03

Квазиоптическое уравнение в среде со слабой диссипацией

© Н.Н. Розанов[1,2]

[1] ФТИ им. А.Ф. Иоффе,
194021 Санкт-Петербург, Россия
[2] Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова,
199053 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: nnrosanov@mail.ru

Поступила в редакцию 02.02.2020 г.
В окончательной редакции 02.02.2020 г.
Принята к публикации 16.03.2020 г.

Проведен анализ вида квазиоптического уравнения для импульса монохроматического излучения, распространяющегося в однородной или одномерно неоднородной линейной среде с диссипацией. Для слоя неоднородной среды получены эффективные параметры эквивалентной однородной среды.

Ключевые слова: квазиоптическое приближение, диссипативные эффекты.

DOI: 10.21883/OS.2020.08.49710.69-20

Квазиоптическое приближение и уравнение были предложены около 75 лет тому назад [1,2] и затем прочно вошли не только в оригинальные статьи, но и в обзоры, учебники и монографии [3–8], охватывающие широкий круг оптических, радиофизических, акустических и других волновых процессов. Тем не менее эти вопросы до сих пор остаются актуальными ввиду большого разнообразия сред с существенно различающимися материальными соотношениями. Среди недавних публикаций отметим предложенный и использованный в [9,10] вариант квазиоптического уравнения для плавно неоднородных сред с пространственной дисперсией.

Квазиоптическое приближение применимо к квазимонохроматическому и квазиплосковолновому излучению. Основная идея приближения применительно к оптике состоит в представлении полной напряженности электрического поля в виде произведения медленно меняющейся огибающей (в масштабах обратной частоты и длины волны опорной, несущей составляющей) на быстро меняющийся фазовый множитель [1–10]. Однако, как показано в [11], для слоя среды с хотя бы слабым поглощением такой подход не позволяет учесть то простое обстоятельство, что волны, распространяющиеся нормально к границам слоя, обладают меньшим суммарным поглощением, чем наклонно распространяющиеся волны (угловая селективность поглощения). Это обстоятельство приводит к тому, что обычная дифракция в средах с поглощением дополняется своеобразной диффузией, что вызывает своеобразные явления дихроизма (понимаемого здесь как зависимость поглощения от направления распространения волны) [12,13]. Для широкоапертурных лазерных систем, в которых присутствует диссипация в виде и поглощения, и усиления, указанная угловая селективность потерь представляется принципиальным фактором. Особенно ярко ее влияние проявляется для топологических структур света, обладающих сингулярностями волнового фронта [8,14–16].

Настоящая заметка является обобщением и дополнением предыдущей работы [11]. Новыми моментами служат анализ импульсного режима и учет продольной неоднородности среды. Результаты можно также рассматривать как обоснование постановки задачи о топологических трехмерных солитонах [14–16].

Начнем рассмотрение со случая распространения импульсов и пучков излучения, близких к монохроматической плоской волне, в однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$, $|\varepsilon''| \ll \varepsilon'$. Здесь и далее один и два штриха обозначают вещественную и мнимую части; использовано спектральное представление, причем спектр частот ω со значимыми амплитудами поля сосредоточен в узкой области около несущей частоты ω_0, а неравенство означает малость коэффициентов поглощения или усиления.

Согласно квазиоптическому приближению [1,2], представим полную электрическую напряженность электромагнитного поля $\tilde{\mathbf{E}}$ в виде

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\exp[i(k_0 z - \omega_0 t)]\right\}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор, x, y, z — декартовы координаты, z — направление преимущественного распространения излучения, t — время, $k_0 = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega_0)}$ — отвечающее несущей частоте (комплексное) волновое число и $\mathbf{E}$ — медленно меняющаяся во времени и пространстве (в масштабах $2\pi/\omega_0$ и $2\pi/|k_0|$ соответственно) огибающая. В этих приближениях из исходных уравнений Максвелла вытекает следующий вид квазиоптического уравнения, описывающего распространение излучения в линейной изотропной среде (второе приближение теории дисперсии, см., например, [8]):

$$2ik_0\left(\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z}+\frac{1}{v_{\text{gr}}}\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t}\right)+\Delta_\perp \mathbf{E}_\perp - D_2\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\perp}{\partial t^2}=0. \quad (2)$$

Здесь

$$k(\omega)=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)},\quad \frac{1}{v_{\text{gr}}}=\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0},$$

$$D_2=\left(k\frac{d^2k}{d\omega^2}\right)_{\omega=\omega_0}. \quad (3)$$

Для прозрачной среды ($\varepsilon''=0$) эти величины вещественны, v_{gr} имеет смысл групповой скорости, а D_2 — коэффициент дисперсии второго порядка.

