + \Delta_2 = A_3^+ e^{jk_3 a} + A_3^- e^{-jk_3 a} + \Delta_2 + 2A_3 \psi_3 |\sin(k_3 h/2)|.$$

Сгруппируем слагаемые при амплитудах $A_{1,3}^\pm$, а все слагаемые, содержащие погрешность, перенесем в правую часть, получим:

$$A_1^+ (n_1 - \eta) e^{jk_1 a} - A_1^- (n_1 + \eta) e^{-jk_1 a} - n_3 (A_3^+ e^{jk_3 a} - A_3^- e^{-jk_3 a}) = \Delta_2 \eta - 2A_3 n_3 \psi_3 |\sin(k_3 h/2)|.$$

Введем $A_4 = \max\{|A_1^+|, |A_1^-|, |A_3^+|, |A_3^-|\}$, тогда модуль правой части оценим как

$$|2\psi_2 A \eta (|k_1| h + (1 + |k_1| h) (\cosh(k_{\max} h) - 1)) - 2A_3 n_3 \psi_3 |\sin(k_3 h/2)| \leq 2A_4 |\eta| \{ |k_1| h + (1 + |k_1| h) (\cosh(k_{\max} h) - 1) \} + |n_3 \sin(k_3 h/2)|.$$

Последнее выражение обозначим как C_1 , введем обозначения $n_i^\pm = n_i \pm \eta$. В результате получим первое

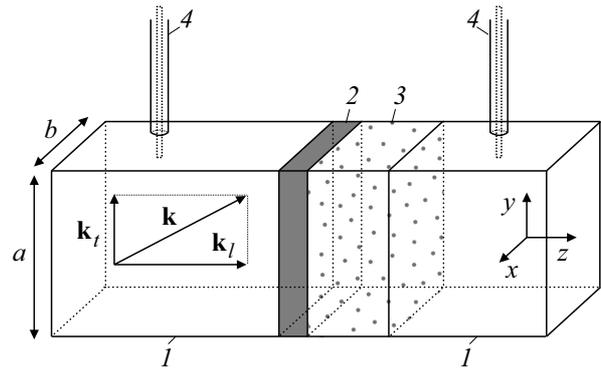


Рис. 2. К волноводной постановке задачи.

уравнение для связи амплитуд поля $A_{1,3}^\pm$ с учетом погрешности:

$$n_1^- A_1^+ e^{jk_1 a} - n_1^+ A_1^- e^{-jk_1 a} = n_3 A_3^+ e^{jk_3 a} - n_3 A_3^- e^{-jk_3 a} + \Delta_3, \tag{19}$$

где $\Delta_3 = \psi_4 C_1$.

Совершенно аналогичным образом из граничного условия (16) выводится второе уравнение для амплитуд поля $A_{1,3}^\pm$:

$$A_1^+ e^{jk_1 a} + A_1^- e^{-jk_1 a} = A_3^+ e^{jk_3 a} + A_3^- e^{-jk_3 a} + \Delta_4, \tag{20}$$

где $\Delta_4 = \psi_5 C_2$,

$$C_2 = 2A_4 \{ (|k_1| h + (1 + |k_1| h) (\cosh(k_{\max} h) - 1)) + |\sin(k_3 h/2)| \}.$$

В коэффициентах $C_{1,2}$ содержится третий параметр: $p_3 = |k_3| h$. При $p_{1,2,3} \ll 1$ величина погрешностей также мала: $\Delta_{3,4} = O(p_1^2 + p_2 + p_3)$.

Граничные условия (13), (14), а также их приближенные выражения (16), (17) получены для плоских электромагнитных волн в свободном пространстве. Однако измерения оптических коэффициентов тонких пленок в СВЧ диапазоне часто проводятся в волноводе (рис. 2). Подложка 3 с пленкой 2 устанавливаются в измерительном волноводе 1 так, чтобы полностью перекрыть его поперечное сечение. Волновод с помощью двух коаксиально волноводных переходов 4 подключается к портам векторного анализатора цепей, измеряющего параметры рассеяния [10].

