06

Дифракционный предел в теории световых пуль

© С.В. Сазонов

Национальный исследовательский центр „Курчатовский институт“,
123182 Москва, Россия
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
125993 Москва, Россия
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119991 Москва, Россия

e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

Поступила в редакцию 15.03.2020 г.
В окончательной редакции 15.05.2020 г.
Принято к публикации 20.05.2020 г.

На примерах распространения световых импульсов в средах с керровской и квадратичной нелинейностями развита усредненная вариационная процедура для исследования возможности формирования световых пуль в волноводах. Обсуждены критерии правильного выбора пробных решений. Условие, при котором дисперсионная длина значительно больше длины дифракционного расплывания, названо дифракционным пределом. Показано, что в этом пределе временная и пространственная динамики пули не зависят друг от друга, а нахождение динамических параметров солитона сводится к поиску различных решений нестационарного линейного уравнения Шредингера для воображаемой квантовой частицы. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на примере нахождения решений в виде оптических вихрей в волноводе для обоих типов нелинейности.

Ключевые слова: пространственно-временной солитон, световая пуля, оптический вихрь, самофокусировка, дисперсия, дифракция, волновод.

DOI: 10.21883/OS.2020.09.49868.96-20

Введение

Пространственно-временные солитоны или световые пули представляют собой распространяющиеся сгустки световой энергии, локализованные во всех направлениях [1,2]. При этом нелинейное самосжатие компенсируется дисперсионным и дифракционным уширениями. Заметим, что эти три физических эффекта необходимы, но недостаточны для формирования световых пуль. Хорошо известно, например, что фокусирующая керровская (кубическая) нелинейность в купе с дифракцией и аномальной дисперсией групповой скорости (ДГС) неспособна в однородной объемной среде сформировать световую пулю. Здесь необходимо наличие других типов нелинейности, например насыщающей [1].

Другую возможность для формирования пространственно-временного солитона способна преподнести линейная рефракция в неоднородной среде. Роль такой среды может играть градиентный волновод. В таком волноводе показатель преломления непрерывно изменяется от его центра к периферийным участкам. Таким образом, здесь к нелинейности, дисперсии и дифракции для формирования световой пули присоединяется еще и рефракция.

Световые пули могут использоваться в системах волоконно-оптической связи. Поэтому аналитические исследования формирования и распространения световых пуль в градиентных волноводах весьма желательны и актуальны.

Одним из аналитических подходов к исследованию формирования пространственно-временных солионов может служить метод, основанный на усредненном вариационном принципе [2–6]. Его еще называют методом усредненного лагранжиана (УЛ). Следует отметить, что этот метод успешно применялся для решения граничной задачи формирования и распространения временного солитона нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) в однородной среде [3]. Кроме того, метод УЛ был использован для учета влияния нелинейных длинноволновых поперечных возмущений на временные солитоны различных уравнений [4,6,7]. Перечисленные здесь исследования касались распространения солитонов в однородных средах в отсутствие рефракции.

В последнее время этот метод был развит и для исследования распространения световых пуль в градиентных волноводах. При этом рассматривались среды как с керровской [8], так и с квадратичной нелинейностью [9]. В последнем случае исследовались режимы генерации второй гармоники в планарном и объемном волноводах. Известно, что в отличие от сред с керровской нелинейностью в квадратично-нелинейных средах световые импульсы не испытывают необратимого коллапса [10].

Настоящая работа посвящена анализу распространения световых пуль в волноводах на основе метода УЛ. В качестве примеров будут рассмотрены пространственно-временные солитоны типа оптических вихрей в объемных волноводах с керровской и квадратичной нелинейностями.

Исходные уравнения и временные солитоны

Распространение оптического импульса вдоль оси волновода с керровской нелинейностью описывается уравнением

$$i\,\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + \alpha|\psi|^2\psi - q\psi + \frac{c}{2n\omega}\,\Delta_\perp\psi, \qquad (1)$$

где ψ — огибающая электрического поля импульса, ω — его несущая частота, $\tau = t - z/v_g$, t — время, v_g — линейная групповая скорость, $\beta = \partial v_g^{-1}/\partial\omega$ — параметр ДГС, c — скорость света в вакууме, $\Delta_\perp$ — поперечный лапласиан, $n = \sqrt{1+4\pi\chi_0}$ и χ_0 — линейный показатель преломления или линейная восприимчивость среды на центральной оси волновода соответственно; коэффициент $q(\mathbf{r})$ определяет линейную рефракцию волновода:

$$q(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{2c}\,\frac{n^2-1}{n}\,f(\mathbf{r}), \qquad (2)$$