В первом приближении теории дисперсии уравнение (2) резко упрощается:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z}+\frac{1}{v_{\text{gr}}}\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t}=0. \quad (4)$$

Формально „уравнение переноса с комплексной скоростью" (4) решается заменой переменной $t\to\tau==t-\frac{1}{v_{\text{gr}}}z$:

$$\mathbf{E}_\perp=\mathbf{f}\left(t-\frac{1}{v_{\text{gr}}}z\right),\quad \mathbf{f}=\mathbf{E}_\perp(z=0,t). \quad (5)$$

Выберем, например, гауссов вид огибающей импульса, падающего на среду с просветленной границей при $z=0$:

$$\mathbf{f}(z=0,t)=\mathbf{A}\exp\left(-\frac{t^2}{T^2}\right),\quad \omega_0 T\gg 1. \quad (6)$$

Тогда

$$\mathbf{E}_\perp(z,t)=\mathbf{A}\exp\left(-\left(t-\frac{1}{v_{\text{gr}}}z\right)^2/T^2\right)$$

$$=\mathbf{A}\exp\left(-\left((t-u'z)^2+(u''z)^2+2iu''z(t-u'z)\right)^2/T^2\right). \quad (7)$$

В (7) введено обозначение $u=\frac{1}{v_{\text{gr}}}=u'+iu''$. Как видно из (7), максимум профиля интенсивности, находившийся в начальный момент при $z=0$, достигается при $z>0$ в момент времени $t=u'z$. Поэтому вещественную групповую скорость можно определить как $V_{\text{gr}}=u'^{-1}=(dk'/d\omega)^{-1}_{\omega_0}$. Также при фиксированном значении z при сдвиге времени на δt фаза излучения меняется на $\delta\Phi=2T^{-2}u''z\delta t$. Это отвечает сдвигу средней частоты импульса $\Delta\omega=2T^{-2}u''z$, пропорциональному z. Естественно, для справедливости квазиоптического приближения все поправочные члены должны оставаться много меньшими основных.

Обратимся теперь к полному квазиоптическому уравнению во втором порядке теории дисперсии (2). В „сопровождающей" системе координат оно принимает вид

$$2ik_0\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z}+\Delta_\perp \mathbf{E}_\perp - D_2\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\perp}{\partial \tau^2}=0. \quad (8)$$

Для монохроматического излучения получаем уравнение параксиальной дифракции

$$2ik_0\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z}+\Delta_\perp \mathbf{E}_\perp=0. \quad (9)$$

Решение этого уравнения имеет обычный вид

$$\mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}_\perp,z)=\frac{k_0}{2\pi iz}\iint \mathbf{E}_\perp(\mathbf{r}'_\perp,0)\exp\left[\frac{ik_0}{2z}(\mathbf{r}_\perp-\mathbf{r}'_\perp)^2\right]d\mathbf{r}'_\perp,$$

$$\mathbf{r}_\perp=(x,y). \quad (10)$$

Однако комплексность „волнового числа" k_0 придает среде свойства дихроизма, рассмотренного более детально в [12,13]. Напомним, что учет „эффективной диффузии" размывает дифракционные минимумы (интенсивность в них не достигает 0), а угловая расходимость излучения неограниченно убывает при увеличении длины пройденной трассы, что вызвано угловой селективностью поглощения. Если ввести „поперечную электрическую площадь" импульса $\mathbf{S}_\perp=\iint \mathbf{E}_\perp d\mathbf{r}_\perp$, то для нее из (9) для ограниченных пучков следует правило сохранения $\frac{d\mathbf{S}_\perp}{dz}=0$.

Если отвлечься от поперечных эффектов и рассмотреть распространение импульса в плосковолновом приближении, то оно описывается уравнением

$$2ik_0\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z}-D_2\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\perp}{\partial \tau^2}=0. \quad (11)$$

Решение такого уравнения и при комплексном k_0 с точностью до обозначений совпадает с решением для огибающей при поперечно одномерной дифракции (щелевые пучки). Для „электрической площади огибающей" $\mathbf{S}_e=\iint \mathbf{E}_\perp d\tau$ из (11) следует $d\mathbf{S}_e/dz=0$. Подчеркнем, что эта величина отличается от электрической площади импульса, в которой фигурирует не огибающая, а полная напряженность поля $\mathbf{S}_E=\iint \tilde{\mathbf{E}}dt$; последняя сохраняется в любых средах — линейных и нелинейных, изотропных и анизотропных, однородных и неоднородных [17–19]. В теории самоиндуцированной прозрачности для среды с нелинейным и существенно нестационарным откликом электрическая площадь огибающей не сохраняется [20].