Наличие стенок волновода довольно сильно усложняет задачу расчета оптических коэффициентов. В общем случае волновой фронт становится неоднородным: амплитуды $A_{1,3}^\pm$ начинают зависеть от поперечных координат x, y (рис. 2), а у волнового вектора в i -й среде k_i помимо продольной составляющей k_{li} появляется также поперечная составляющая k_t , величина которой определяется длинами сторон прямоугольного сечения волновода a и b . При рассмотрении распространения волн одной моды задача упрощается: для таких волн зависимость амплитудных коэффициентов от поперечных

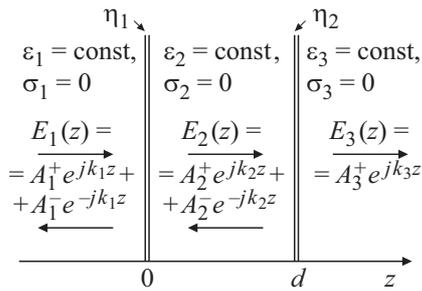


Рис. 3. Схема оптической системы типа „эталон Фабри-Перо“.

координат $A_{1,3}^{\pm}(x, y)$ одинаковая, поэтому отношения амплитуд не зависят от координат x, y . В некоторых частных случаях возможны значительные упрощения. Например, для моды TE_{10} волноводная задача для поперечной составляющей вектора напряженности электрического поля заменой $k_i \rightarrow k_{li} = \sqrt{(k_i)^2 - k_t^2}$, $k_t = \pi / \max\{a, b\}$ полностью сводится к задаче распространения волн в свободном пространстве. В этом случае амплитуды $A_{1,3}^{\pm}$ зависят от поперечных координат x, y как от параметров.

В проводящей пленке $|k_{l2}| = \sqrt{\omega\mu_0\sigma/2} \gg k_t$. Поэтому волновой вектор k_{l2} в пленке, находящейся в волноводе, практически совпадает с волновым вектором в пленке в условиях свободного пространства. Так, на частоте 10 ГГц и при удельной проводимости пленки меди 10^6 S/m отношение $|k_{l2}/k_t| \approx 10^3$. Следовательно, граничные условия, полученные для свободного пространства, с большой степенью точности можно применить и для вычисления оптических коэффициентов пленок в волноводе. Этим свойством мы воспользуемся ниже при вычислении проводимости пленок меди по результатам измерений оптических коэффициентов в волноводе.

Обсуждение результатов

Предложенные приближенные граничные условия позволяют существенно упростить вычисление оптических коэффициентов слоистой среды, включающей ультратонкие металлические пленки с произвольной зависимостью проводимости от продольной координаты z . При этом структура слоистой среды может состоять из нескольких наложенных друг на друга пленок. В силу аддитивности интеграла (18) N последовательно напыленных друг на друга ультратонких металлических пленок с коэффициентами преломления η_i ($i = 1, 2, \dots, N$), могут рассматриваться как один слой с коэффициентом преломления $\eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_N$ при условии, что для такого слоя $p_{1,2,3} \ll 1$.

В качестве примера рассмотрим оптическую систему, представляющую собой аналог эталона Фабри-Перо — плоскопараллельную диэлектрическую подложку толщиной d с напыленными на нее с разных сторон ультратонкими металлическими пленками с показателями преломления η_i ($i = 1, 2$) (рис. 3).

Пусть подложка, представляющая собой однородный диэлектрик с коэффициентом преломления n_2 , локализована в пространственном интервале $z \in [0, d]$ — между первой и третьей средами, которые также являются однородными диэлектриками с показателями преломления n_1 и n_3 . На границах $z = 0$ и $z = d$ находятся ультратонкие металлические пленки с показателями преломления η_1 и η_2 соответственно. Пусть амплитуда A_1^+ падающей с $z = -\infty$ волны задана, а в области $z \in [d, \infty)$ есть только прошедшая волна: $A_3^- = 0$. Тогда, согласно формулам (19), (20), на границах $z = 0$ и $z = d$ с точностью $O(p_1^2 + p_2 + p_3)$ должны выполняться равенства

$$A_1^+ + A_1^- = A_2^+ + A_2^-, \tag{21}$$

$$n_1^- A_1^+ - n_1^+ A_1^- = n_2 A_2^+ - n_2 A_2^-, \tag{22}$$

$$A_2^+ e^{jk_2 d} + A_2^- e^{-jk_2 d} = A_3^+ e^{jk_3 d}, \tag{23}$$

$$n_2^- A_2^+ e^{jk_2 d} - n_2^+ A_2^- e^{-jk_2 d} = n_3 A_3^+ e^{jk_3 d}. \tag{24}$$