$\mathbf{r}$ — поперечный радиус-вектор, берущий свое начало на центральной оси волновода, $f(\mathbf{r})$ — безразмерная функция, характеризующая поперечное распределение в волново-делинейной восприимчивости: $\chi(\mathbf{r}) = \chi_0[1 - f(\mathbf{r})]$, $f(0) = 0$; α — коэффициент керровской нелинейности, определяемый соотношением $\alpha = \omega n_2/(2\pi n)$, n_2 — нелинейный показатель преломления, определяемый через показатель преломления n_Σ, зависящий от интенсивности импульса I:

$$n_\Sigma = n + n_2 I.$$

В свою очередь система уравнений, описывающая генерацию второй гармоники в градиентном волноводе, имеет вид

$$i\,\frac{\partial\psi_1}{\partial z} = -\frac{\beta_1}{2}\,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\tau^2} + \alpha_1\psi_1^*\psi_2 - q_1\psi_1 + \frac{c}{2n\omega}\,\Delta_\perp\psi_1, \qquad (3)$$

$$i\,\frac{\partial\psi_2}{\partial z} = -\frac{\beta_2}{2}\,\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\tau^2} + \alpha_1\psi_1^2 - 2q_2\psi_2 + \frac{c}{4n\omega}\,\Delta_\perp\psi_2. \qquad (4)$$

Здесь α_1 и α_2 — коэффициенты квадратичной нелинейности, определяемые через нелинейные восприимчивости χ_1 и χ_2 на частотах первой и второй гармоник соответственно с помощью выражений $\alpha_1 = 2\pi\omega\chi_1^{(2)}/cn$, $\alpha_2 = 2\pi\omega\chi_2^{(2)}/cn$. Смысл остальных обозначений в (1) и (2) такой же, как в уравнении (1). При этом нижние индексы 1 и 2 относятся к первой и второй гармоникам соответственно.

При записи (3) и (4) сделано предположение, что выполнены условия фазового и группового синхронизмов.

В однородной среде ($q = q_1 = q_2 = 0$) уравнение (1) и система (3), (4) имеют решения в виде одномерных ($\Delta_\perp\psi = \Delta_\perp\psi_1 = \Delta_\perp\psi_2 = 0$) временных керровского и двухчастотного параметрического солитонов [1,7]:

$$\psi = \frac{1}{\tau_p}\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\,e^{i\frac{\beta z}{2\tau_p^2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right), \qquad (5)$$

$$\psi_1 = \frac{3\beta}{2\sqrt{2\alpha_1\alpha_2}\,\tau_p^2}\,e^{i\frac{\beta z}{2\tau_p^2}}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\tau}{2\tau_p}\right),$$

$$\psi_2 = \frac{3\beta}{4\alpha_1\tau_p^2}\,e^{i\frac{\beta z}{2\tau_p^2}}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\tau}{2\tau_p}\right), \qquad (6)$$

где τ_p — свободный параметр, имеющий смысл временной длительности импульсов.

При получении решения (6) сделано предположение, что $\beta_2 = 2\beta_1 = 2\beta$ [7]. Мы вернемся к выражениям (5) и (6) в следующем разделе при нахождении приближенных решений уравнения (1) и системы (2), (3) в виде пространственно-временных солитонов.

Метод УЛ и выбор пробных решений

Будем искать приближенные решения уравнений (1) и (2), (3), отталкиваясь от точных одномерных решений (5) и (6). Заметим вначале, что плотности лагранжианов L_S и L_P, соответствующие уравнению (1) и системе (3), (4), имеют вид

$$L_S = \frac{i}{2}\left(\psi^*\,\frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial z}\right) - \frac{\beta}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right|^2 - \frac{\alpha}{2}\,|\psi|^4 + q|\psi|^2 + \frac{c}{2n\omega}\,|\nabla_\perp\psi|^2, \qquad (7)$$

$$L_P = L_1 + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\,L_2 + L_{\mathrm{int}}, \qquad (8)$$

$$L_1 = \frac{i}{2}\left(\psi_1^*\,\frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \psi_1\,\frac{\partial\psi_1^*}{\partial z}\right) - \frac{\beta_1}{2}\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial\tau}\right|^2 + q_1|\psi_1|^2 + \frac{c}{2n\omega}\,|\nabla_\perp\psi_1|^2, \qquad (9)$$

$$L_2 = \frac{i}{2}\left(\psi_2^*\,\frac{\partial\psi_2}{\partial z} - \psi_2\,\frac{\partial\psi_2^*}{\partial z}\right) - \frac{\beta_2}{2}\left|\frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}\right|^2 + 2q_2|\psi_2|^2 + \frac{c}{4n\omega}\,|\nabla_\perp\psi_2|^2, \qquad (10)$$

$$L_{\mathrm{int}} = -\frac{\alpha_1}{2}\,(\psi_1^{*2}\psi_2 + \psi_1^2\psi_2^*). \qquad (11)$$