Более общим является случай плавно (по сравнению с длиной волны, отвечающей несущей частоте) неоднородной среды. Локально распространение описывается прежними соотношениями. В случае слоисто неоднородной среды, комплексная диэлектрическая проницаемость ε которой зависит только от z, в режиме одностороннего распространения излучения вместо (1) следует записать

$$\tilde{\mathbf{E}}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}(\mathbf{r}_\perp,z,t)\exp\left[i\int_0^z k_0(z)dz-i\omega_0 t\right]\right\}. \quad (12)$$

Спектральное разложение поля на входе среды (при $z = 0$) запишем в виде

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\perp, z = 0, t) = \mathrm{Re}\Big\{\exp(i\omega_0 t)\sum_{\mathbf{k}_\perp,\nu}\mathbf{F}(\mathbf{k}_\perp,\nu) \times \exp(i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp - i\nu t)\Big\}. \quad (13)$$

Поперечный волновой вектор $\mathbf{k}_\perp$ и частотный сдвиг ν считаются вещественными. Мы можем разбить всю протяженность среды L на N слоев, в пределах которых изменение ε несущественно. Это эквивалентно представлению зависимости $k_0(z)$ кусочно-постоянной (ступенчатой) функцией. Тогда поле на выходе (при $z = L = \sum_{m=1}^{N} L_m$)

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_\perp, z = L, t) = \mathrm{Re}\left[\exp\left(i\sum_{m=1}^{N}k_{0,m}L_m - i\omega_0 t\right) \times E(\mathbf{r}_\perp, z = L, t)\right], \quad (14)$$

где огибающая E имеет вид

$$E(\mathbf{r}_\perp, z = L, t) = \sum_{\mathbf{k}_\perp,\nu}F(\mathbf{k}_\perp,\nu)\exp(i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp - i\nu t) \times \exp\left(i\nu\sum_{m=1}^{N}\frac{L_m}{v_{\mathrm{gr},m}} - i\mathbf{k}_\perp^2\sum_{m=1}^{N}\frac{L_m}{2k_{0,m}} + i\nu^2\sum_{m=1}^{N}\frac{D_{2,m}L_m}{2k_{0,m}}\right). \quad (15)$$

Для достаточно большого числа слоев N суммирование по номерам слоев можно заменить интегрированием по z. Сопоставим теперь приведенное выражение с видом огибающей с той же несущей частотой в однородной среде, характеризуемой некоторыми эффективными параметрами $\bar{k}_0$, $\bar{v}_{\mathrm{gr}}$ и $\bar{D}_2$:

$$E(\mathbf{r}_\perp, z, t) = \sum_{\mathbf{k}_\perp,\nu}F(\mathbf{k}_\perp,\nu)\exp(i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp - i\nu t) \times \exp\left[i\left(\frac{\nu}{\bar{v}_{\mathrm{gr}}} - \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2\bar{k}_0} + \frac{\bar{D}_2\nu^2}{2\bar{k}_0}\right)z\right]. \quad (16)$$

Из сравнения (15) и (16) следует

$$\frac{1}{\bar{k}_0} = \frac{1}{L}\sum_{m=1}^{N}\frac{L_m}{k_{0,m}}, \quad \frac{1}{\bar{v}_{\mathrm{gr}}} = \frac{1}{L}\sum_{m=1}^{N}\frac{L_m}{v_{\mathrm{gr},m}},$$

$$\bar{D}_2 = \frac{\bar{k}_0}{L}\sum_{m=1}^{N}\frac{D_{2,m}L_m}{k_{0,m}}. \quad (17)$$

В интегральной форме

$$\frac{1}{\bar{k}_0} = \frac{1}{L}\int_0^L\frac{dz}{k_0}, \quad \frac{1}{\bar{v}_{\mathrm{gr}}} = \frac{1}{L}\int_0^L\frac{dz}{v_{\mathrm{gr}}}, \quad \bar{D}_2 = \frac{\bar{k}_0}{L}\int_0^L\frac{D_2 dz}{k_0}. \quad (18)$$

Тем самым введение эффективной однородной среды оказывается возможным. Подчеркнем, что определяемая таким образом величина „среднего волнового числа“ $\bar{k}_0$ для огибающей отличается от такового для полного поля в (12) $\tilde{k}_0 = (1/L)\int_0^L k_0(z)dz$. Напомним, однако, что в широкоапертурных системах со слоями с лазерным усилением возможно развитие усиленного спонтанного излучения в преимущественно поперечных направлениях [21]. Вызванные поглощением поправки должны превосходить поправки более высокого порядка квазиоптического приближения. Для пучка с характерным масштабом поперечных неоднородностей w это ведет к требованию $|n''/n'| > (k'w)^{-2}$ [11], а для импульсов аналогичное требование заключается в превышении этими поправками тех поправок, которые вызваны пренебрежением высшими порядками теории дисперсии.