Здесь $n_i^{\pm} = n_i \pm \eta_i$, $k_i = k_0 n_i$. Решая систему (21)–(24), можно получить следующие формулы для оптических коэффициентов отражения r и прохождения t :

$$r = \frac{A_1^-}{A_1^+} = \frac{e^{-jk_2 d} (n_2^+ + n_3)(n_1^- - n_2) + e^{jk_2 d} (n_2^- - n_3)(n_1^- + n_2)}{e^{-jk_2 d} (n_2^+ + n_3)(n_1^+ + n_2) + e^{jk_2 d} (n_2^- - n_3)(n_1^+ - n_2)}, \tag{25}$$

$$t = \frac{A_3^+}{A_1^+} e^{jk_1 d} = \frac{4n_1 n_2 e^{j(k_1 - k_3)d}}{e^{-jk_2 d} (n_2^+ + n_3)(n_1^+ + n_2) + e^{jk_2 d} (n_2^- - n_3)(n_1^+ - n_2)}. \tag{26}$$

Выражения для погрешностей формул (25), (26) довольно громоздки и здесь не приведены. В частном случае, когда металлическая пленка имеется только на одной из границ, выражения (25), (26) упрощаются. В частности, если пленка расположена на границе $z = 0$, то $\eta_2 = 0$ и $n_2^{\pm} = n_2$; при наличии пленки только на границе $z = d$ имеем $\eta_1 = 0$ и $n_1^{\pm} = n_1$. Заметим, что при $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $n_{1,2}^{\pm} = n_{1,2}$ формулы (25), (26) переходят в классические выражения для оптических коэффициентов диэлектрической подложки [13]. При $\eta_2 = 0$ и $h = 0$ формулы (25), (26) соответствуют оптическим коэффициентам металлической пленки в отсутствие подложки

$$r = \frac{n_1 - \eta_1 - n_3}{n_1 + \eta_1 + n_3} (1 + \Delta_r), \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + \eta_1 + n_3} (1 + \Delta_t). \tag{27}$$

Погрешности Δ_r, Δ_t , вычисления коэффициентов r и t определяются выражениями:

$$\Delta_r = \psi_r \frac{|\bar{\Delta}_3| + |n_2 \bar{\Delta}_4|}{|n_1 - \eta_1 - n_2|}, \quad \Delta_t = \psi_t \frac{(n_1 + \eta_1) |\bar{\Delta}_4| + |\bar{\Delta}_3|}{2n_1},$$

где $\bar{\Delta}_{3,4} = \Delta_{3,4}/A_4$.

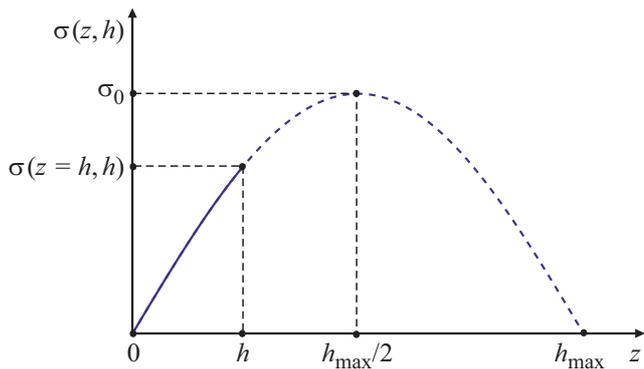


Рис. 4. Модельная проводимость пленки, использованная для сравнительных расчетов. Максимальная толщина пленки $h_{\max} = 10 \text{ nm}$, удельная проводимость $\sigma_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ S/m}$.

Далее проведем сравнительный анализ следующих методов: предлагаемых приближенных граничных условий, основанных на методе Пикара (МП); численного решения уравнения Гельмгольца (ЧМ); метода усреднения, примененного к тонким пленкам [27] (МУ).

Здесь уместно объяснить причину, по которой в числе сравниваемых подходов отсутствует метод ВКБ. Метод ВКБ дает хорошую аппроксимацию точного решения при условии достаточно плавного изменения волнового числа $k(z)$: $|dk/dz|/|k^2| \ll 1$ [31]. В нашем случае $k(z) = k_2(z)$, модуль которого оценим величиной k_{\max} . Для модуля производной $|dk_2(z)/dz|$ справедлива оценка $|dk_2(z)/dz| \sim k_{\max}/h_m$, где h_m — толщина пленки, при которой ее удельная проводимость по порядку величины сравнивается с удельной проводимостью металла. Тогда $|dk_2(z)/dz|/|k_2|^2 \sim (k_{\max}/h_m)/(k_{\max})^2 = 1/k_{\max}h_m = 1/p_1$. Для применимости предлагаемых граничных условий требуется, чтобы $p_1 \ll 1$, что противоречит условию применимости метода ВКБ. Например, для пленок меди на частоте 10 GHz $k_{\max} \sim 3 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$, $h_m \approx 10 \text{ nm}$ [10], откуда следует, что $|dk_2(z)/dz|/|k_2|^2 \sim 30$.