Согласно методу УЛ, теперь необходимо выбрать пробные решения, описывающие световые пули. Для этого вернемся к одномерным локализованным решениям (5) и (6). Локализацию импульсов в поперечных к оси z направлениях может обеспечить соответствующая зависимость амплитуд солитонов от $\mathbf{r}$. Из (5) и (6) видно, что этого можно добиться, предположив зависимость параметра τ_p от поперечных координат. Причем данный параметр должен увеличиваться с удалением от центров поперечных сечений солитонов к периферии. Здесь возникает закономерный вопрос: зависит ли от поперечных координат параметр τ_p, стоящий в (5) и (6) под знаками гиперболических секансов? Для ответа на данный вопрос рассмотрим два случая. В соответствии с этим примем два вида пробных решений:

$$\psi = \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\,\mu e^{i\Phi}\operatorname{sech}\left(\frac{\tau}{\tau_p}\right), \tag{12}$$

$$\psi_1 = \frac{3\beta}{2\sqrt{2\alpha_1\alpha_2}}\,\mu^2 e^{i\Phi}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\tau}{2\tau_p}\right),$$
$$\psi_2 = -\frac{3\beta}{4\alpha_1}\,\mu^2 e^{2i\Phi}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\tau}{2\tau_p}\right) \tag{13}$$

и

$$\psi = \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\,\mu e^{i\Phi}\operatorname{sech}(\mu\tau_p), \tag{14}$$

$$\psi_1 = \frac{3\beta}{2\sqrt{2\alpha_1\alpha_2}}\,\mu^2 e^{i\Phi}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\mu\tau}{2}\right),$$
$$\psi_2 = -\frac{3\beta}{4\alpha_1}\,\mu^2 e^{2i\Phi}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\mu\tau}{2}\right). \tag{15}$$

Здесь μ и Φ — неизвестные функции координат $\mathbf{r}$ и z.

В (12) и (13) замена $1/\tau_p \to \mu$ совершена только в амплитудах перед гиперболическими секансами, а под их знаками параметр τ_p (временная длительность) считается постоянным. В (14) и (15) замена $1/\tau_p \to \mu$ совершена в обоих местах. Тем самым предполагается, что не только амплитуды, но и длительности солитонов зависят от поперечных координат.

Назовем (12) и (13) пробными решениями I типа, а (14) и (15) — пробными решениями II типа.

Подставляя (12) и (14) в (7), а (13) и (15) в (8)–(11), получим соответственно лагранжианы L_S^{I}, L_S^{II}, L_P^{I} и L_P^{II}. После интегрирования полученных лагранжианов по „быстрой“ переменной τ придем к усредненным лагранжианам

$$\Lambda_S^{\mathrm{I}} \equiv \frac{\alpha}{2\beta\tau_p}\int_{-\infty}^{+\infty} L_S^{\mathrm{I}} d\tau = \mu^2\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\beta}{6\tau_p^2}\mu^2 - \frac{\beta}{3}\mu^4 + q\mu^4$$
$$- \frac{c}{2n\omega}\left[\mu^2(\nabla_\perp\Phi)^2 + (\nabla_\perp\mu)^2\right], \tag{16}$$

$$\Lambda_S^{\mathrm{II}} \equiv \frac{\alpha}{2\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} L_S^{\mathrm{II}} d\tau = \mu\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\beta}{3}\mu^3 + q\mu$$
$$- \frac{c}{2n\omega}\left[\mu(\nabla_\perp\Phi)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{12}+1\right)\frac{(\nabla_\perp\mu)^2}{\mu}\right], \tag{17}$$

$$\Lambda_P^{\mathrm{I}} \equiv \frac{16\alpha_1\alpha_2}{9\beta^2\tau_p}\int_{-\infty}^{+\infty} L_P^{\mathrm{I}} d\tau = \mu^4\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\beta}{10\tau_p^2}\mu^4 + \frac{2\beta}{5}\mu^6$$
$$+ \frac{2}{3}(2q_1+q_2)\mu^4 + \frac{c}{2n\omega}\left[\mu(\nabla_\perp\Phi)^2 + 3\mu^2(\nabla_\perp\Phi)^2\right], \tag{18}$$

$$\Lambda_P^{\mathrm{II}} \equiv \frac{16\alpha_1\alpha_2}{9\beta^2}\int_{-\infty}^{+\infty} L_P^{\mathrm{II}} d\tau = -\mu^3\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{3\beta}{10}\mu^5$$
$$+ \frac{2}{3}(2q_1+q_2)\mu^3 + \frac{c}{2n\omega}\Bigg[\mu^3(\nabla_\perp\Phi)^2$$
$$+ 3\left(\frac{\pi^2}{30}+1\right)\mu(\nabla_\perp\mu)^2\Bigg]. \tag{19}$$