Обобщение на случай оптически нелинейных сред требует конкретизации вида нелинейности. При этом в общем случае интенсивность излучения отличается от квадрата модуля огибающей множителем $\exp(2\tilde{k}_0''z)$. При характерном для установившихся структур условии $\tilde{k}_0'' = 0$ (баланс насыщенных поглощения и усиления) этот фактор, по-видимому, не имеет принципиального значения. При выполнении этого условия среда становится эффективно прозрачной для волн, распространяющихся параллельно оси z, тогда как для наклонно распространяющихся волн поглощение преобладает над усилением (эффективный коэффициент диффузии отличен от 0 и положителен). Это обстоятельство подтверждает правомерность введения эффективного коэффициента диффузии в задачах о лазерных солитонах [8,14–16].

Финансирование работы

Данное исследование поддержано грантом РНФ 18-12-00075.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Леонтович М.А.* // Изв. АН СССР, сер. физ. 1944. Т. 8. С. 16–22.
[2] *Леонтович М.А., Фок В.А.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. № 7. С. 557–573.
[3] *Фок В.А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Советское радио, 1970.
[4] *Малюжинец Г.Д.* // УФН. 1959. Т. 69. № 2. С. 321–334.
[5] *Вайнштейн Л.А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Советское радио, 1966.
[6] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1979.
[7] *Власов С.Н., Таланов В.И.* Самофокусировка волн. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1997.

[8] *Розанов Н.Н.* Диссипативные оптические солитоны. М.: Физматлит, 2011.
[9] *Балакин А.А., Господчиков Е.Д., Шалашов А.Г.* // Письма в ЖЭТФ. 2016. Т. 104. № 10. С. 701–707.
[10] *Шалашов А.Г., Балакин А.А., Хусаинов Т.А., Господчиков Е.Д., Соломахин А.Л.* // ЖЭТФ. 2017. Т. 151. № 2. С. 379–395.
[11] *Розанов Н.Н.* // Опт. и спектр. 2019. Т. 127. В. 2. С. 283–285; *Rosanov N.N.* // Opt. Spectrosc. 2019. V. 127. N 2. P. 285–287.
[12] *Розанов Н.Н.* // Опт. и спектр. 2001. Т. 90. № 1. С. 136–138; *Rozanov N.N.* // Opt. Spectrosc. 2001. V. 90. N 1. P. 121–123.
[13] *Розанов Н.Н.* // Опт. и спектр. 2001. Т. 90. № 2. С. 311–314; *Rozanov N.N.* // Opt. Spectrosc. 2001. V. 90. N 2. P. 26–268.
[14] *Veretenov N.A., Rosanov N.N., Fedorov S.V.* // Phys. Rev. Lett. 2016. V. 117. N 18. P. 183901.
[15] *Veretenov N.A., Fedorov S.V., Rosanov N.N.* // Phys. Rev. Lett. 2017. V. 119. N 26. P. 263901.
[16] *Fedorov S.V., Veretenov N.A., Rosanov N.N.* // Phys. Rev. Lett. 2019. V. 122. N 2. P. 023903.
[17] *Розанов Н.Н.* // Опт. и спектр. 2009. Т. 105. № 5. С. 799–803; *Rosanov N.N.* // Opt. Spectrosc. 2009. V. 107. N 5. P. 721–725.
[18] *Rosanov N.N., Kozlov V.V., Wabnitz S.* // Phys. Rev. A. 2010. V. 81. N 4. P. 043815.
[19] *Розанов Н.Н., Архипов Р.М., Архипов М.В.* // УФН. 2018. Т. 188. № 12. С. 1347–1353; *Rosanov N.N., Arkhipov R.M., Arkhipov M.V.* // Physics-Uspekhi. 2018. V. 61. N 12. P. 1227–1233.
[20] *McCall S.L., Hahn E.L.* // Phys. Rev. 1969. V. 83. N 2. P. 457–485.
[21] *Розанов Н.Н.* // УФН. 2017. Т. 187. № 8. С. 879–882; *Rosanov N.N.* // Physics-Uspekhi. 2017. V. 60. N 8. P. 818–821.