Рассмотрим случай неоднородной металлической пленки без подложки в воздухе: $n_1 = n_3 = 1$. Неоднородность проводимости возникает в пленках со сложной морфологической структурой, а также при поверхностном окислении металла. В качестве модели рассмотрим пленку, в которой проводимость в зависимости от толщины пленки h и координаты z меняется по закону (рис. 4)

$$\sigma(z, h; h \leq h_{\max}) = \sigma_0 \sin(\pi z/h_{\max}), \quad z \in [0, h]. \quad (28)$$

Расчеты проводились для случая падения волны с частотой 10 GHz на пленку с параметрами $\sigma_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ S/m}$, $h_{\max} = 10 \text{ nm}$. Для расчетов по МП использовались формулы (27) при $\Delta_{r,t} = 0$. Коэффициент η имел вид

$$\eta = Z_0 \int_0^h \sigma(z, h) dz = Z_0 \sigma_0 h_{\max} (1 - \cos(\pi h/h_{\max}))/\pi.$$

Для численного решения уравнения (1) использовалась схема Рунге-Кутты третьего порядка. В каждом численном эксперименте расчетная сетка содержала 10 000 узлов.

В МУ шивка электрического поля на поверхностях пленки $z = 0$ и $z = h$ (рис. 1) проводилась при помощи формул приближенного вычисления интеграла методом трапеций:

$$E_2(h) - E_2(0) \equiv \int_0^h E_2'(z) dz \approx \approx 0.5(E_2'(h) + E_2'(0))h + O(h^3),$$

$$E_2'(h) - E_2'(0) = - \int_0^h k_2^2(z) E_2(z) dz \approx \approx -0.5(k_2^2(h)E_2(h) + k_2^2(0)E_2(0))h + O(h^3). \quad (29)$$

Во всех трех методах считалось справедливым приближение $k^2 \cong j\omega\mu_0\sigma$.

На рис. 5 изображены зависимости оптических коэффициентов $R = |r|^2$ (кривые 1, 3, 5), $T = |t|^2$ (кривые 2, 4, 6) от толщины пленки h , рассчитанные МП (кривые 1, 2), ЧМ (кривые 3, 4) и МУ (кривые 5, 6). Значения оптических коэффициентов, рассчитанные МП и ЧМ с высокой точностью соответствуют друг другу во всем диапазоне толщин $h \in [0, h_{\max}]$ (для частоты 10 GHz их различия не превышают $10^{-6}\%$). МУ достаточно хорошо работает до толщины 3 nm, где зависимость $\sigma(z, h)$ от z близка к линейной, и приближенные формулы (29) весьма точны (различия между МУ и ЧМ не превышают 8.5%). При дальнейшем увеличении h зависимость $\sigma(z, h)$ становится нелинейной, что приводит к росту ошибки вычисления интегралов в (29) методом трапеций. В результате наблюдается значительное несоответствие расчетов оптических коэффициентов между ЧМ и МУ при толщине пленки, превышающей 5 nm.

Для оценки верхней границы частотного диапазона, в котором применим предлагаемый метод, были рассчитаны максимальные погрешности вычисления оптических коэффициентов для пленки с проводимостью (28) в зависимости от частоты. Для пленок толщиной в диапазоне от 0 до $h_{\max} = 10 \text{ nm}$ в двойном логарифмическом масштабе погрешность растет практически линейно с частотой. Максимальные погрешности вычисления оптических коэффициентов на частотах 1, 10, 100 GHz, 1 THz не превышают значений 0.0105, 0.105, 1.05 и 10.7% соответственно.

Для однородных по толщине металлических пленок с удельной проводимостью $\sigma = 5 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ толщиной до 10 nm для частоты 10 GHz отклонения МУ и МП от точного аналитического решения не превышают $2 \cdot 10^{-8}\%$. Стоит отметить, что для толстых однородных слоев с небольшой проводимостью МУ обладает более высокой точностью, чем МП, поскольку граничные