Используя каждый из четырех УЛ, запишем уравнения Эйлера–Лагранжа для переменных Φ и μ:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial(\partial\Phi)/\partial z} + \nabla_\perp\frac{\partial\Lambda}{\partial(\nabla_\perp\Phi)} = 0,$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\rho} - \nabla_\perp\frac{\partial\Lambda}{\partial(\nabla_\perp\rho)} = 0.$$

Как результат, во всех четырех случаях придем к системе вида

$$\frac{\partial\rho}{\partial z} + \nabla_\perp(\rho\nabla_\perp\varphi) = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp\varphi)^2}{2} + \frac{c\beta}{n\omega}F(\rho) + \frac{c}{n\omega}q = 2g^2\frac{\Delta_\perp\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \tag{21}$$

Здесь

$$g = \sigma\frac{c}{n\omega}, \quad \varphi = -\frac{c}{n\omega}\Phi, \tag{22}$$

а безразмерная постоянная σ, переменная ρ и функция $F(\rho)$ для пробных решений I типа (12), (13) и II типа (14) и (15) равны соответственно

$$\sigma = \frac{1}{2}, \quad \rho = \mu^2, \quad F(\rho) = \frac{1}{6}\left(4\rho - \frac{1}{\tau_p^2}\right), \tag{23}$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{10}} \approx 0.418, \quad \rho = \mu^4,$$
$$F(\rho) = \frac{1}{10}\left(6\sqrt{\rho} - \frac{1}{\tau_p^2}\right), \tag{24}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{\pi^2}{12}+1\right)} \approx 0.779, \quad \rho = \mu,$$
$$F(\rho) = \frac{\rho^2}{2}, \tag{25}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi^2}{30}+1\right)} \approx 0.471, \quad \rho = \mu^3,$$
$$F(\rho) = \frac{\rho^{2/3}}{2}. \tag{26}$$

При этом в случаях (24) и (26) $q = (2q_1+q_2)/3$.

В одномерном случае ($q = \nabla_\perp = \Delta_\perp = 0$) из (20) и (21) имеем $\rho = \mathrm{const}$, $\varphi = -c\beta F(\rho)z/n\omega$. Учитывая в каждом из четырех случаев выражения (23)–(26) для ρ и $F(\rho)$ при $\mu = 1/\tau_p$, а также второе соотношение (22), будем иметь $\Phi = \beta z/2\tau_p^2$. Таким образом, приходим к точному совпадению всех пробных решений (12)–(15) с одномерными временными солитонами (5) и (6). Данное обстоятельство является хорошим аргументом в пользу используемого здесь метода УЛ.

Система (20), (21) формально схожа с уравнениями, описывающими двумерное течение квантовой бозе-жидкости во внешнем поле с плотностью потенциальной энергии, равной cq/n. Роль времени здесь играет координата z, а роли плотности воображаемой жидкости и потенциала ее гидродинамической скорости принадлежат соответственно переменным ρ и φ.

Нетрудно видеть, что система (20), (21) эквивалент на модифицированному уравнению Гросса–Питаевского (ГП)

$$i\,\frac{\partial Q}{\partial z} = -g\Delta_\perp Q + \frac{\beta}{2\sigma}\,F\left(|Q|^2\right)Q + \frac{q}{2\sigma}\,Q, \tag{27}$$

где комплексная функция координат Q связана с ρ и φ соотношением

$$Q = \sqrt{\rho}\exp\left(i\,\frac{\varphi}{2g}\right) = \sqrt{\rho}\exp\left(-i\,\frac{\Phi}{2\sigma}\right). \tag{28}$$

Сравнивая (28) с (12)–(15), видим, что фазы комплексных функций ψ, ψ_1, ψ_2, с одной стороны, и Q, с другой, отличаются множителем $-1/2\sigma$. Функции ψ, ψ_1 и Q должны быть периодическими функциями азимутального угла ϕ с периодом 2π. Период функции ψ_2 при этом равен π. Простейшей формой зависимости Φ от ϕ, удовлетворяющей данному условию периодичности, является следующая: $\Phi = m\phi$, где m — целое число. В этом случае и функция Q должна удовлетворять обсуждаемому условию периодичности. Из (28) следует, что это возможно, если $\sigma = 1/2,\ 1/4,\ 1/6.\ldots$. Значения параметра σ, приведенные в (23)–(26), ближе всего из данного ряда к 1/2. Наиболее близки к этой величине значения σ, определяемые (23) и (26), которые соответствуют пробным решениям (12) и (15). Руководствуясь условием периодичности, из четырех пробных решений выберем только (12) и (15). Таким образом, для исследования распространения в волноводе керровского солитона, описываемого уравнением (1), примем пробное решение I типа (12). В то же время для описания импульсного режима генерации второй гармоники в волноводе (см. систему (3), (4)) лучше подходят пробные решения II типа (15). Учитывая относительную грубость метода УЛ, будем полагать в обоих случаях $\sigma = 1/2$. Тогда в случае уравнения (1) и соответствующего пробного решения (12) уравнение (27) запишется следующим образом:

$$i\,\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{c}{2n\omega}\,\Delta_\perp Q + \frac{2}{3}\,\beta|Q|^2 Q + \left(q(\mathbf{r}) - \frac{\beta}{6\tau_p^2}\right)Q. \tag{29}$$

В случае же системы (3), (4) и пробного решения (15) уравнение (27) принимает вид

$$i\,\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{c}{2n\omega}\,\Delta_\perp Q + \frac{\beta}{2}\,|Q|^{4/3}Q + q(\mathbf{r})Q. \tag{30}$$

В результате исследование в обоих случаях свелось к нахождению различных устойчивых локализованных решений модифицированных уравнений ГП (29) и (30). Заметим, что уравнение (29) в отличие от (30) обладает кубической нелинейностью, как и уравнение ГП [11].

Дифракционный предел и локализованные оптические вихри

К настоящему времени накоплен немалый опыт решения уравнения ГП для бозе-конденсата во внешних ловушках [11]. В уравнениях (29) и (30) формальную роль таких ловушек играет пространственно-неоднородное распределение показателя преломления в волноводе, представленное функцией поперечных координат $q(\mathbf{r})$. Мы здесь, однако, предложим другой подход, используя введенный ниже малый параметр.

Из (12), (15), (23), (26) и (28) следует, что в случае (29) $|Q|^2 = \rho = \mu^2 \sim \tau_p^{-2}$, а в случае (30) $|Q|^{4/3} = \rho^{2/3} = \mu^2 \sim \tau_p^{-2}$. Введем дисперсионную l_d и дифракционную l_D длины согласно выражениям

$$l_d = \frac{2\tau_p^2}{|\beta|}, \quad l_D = \frac{n\omega}{c}\,R_0^2, \tag{31}$$

где R_0 — характерное значение равновесного поперечного значения (апертуры) светового импульса.

Тогда легко видеть, что в обоих случаях отношение нелинейных слагаемых в (29) и (30) к первым слагаемым в правых частях этих уравнений порядка l_D/l_d.

В оптоволокне из кварцевого стекла при длине волны $\lambda = 2\pi c/\omega \sim 1\,\mu$m имеем $|\beta| \sim 10^{-28}\,\mathrm{s^2/cm}$ [12]. Тогда для длительности импульса $\tau_p \sim 1\,\mathrm{ps}$ находим $l_d \sim 10^4\,\mathrm{cm}$. При этом продольный размер импульса $l_\parallel \sim c\tau_p \sim 0.1\,\mathrm{mm}$. Полагая, что апертура импульса R_0 по порядку величины совпадает с $l_\parallel$, получим $l_D \sim 10\,\mathrm{cm}$. Таким образом $l_D/l_d \sim 10^{-3} \ll 1$. Будем считать, что и в случае с генерацией второй гармоники справедливо это же неравенство. Ниже условие

$$\frac{l_D}{l_d} \ll 1 \tag{32}$$

будем называть дифракционным пределом. В этом пределе дифракционное уширение импульса происходит значительно быстрее, чем дисперсионное расплывание. Следовательно, роль волновода в поперечной локализации импульса становится определяющей.

В случае среды с керровской нелинейностью условие (32) идентично тому, что мощность светового импульса значительно ниже пороговой мощности, выше которой происходит необратимая самофокусировка.

При выполнении условия (32) в уравнениях (29) и (30) можно пренебречь нелинейными слагаемыми. Тогда в обоих случаях имеем

$$i\,\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{c}{2n\omega}\,\Delta_\perp Q + U(\mathbf{r})Q, \tag{33}$$

где

$$U(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}) - \frac{\beta}{6\tau_p^2} \tag{34a}$$

для уравнения (29) и

$$U(\mathbf{r}) = q(\mathbf{r}) \tag{34b}$$

для уравнения (30).

Уравнение (33) формально совпадает с нестационарным уравнением Шредингера, хорошо известным из квантовой механики.

Пусть профиль линейной восприимчивости волновода является аксиально-симметричным параболоидом: $\chi(\mathbf{r}) = \chi_0(1 - r^2/a^2)$, где a — поперечный радиус волновода. Тогда $f(r) = r^2/a^2$. Следовательно (см. (2)),

$$q(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{2c}\frac{n^2-1}{n}\frac{r^2}{a^2}. \tag{35}$$

В этом случае, как видно из (34a), (34b) и (35), уравнение (33) формально описывает нестационарное движение двумерного квантового гармонического осциллятора.

Используя анализ пробных решений, проведенный в предыдущем разделе, используем цилиндрическую систему координат и будем искать решение уравнения (33) в виде

$$Q(r, \phi, z) = G(r)e^{-i\gamma z}e^{im\phi}, \tag{36}$$

где γ — постоянная, подлежащая определению, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Такой вид решения соответствует оптическим вихрям [1].