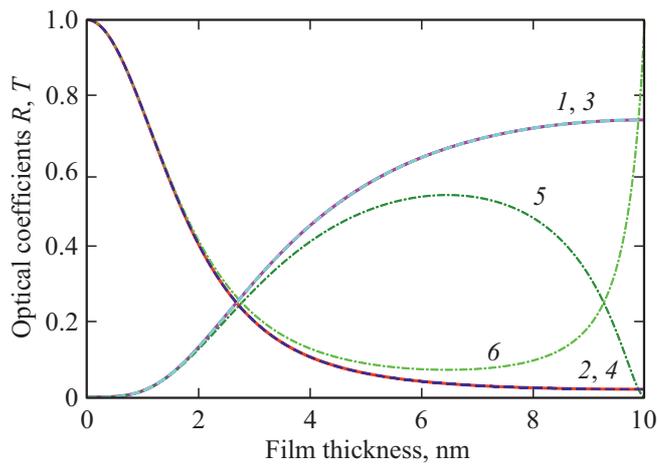


Рис. 5. Зависимости оптических коэффициентов R (кривые 1, 3, 5), T (кривые 2, 4, 6) от толщины пленки h с неоднородным распределением проводимости по толщине (28), рассчитанные МП (кривые 1, 2), ЧМ (кривые 1, 2) и МУ (кривые 5, 6).

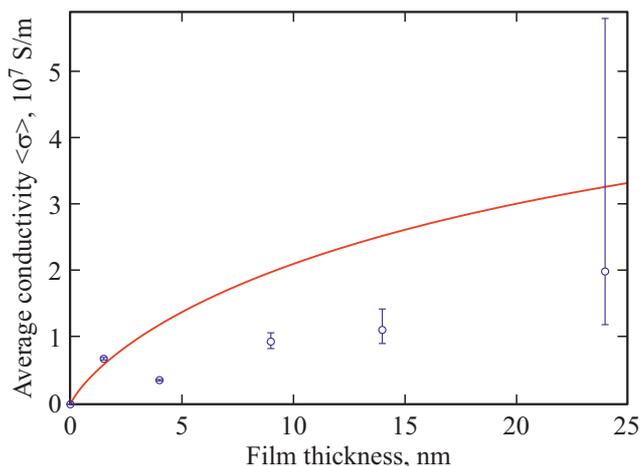


Рис. 6. Зависимость средней удельной проводимости пленки меди (σ) от толщины, рассчитанная по измеренным значениям коэффициента отражения R на частоте 9 GHz [10] (символы). Зависимость проводимости пленки меди, построенная по формуле Фуша в предположении равномерного распределения проводимости пленки по толщине, показана сплошной линией.

условия (29) имеют больший порядок аппроксимации по h , чем граничные условия (16), (17). Например, для слоев до $1 \mu\text{m}$ с проводимостью 100 S/m отличия МУ от точного решения составляют около $1.5 \cdot 10^{-8}\%$, в то время как отличие МП составляет $4 \cdot 10^{-3}\%$.

Одним из принципиальных достоинств предложенного метода с использованием приближенных граничных условий является возможность явно выразить показатели преломления пленки $\eta_{1,2}$ через оптические коэффициенты r, t и рассчитать зависимость средней проводимости пленки от ее толщины по экспериментально измеренным значениям оптических коэффициентов. Рассмотрим случай, когда пленка находится только со

стороны падающей волны: $\eta_2 = 0$, $\eta_1 \neq 0$. В этом случае показатели преломления выражаются как $n_2^\pm = n_2$, $n_1^\pm = n_1 \pm \eta_1$. Тогда удельная проводимость, усредненная по толщине пленки, может быть найдена из соотношения $\langle\sigma(h)\rangle = \eta/(Z_0 h)$, где $\eta = \eta(|r(h)|^2)$ находится из формулы (25). На рис. 6 символами показана средняя удельная проводимость пленки меди в зависимости от толщины, рассчитанная по измеренным значениям коэффициента отражения R в волноводе на частоте 9 GHz, которые приведены на рис. 5 в работе [10]. Погрешность измерения коэффициента R составляла около 1%. Пленки изготавливались методом магнетронного распыления, в качестве подложки использовалась кварцевая пластина. Значения толщины пленки на рис. 6 смещены на толщину диэлектрического окисного слоя 6 nm по сравнению с рис. 5 в [10]. Проводимость $\langle\sigma(h)\rangle$, рассчитанная по измеренным коэффициентам отражения R , является усредненной по толщине пленки за вычетом окисленного слоя. На рис. 6 прослеживается тенденция возрастания проводимости пленки с увеличением ее толщины. Однако все рассчитанные значения лежат заметно ниже теоретической зависимости проводимости пленки меди, построенной по формуле Фуша (Fusch) [33], где предполагалось равномерное распределение проводимости пленки по толщине. Скорее всего, это обусловлено неравномерностью проводимости по толщине пленки и существованием слоев с относительно малой проводимостью. Это подтверждает наше предположение, высказанное в [10], о наличии сложной пространственной структуры пленок меди толщиной 6–20 nm и существовании перколяционного перехода пленки из диэлектрического в проводящее состояние в указанном диапазоне толщин. Более детальный анализ проводимости ультратонких пленок нанометровой толщины, полученный по результатам измерений оптических коэффициентов, мы планируем сделать в дальнейшем. В настоящей работе важно отметить именно возможность прямого вычисления средней удельной проводимости по экспериментально измеренным коэффициентам отражения и пропускания, а также оценить возникающие при этом погрешности, связанные с неточностью измерений оптических коэффициентов и толщины пленок.