В результате придем к задаче на собственные значения

$$\frac{d^2G}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dG}{dr} - \frac{m^2}{r^2}G - \kappa r^2 G = -\varepsilon G, \tag{37}$$

где $G(r) \to 0$ при $r \to \infty$,

$$\kappa = \left(\frac{\omega}{ca}\right)^2 (n^2 - 1), \tag{38}$$

а собственное значение ε для уравнений (29) и (30) определяется соответственно выражениями

$$\varepsilon = \frac{2n\omega}{c}\left(\gamma + \frac{\beta}{6\tau_p^2}\right), \quad \varepsilon = \frac{2n\omega}{c}\gamma. \tag{39}$$

Локализованные собственные функции имеют вид

$$G = G_0\left(\frac{r}{R_0}\right)^m L_l^m\left(\frac{r}{R_0}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{2R_0^2}\right), \tag{40}$$

где G_0 — некоторая постоянная,

$$R_0 = \frac{\sqrt{a\lambda/2\pi}}{(n^2-1)^{1/4}} \approx 0.40\frac{\sqrt{a\lambda}}{(n^2-1)^{1/4}}, \tag{41}$$

$L_l^m(\xi)$ — полиномы Лагерра [13], $l = 0, 1, 2, \ldots$.

При этом параметр γ, введенный в (36) и выражаемый через собственные значения ε (см. (39)), для керровского солитона (12) и параметрического двухчастотного солитона (15) определяется соответственно выражениями

$$\gamma = \frac{\sqrt{n^2-1}}{na}(2l+1) - \frac{\beta}{6\tau_p^2}, \tag{42}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{n^2-1}}{na}(2l+1). \tag{43}$$

Из (40), (36), (28) и (23) для керровского солитона (12) имеем

$$\mu = \frac{1}{\tau_p}\left(\frac{r}{R_0}\right)^m L_l^m\left(\frac{r}{R_0}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{2R_0^2}\right). \tag{44}$$

Аналогично из (40), (36), (28) и (26) для двухчастотного солитона (15) находим

$$\mu = \frac{1}{\tau_p}\left(\frac{r}{R_0}\right)^{2m/3}\left[L_l^m\left(\frac{r}{R_0}\right)\right]^{2/3}\exp\left(-\frac{r^2}{3R_0^2}\right). \tag{45}$$

Фаза Φ обоих случаях имеет вид

$$\Phi = \gamma z - m\phi. \tag{46}$$

Взяв топологический заряд вихря $m = 1$, для основной солитонной моды волновода ($l = 0$) будем иметь для солитонов (12) и (15) соответственно

$$\mu = \frac{1}{\tau_p}\frac{r}{R_0}\exp\left(-\frac{r^2}{2R_0^2}\right), \tag{44a}$$

$$\mu = \frac{1}{\tau_p}\left(\frac{r}{R_0}\right)^{2/3}\exp\left(-\frac{r^2}{3R_0^2}\right). \tag{44b}$$

Выражения (12), (44a), (46) и (42) при $l = 0$ описывают распространение в волноводе локализованного керровского оптического вихря с топологическим зарядом $m = 1$. В то же время выражения (15), (44b), (46) и (43) соответствуют распространению в волноводе двухчастотного оптического вихря в режиме генерации второй гармоники. При этом топологический заряд вихря на основной частоте равен единице, а на второй гармонике — двум.

Из (12) и (44a) видно, что интенсивность фундаментального оптического вихря вблизи его оси ($r/R_0 \ll 1$) ведет себя как $I \sim |\psi|^2 \sim r^2$. В то же время из (15) и (45b) для аналогичных интенсивностей компонент солитона первой и второй гармоник имеем $I_{1,2} \sim |\psi_{1,2}|^2 \sim r^{8/3}$. Вдали от оси ($r/R_0 \gg 1$) интенсивности обоих вихрей экспоненциально уменьшаются. При этом временная длительность фундаментального вихря остается постоянной, а длительность двухчастотного вихря вблизи оси уменьшается как $\sim r^{-2/3}$, а вдали от оси увеличивается по закону $\sim \exp(-r^2/3R_0^2)$.

Устойчивость рассмотренных выше вихрей по отношению к отклонению значений их апертуры от равновесного значения R_0 можно исследовать с помощью подхода, использованного в [6–9,14]. Для этого используем решения (47), (44a) и (44b), заменив в (44a) и (44b) R_0 на $R = R(z)$, и вернемся к системе (20), (21). Из (23), (26), (44a) и (44b) следует, что для обоих типов вихрей можно записать автомодельные решения системы (20), (21)

$$\rho \sim \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left(\frac{r}{R_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right),$$

$$\varphi = F(z) + \frac{r^2}{2}\frac{R'}{R} - \frac{c}{n\omega} m\phi. \qquad (47)$$

Здесь штрих обозначает производную по z.

Как видно из второго выражения (47), динамический параметр R'/R имеет смысл кривизны солитонных волновых фронтов.

Нетрудно видеть, что соотношения (47) в точности удовлетворяют уравнению (20). Подставляя (47) в (21) при $\beta = 0$ и приравнивая в левой и правой частях выражения при r^0 и r^2, получим уравнения для $F(z)$ и $R(z)$:

$$F' = -\frac{8g^2}{R^2}, \quad R'' = -\omega_s^2\left(R - \frac{R_0^4}{R^3}\right), \qquad (48)$$

где

$$\omega_s = \frac{\sqrt{n^2-1}}{na}. \qquad (49)$$

Второе уравнение (48) представляет собой уравнение негармонического изохронного осциллятора [15] и имеет решение вида

$$R = R_m\sqrt{1 - \left(1 - \frac{R_0^4}{R_m^4}\right)\sin^2\omega_s z}, \qquad (50)$$

где R_m — экстремальное значение апертуры вихря.

Таким образом, отклонение апертуры вихря от его равновесного значения приводит к устойчивым осцилляциям апертуры относительно этого значения. При этом данное отклонение не обязательно должно быть малым.

Колебания апертуры керровского оптического вихря около равновесного значения сопровождаются колебаниями его фазовой скорости, кривизны волновых фронтов, временной длительности и амплитуды (см. (48), (47), (23) и (12)). При этом временная длительность керровского пространственно-временного солитона не изменяется. Сокращение же поперечного размера двухчастотного солитона в квадратично-нелинейном волноводе сопровождается его временным сжатием (см. (48), (47), (26) и (15)). Такое динамическое различие следует из вида пробных решений (12) и (15).

Понимая важность вопроса устойчивости рассмотренных вихрей относительно азимутальных возмущений, мы выносим этот вопрос за рамки настоящей работы. Этот вопрос требует отдельного исследования.

Важно заметить, что солитоноподобные оптические вихри ранее исследовались во многих работах. При этом рассматривались как керровские среды [16], так и среды с квадратичной нелинейностью [16,17]. Исследовалось формирование оптических вихрей как в однородных средах, так и в волноводах с квадратичной нелинейностью. Показана возможность локализации вихрей в квадратично-нелинейных волноводах при аномальной ($\beta < 0$) [18] и нормальной и аномальной ($\beta > 0$) [19] ДГС. В этой связи заметим, что в дифракционном пределе формирование световых пуль в волноводе не чувствительно к знаку ДГС. То есть при выполнении условия (32) можно единым образом рассмотреть оба случая. Это говорит о том, что в данном пределе роли дисперсии и дифракции строго разделены: дисперсия компенсирует нелинейное самосжатие импульса вдоль направления его распространения, а дифракция — в поперечных направлениях. При этом не происходит нелинейного перепутывания данных эффектов, как это имеет место при нарушении дифракционного предела [8].

Заключение

В настоящей работе предложен оригинальный подход для описания распространения широкого класса световых пуль в градиентных световодах. Подход основан на хорошо известном методе УЛ. Оригинальность заключается в двух ключевых пунктах. Первый пункт состоит в том, что предложен критерий выбора пробного решения. Здесь важно, что в одномерном случае решения уравнений для солитонных параметров в точности соответствуют временным солитонам исходных нелинейных уравнений. Также при выборе пробного решения важно выполнение условия периодичности мнимых экспонент данного решения по отношению к азимутальному углу. Данное условие позволяет отфильтровать среди различных пробных решений те, которые наиболее близко соответствуют действительности. Второй пункт оригинальности заключается в использовании дифракционного предела (32). В этом пределе эффективно разделяются роли дисперсии и дифракции по отношению к нелинейности: дисперсия препятствует продольному нелинейному самосжатию импульса, а дифракция — поперечному самосжатию. При этом не происходит нелинейного перемешивания данных эффектов. Как результат, исследование сводится к нахождению различных решений уравнения (33), формально совпадающего с уравнением Шредингера для движения квантового объекта во внешнем потенциальном поле. Роль потенциала при этом играет часть показателя преломления волновода, зависящая от его поперечных координат. Известно много различных „потенциалов“ $U(\mathbf{r})$, для которых уравнение (33) имеет точные решения [20]. Это позволяет исследовать распространение самых разнообразных световых пуль. В настоящей работе рассмотрены решения в виде локализованных во всех направлениях оптических вихрей. При этом рассмотрены вихри в волноводах с керровской и квадратичной нелинейностями.

Данный единый подход может быть использован для исследования распространения световых пуль и в других режимах. Так, исследованные в [8] „танцующие“ световые пули в дифракционном пределе соответствуют когерентному нестационарному состоянию двумерного квантового осциллятора, описываемому уравнением (33). Выбрав, например, потенциал $U(\mathbf{r})$ в виде периодической функции, можно с помощью предложенного здесь подхода в дифракционном пределе описать распространение световых пуль в системе туннельно-связанных параллельных волноводов [21,22].