Заключение

Приближенные граничные условия, основанные на методе Пикара, позволяют существенно упростить вычисление оптических коэффициентов слоистой среды, включающей металлические пленки нанометровой толщины. Поле в самой пленке не вычисляется точно, но заменяется приближенным значением, которое находится из граничных условий (13), (14). Необходимыми условиями для применения метода является малость трех параметров, p_1, p_2 и p_3 , выражения для которых приведены в работе. Новизна предложенного метода состоит в его применимости для ультратонких пленок

с произвольной зависимостью проводимости от продольной координаты z и его обобщении на случай пленок на подложках. Метод также позволяет рассчитывать оптические коэффициенты покрытия, состоящего из нескольких ультратонких слоев при условии малости параметров $p_{1,2,3}$ для суммарного слоя. На примере пленки с неравномерной зависимостью проводимости по толщине показано, что амплитуда поля в пленке, вычисленная приближенно, соответствует ее значению, рассчитанному путем численного решения уравнения Гельмгольца с погрешностью, не превышающей сотых долей процента. Получены аналитические выражения для расчета погрешности приближенного решения для поля в пленке, позволяющие оценить его применимость для конкретных значений частоты, толщины пленки и используемого металла. В частности, оценки показывают, что приближение хорошо работает до частот терагерцового диапазона. Несомненным достоинством метода является возможность вычисления удельной проводимости пленки, усредненной по ее толщине по измеренным значениям оптических коэффициентов. Это дает возможность оценить качество получаемого проводящего ультратонкого покрытия и оперативно корректировать процесс его изготовления.

Приложение

Покажем, каким образом приближенные граничные условия (16), (17) выводятся из расчета поверхностного тока. Рассмотрим физическую систему, аналогичную той, что была рассмотрена в работе при выводе граничных условий (рис. П1). Пусть плоская монохроматическая электромагнитная волна с компонентами $\mathbf{E} = \{E_x(z), 0, 0\}$, $\mathbf{B} = \{0, B_y(z), 0\}$ падает нормально на плоскую границу раздела первой и второй сред.

При интегрировании уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t + \mathbf{j}$, вдоль контура 1-2-3-4-1, после использования теоремы Грина получается выражение:

$$aH_{y1} - aH_{y3} = \int_0^a \int_0^h (\partial D_x(z) / \partial t + j_x(z)) dz dy$$

$$= a \int_0^h (\partial D_x(z) / \partial t + j_x(z)) dz$$

или

$$H_{y3} - H_{y1} = - \int_0^h (\partial D_x(z) / \partial t + j_x(z)) dz.$$

Под знаком интеграла стоит величина, представляющая собой плотность полного тока, состоящего из плотности тока смещения $\partial D_x(z) / \partial t$ и плотности тока проводимости $j_x(z)$. При гармонической зависимости

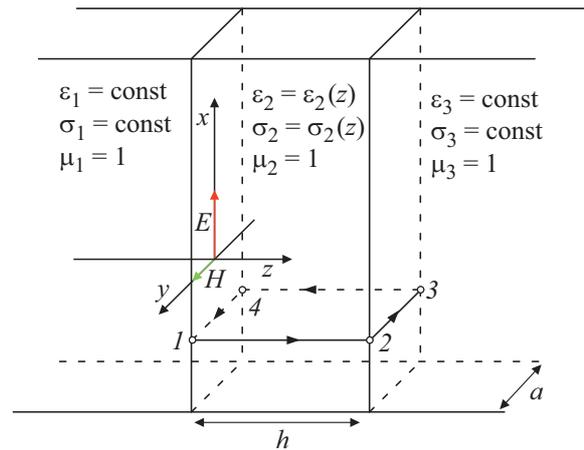


Рис. П1. К выводу приближенных граничных условий из расчета поверхностного тока.

всех величин от времени $\partial D_x(z) / \partial t = -i\omega \varepsilon(z) E_x(z)$, $j_x(z) = \sigma(z) E_x(z)$ в итоге получаем соотношение

$$H_{y3} - H_{y1} = \int_0^h i\omega E_x(z) \hat{\varepsilon}(z) dz, \quad (\text{П1})$$

где $\hat{\varepsilon}(z) = \varepsilon(z) + i\sigma(z) / \omega$. Из уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ находится связь между $E_x(z)$ и $H_y(z)$:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ E_x(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_y \partial E_x(z) / \partial z =$$

$$- \mathbf{e}_y \mu_0 \partial H_y / \partial t = \mathbf{e}_y i\omega \mu_0 H_y.$$

Откуда следует, что $H_y = \frac{1}{i\omega \mu_0} \partial E_x(z) / \partial z$, таким образом, соотношение (П1), переписывается в виде

$$\frac{\partial E_{x3}}{\partial z} - \frac{\partial E_{x1}}{\partial z} = -\omega \mu_0 \int_0^h \omega E_x(z) \hat{\varepsilon}(z) dz. \quad (\text{П2})$$

Соотношение (П2) аналогично формуле (4). При использовании предположения о том, что электрическое поле вдоль пленки меняется слабо, получается приближенное граничное условие (17)

$$\frac{\partial E_{x3}(h)}{\partial z} - \frac{\partial E_{x1}(0)}{\partial z} = -E_x(0) \int_0^h k_2^2(z) dz,$$