Если не ограничиваться приближением дифракционного предела, то исследование сведется к поиску вихревых решений уравнений (29) и (30). Как следствие, предстоит решение нелинейной задачи на собственные значения. В этом случае левая часть уравнения (37) дополнится нелинейными слагаемыми. Данное обстоятельство значительно усложнит исследование.

Очень важным остается вопрос об устойчивости полученных здесь аналитических решений. В значительной степени этот вопрос касается способов подавления азимутальной неустойчивости.

Отметим, что предложенный подход позволяет свести исследование к уравнению (33) только для квазимонохроматических солитонов огибающей. В случае очень коротких импульсов, содержащих до одного периода световых колебаний, такой подход пока не привел к зримым результатам.

Представляется весьма полезным в ближайшем будущем дополнить проведенные здесь аналитические исследования численными экспериментами.

Благодарности

Благодарю А.И. Маймистова и В.А. Халяпина, неоднократно заострявших мое внимание на проблеме выбора пробных решений в методе УЛ.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01157).

Список литературы

[1] *Kivshar Yu.S., Agrawal G.P.* Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals. Academic Press, 2003; *Кившарь Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам. М.: Физматлит, 2005. 558 с.
[2] *Kartashov Ya.V., Astrakharchik G.E., Malomed B.A., Torner L.* // Nature Review / Physics. 2019. V. 1. P. 185.
[3] *Anderson D.* // Phys. Rev. A. 1983. V. 27. P. 3135.
[4] *Жданов С.К., Трубников Б.А.* // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. С. 1612; *Zhdanov S.K., Trubnikov B.A.* // Sov. Phys. JETP. 1987. V. 65. P. 904.
[5] *Anderson D., Desaix M., Lisak M., Quorida-Teixeiro M.L.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1992. V. 9. P. 1358.
[6] *Сазонов С.В.* // ЖЭТФ. 2006. Т. 130. № 7(1). С. 145; *Sazonov S.V.* // JETP. 2006. V. 103. P. 126. doi 10.1134/S1063776106070144
[7] *Sazonov S. V., Mamaikin M.S., Komissarova M.V., Zakharova I.G.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. P. 022208. doi 10.1103/PhysRevE.96.022208
[8] *Sazonov S.V.* // Phys. Rev. A. 2019. V. 100. P. 043828. doi 10.1103/PhysRevA.100.043828
[9] *Sazonov S.V., Kalinovich A.A., Komissarova M.V., Zakharova I.G.* // Phys. Rev. A. 2019. V. 100. P. 033835. doi 10.1103/PhysRevA.100.033835
[10] *Kanashov A.A., Rubenchik A.M.* // Physica D. 1984. V. 4. P. 122.
[11] *Питаевский Л.П.* // УФН. 1998. Т. 168. № 6. С. 641; *Pitaevskii L.P.* // Phys. — Usp. 1998. V. 41. P. 569.
[12] *Agrawal G.P.* Nonlinear Fiber Optics. Boston: Academic Press, 1989; *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996. 328 с.
[13] *Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч.* Квантовая механика. М.: Наука, 1979. 528 с.
[14] *Ахманов С.А., Сухоруков А.П., Хохлов Р.В.* // УФН. 1967. Т. 93. № 9. С. 19; *Akhmanov S.A., Sukhorukov A.P., Khokhlov R.V.* // Sov. Phys. — Usp. 1968. V. 10. P. 609.
[15] *Pippard A.B.* The Physics of Vibration. The Simple Vibrator in Quantum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 1983; *Пиппард А.* Физика колебаний. Квантово-механические системы. М.: Высшая школа, 1989. 264 с.
[16] *Skryabin D.V., Firth W.J.* // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. 3916.
[17] *Torres J.P., Soto-Crespo J.M., Torner L., Petrov D.V.* // JOSA B. 1998. V. 15. P. 625.
[18] *Sakaguchi H., Malomed B.A.* // Opt. Express. 2013. V. 21. P. 9813.
[19] *Kalinovich A.A., Komissarova M.V., Zakharova I.G., Zagursky D.Yu.* // Proc. SPIE. 2019. V. 11026. P. 110260M. doi 10.1117/12.2520747
[20] *Flügge S.* Practical Quantum Mechanics. V. 1. Berlin: Springer-Verlag, 1971; *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. 1. М.: Мир, 1974. 342 с.
[21] *Leblond H., Mihalache D., Kellou A.* // Phys. Rev. A. 2016. V. 94. P. 063836.
[22] *Leblond H., Mihalache D.* // J. Phys. A: Math. Theor. 2018. V. 51. P. 435202.