$$k_2^2(z) = \mu_0 \hat{\varepsilon}(z) \omega^2.$$

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 18-29-02094 и № 20-07-00903.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] *Ciofi I., Contino A., Roussel P.J., Baert R., Vega-Gonzalez V.H., Croes K., Badaroglu M., Wilson C.J., Raghavan P., Mercha A., Verkest D., Groeseneken G.* // IEEE Transactions on Electron Devices. 2016. V. 63. N 6. P. 2488. doi 10.1109/ted.2016.2554561
- [2] *Schmitz J.* // Surface and Coatings Technology. 2018. V. 343. N 6. P. 83. doi 10.1016/j.surfcoat.2017.11.013
- [3] *Kaplan A.E.* // J. Optical Society of America B. 2018. V. 35. N 6. P. 1328. doi 10.1364/josab.35.001328
- [4] *Kaplan A.E., Zeldovich B.Y.* // Optics Lett. 2006. V. 31. N 3. P. 335. doi 10.1364/ol.31.000335
- [5] *Андреев В.Г., Вдовин В.А.* // ПТЭ. 2009. Т. 52. № 2. С. 81; *Andreev V.G., Vdovin V.A.* // Instruments and Experimental Techniques. 2009. V. 52. N 2. P. 226. doi 10.1134/s0020441209020171
- [6] *Andreev V.G., Kalynov Y.K., Vdovin V.A.* // IEEE Sensors J. 2014. V. 14. N 2. P. 578. doi 10.1109/jsen.2013.2286101
- [7] *Ding S.-Yu., You E.-M., Tian Zh.-Q., Moskovits M.* // Chem. Soc. Rev. 2017. V. 46. N 4. P. 4042. doi 10.1039/c7cs00238f
- [8] *Антонец И.В., Котов Л.Н., Голубев Е.А., Калинин Ю.Е., Ситников А.В.* // ЖТФ. 2017. Т. 87. № 2. С. 234. doi 10.21883/JTF.2017.02.44131.1885; *Antonets I.V., Kotov L.N., Golubev E.A., Kalinin Y.E., Sitnikov A.V.* // Technical Phys. 2017. V. 62. N 2. P. 261. doi 10.1134/s1063784217020025
- [9] *Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. № 5. С. 112; *Usanov D.A., Skripal A.V., Abramov A.V., Bogolyubov A.S.* // Technical Phys. 2006. V. 51. N 5. P. 644. doi 10.1134/S1063784206050173
- [10] *Вдовин В.А., Андреев В.Г., Глазунов П.С., Хорин И.А., Пинаев Ю.В.* // Опт. и спектр. 2019. Т. 127. № 5. С. 834. doi 10.21883/OS.2019.11.48524.132-19; *Vdovin V.A., Andreev V.G., Glazunov P.S., Khorin I.A., Pinaev Yu.V.* // Opt. Spectrosc. 2019. V. 127. N 5. P. 907. doi 10.1134/S0030400X19110274
- [11] *Андреев В.Г., Вдовин В.А., Воронов П.С.* // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. № 22. С. 68; *Andreev V.G., Vdovin V.A., Voronov P.S.* // Technical Phys. Lett. 2003. V. 29. N 11. P. 953–955. doi 10.1134/1.1631376
- [12] *Андреев В.Г., Ангелуц А.А., Вдовин В.А., Лукичев В.Ф., Шкуринов А.П.* // Радиотехн. и электрон. 2016. Т. 61. № 1. С. 66; *Andreev V.G., Angeluts A.A., Vdovin V.A., Lukichev V.F., Shkurinov A.P.* // J. Commun. Technology and Electronics. 2016. V. 61. N 1. P. 61–65. doi 10.1134/S1064226915120025
- [13] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973. 720 с.; *Born M., Wolf E.* Principles of Optics. Oxford, Pergamon, 1969. 808 p.
- [14] *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.; *Brekhovskikh L.M.* Wave in Layered Media. Academic Press, 1980. 520 p.
- [15] *Шукин А.Н.* Распространение радиоволн. М.: Связьиздат, 1940. 399 с.
- [16] *Рытов С.М.* // ЖТЭФ. 1940 Т. 10. № 2. С. 180; *Rytov S.M.* // JETP. 1940. V. 10. N 2. P. 180.
- [17] *Леонтович М.А.* Теоретическая физика: избранные труды. М.: Наука, 1985. 351 с.
- [18] *Гульельми А.В.* // УФН. 2010. Т. 190. № 1. С. 105. doi 10.3367/UFNr.0180.201001g.0105; *Guglielmi A.V.* // Physics-Uspekhi. 2010. V. 53. N 1. P. 99. doi 10.3367/ufne.0180.201001g.0105
- [19] *Альшиц В.И., Любимов В.Н.* // УФН. 2010. Т. 180. № 1. С. 106. doi 10.3367/UFNr.0180.201001h.0106; *Alshits V.I., Lyubimov V.N.* // Physics-Uspekhi. 2010. V. 53. N 1. doi 10.3367/UFNe.0180.201001h.0106
- [20] *Альшиц В.И., Любимов В.Н.* // УФН. 2009. Т. 179. № 8. С. 865; *Alshits V.I., Lyubimov V.N.* // Physics-Uspekhi. 2009. V. 52. N 8. P. 815.
- [21] *Конторович М.И., Черепанов А.С.* // Радиотехн. и электрон. 1985. Т. 30. № 8. С. 1543.
- [22] *Конторович М.И., Третьяков С.А.* // Радиотехн. и электрон. 1986. Т. 31. № 6. С. 1110.
- [23] *Oksanen M.I., Tretyakov S.A., Lindell I.V.* // J. Electromagnetic Waves and Applications. 1990. V. 4. N 7. P. 613.
- [24] *Халиуллин Д.Я., Третьяков С.А.* // Радиотехн. и электрон. 1998. Т. 43. № 1. С. 16.
- [25] *Senior T.B.A., Volakis J.L.* Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics. London: The Institution of Engineering and Technology, 1995. 363 p.
- [26] *Hoppe D.J., Rahmat-Samii Y.* Impedance Boundary Conditions in Electromagnetics. Washington, DC: Taylor and Francis, 1995. 176 p.
- [27] *Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И.* // Радиотехн. и электрон. 2007. Т. 52. №4. С. 403; *Antonets I.V., Kotov L.N., Shavrov V.G., Shcheglov V.I.* // J. Communications Technology and Electronics. 2007. V. 52. N 4. P. 379. doi 10.1134/s106422690704002x
- [28] *Семёнов В.А., Оскирко В.О., Работкин С.В., Оскомов К.В., Соловьев А.А., Степанов С.А.* // Изв. вузов. Физика. 2017. Т. 60. № 9. С. 88; *Semenov V.A., Oskirko V.O., Rabortkin S.V., Oskomov K.V., Solovyev A.A., Stepanov S.A.* // Russian Physics J. 2018. V. 60. N 9. P. 1559. doi 10.1007/s11182-018-1251-7
- [29] *Ramanandan G.K.P., Ramakrishnan G., Planken P.C.M.* // J. Appl. Phys. 2012. V. 111. N 12. P. 3517. doi 10.1063/1.4729808
- [30] *Gong J.B., Dong W.L., Dai R.C., Wang Z.P., Zhang Z.M., Ding Z.J.* // Chinese Physics B. 2014. V. 23. N 8. P. 087802. doi 10.1088/1674-1056/23/8/087802
- [31] *Ферми Э.* Лекции по квантовой механике. Ижевск: НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, 2000. 248 с.
- [32] *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [33] *Fusch K.* // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1938. V. 34. P. 100–108.