

05,11

Использование усреднения по полям взаимодействия для построения приближенных методов в модели Изинга разбавленного магнетика

© С.В. Сёмкин, В.П. Смагин, В.И. Люлько

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса,
Владивосток, Россия

E-mail: Li15@rambler.ru

Поступила в Редакцию 5 февраля 2020 г.

В окончательной редакции 5 февраля 2020 г.

Принята к публикации 17 марта 2020 г.

Проанализировано применение метода усреднения по полям взаимодействия применительно к задачам статистической физики. Построено теоретическое обоснование метода усреднения по полям взаимодействия применительно к кластеру спинов. На основе полученных общих соотношений найдены приближенные решения для модели Изинга с разбавлением по связям. Эти приближенные решения сравниваются с точным решением для одномерной цепочки изинговских спинов с разбавлением по связям.

Ключевые слова: модель Изинга, поле взаимодействия, разбавленный магнетик, решетка Бете.

DOI: 10.21883/FTT.2020.08.49603.021

1. Введение

Известно, что свойства разбавленных и неупорядоченных магнетиков отличаются от свойств чистых магнетиков [1–3,10]. Однако точных решений для моделей магнитных систем с разбавлением до сих пор не получено. Поэтому имеет смысл построение приближенных решений для разбавленных магнетиков. Некоторые из этих решений можно построить с помощью усреднения по полям взаимодействия.

Применение функции распределения по полям взаимодействия к изучению свойств системы многих взаимодействующих частиц началось с работы Чандра-секара [4]. В этой работе рассматривалось движение системы галактик, связанных гравитационным взаимодействием. Позднее этот метод был использован для оценки влияния магнитостатического взаимодействия мелких ферромагнитных частиц, находящихся в немагнитной матрице [5]. В работах [6–8] метод усреднения по обменным полям был применен к анализу магнитных свойств чистых и разбавленных магнетиков. Применение метода к задачам статистической физики было основано на работе [9], в которой показано, что для модели Изинга в состоянии термодинамического равновесия для любого спина σ_0

$$\langle \sigma_0 \rangle = \langle \text{th}(Kh + h_{ex}) \rangle,$$

где $K = J/kT$ и $h_{ex} = H_{ex}/kT$, J — константа обменного взаимодействия, H_{ex} — внешнее магнитное поле, k — постоянная Больцмана, T — температура. Поле взаимодействия h является в данном случае суммой всех спинов, взаимодействующих с σ_0 .

В настоящей работе мы сформулируем и докажем соотношения (формула (2)), на которых может быть

основан метод усреднения по обменным полям применительно к кластерам из нескольких спинов. Применив полученные соотношения к модели Изинга с разбавлением по связям, мы построим для этой модели (в качестве примера) два варианта приближенных методов. Эти методы мы проверяем на одномерной модели Изинга с разбавлением по связям, для которой мы построили точное решение [17]. Кроме того, мы сравниваем полученную в этих приближениях намагниченность при нулевой температуре с вероятностью того, что узел разбавленной по связям решетки Бете принадлежит бесконечному кластеру.

2. Усреднение по полям взаимодействия

Рассмотрим систему из N взаимодействующих частиц, каждая из которых характеризуется некоторым параметром σ , который в дальнейшем, имея в виду применение к модели Изинга, будем называть спином. Обозначим Ω множество всех этих спинов, а гамильтониан системы — $\mathcal{H}(\Omega)$. Конкретный вид гамильтониана значения не имеет, но мы будем полагать, что для каждого спина σ_i в гамильтониане есть конечное число слагаемых, содержащих σ_i . Причем это число остается конечным и в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$. Два спина σ_i и σ_j будем называть взаимодействующими, если в гамильтониане есть слагаемое не аддитивно зависящее от σ_i и σ_j .

Рассмотрим в системе группу, содержащую n спинов. Такую группу мы будем в дальнейшем называть кластером. Множество входящих в кластер спинов будем обозначать s . Обозначим r множество не входящих в

кластер спинов, каждый из которых взаимодействует хотя бы с одним спином кластера, и обозначим s множество всех остальных спинов. Очевидно, Ω является объединением непересекающихся множеств c , r и s .

Выделим теперь в гамильтониане слагаемые, связанные с взаимодействием спинов принадлежащих c и r

$$\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{H}_c(c, r) + \mathcal{H}_s(r, s).$$

Гамильтониан $\mathcal{H}_c(c, r)$ содержит только слагаемые, зависящие от спинов кластера c и слагаемые, описывающие взаимодействие спинов кластера со спинами из множества r . Гамильтониан $\mathcal{H}_s(r, s)$ — содержит все остальные слагаемые, входящие в $\mathcal{H}(\Omega)$. Тогда статистическую сумму системы можно записать в виде

$$Z = \sum_r Z_c(r) Z_s(r), \quad (1)$$

где

$$Z_s(r) = \sum_s \exp\left(-\frac{1}{kT} \mathcal{H}_s(r, s)\right)$$

и

$$Z_c(r) = \sum_c \exp\left(-\frac{1}{kT} \mathcal{H}_c(c, r)\right).$$

Каждое слагаемое в (1) имеет смысл (ненормированной) вероятности того, что система спинов r будет находиться в некотором состоянии. Нормированная вероятность $W(r) = Z_c(r)Z_s(r)/Z$ есть функция распределения для наборов состояний спинов, взаимодействующих с кластером.

Пусть $f(r)$ некоторая функция спинов, принадлежащих r , а $\varphi(c)$ некоторая функция кластерных спинов c . Тогда среднее по ансамблю значение произведения $f\varphi$ можно представить в виде

$$\langle f\varphi \rangle = \frac{1}{Z} \sum_r f(r) \left(\sum_c \varphi(c) \exp\left(-\frac{1}{kT} \mathcal{H}_c(c, r)\right) \right) Z_s(r).$$

Разделив и умножив каждое слагаемое в этой сумме на „кластерную“ статсумму $Z_c(r)$, запишем полученное выражение в виде

$$\langle f\varphi \rangle = \sum_r f(r) \langle \varphi \rangle_r W(r), \quad (2)$$

где

$$\langle \varphi \rangle_r = \frac{1}{Z_c(r)} \sum_c \varphi(c) \exp\left(-\frac{1}{kT} \mathcal{H}_c(c, r)\right). \quad (3)$$

Формулу (2) можно интерпретировать следующим образом. Выражение (3) можно понимать как „кластерное среднее“ функции $\varphi(c)$, вычисленное при условии, что конфигурация взаимодействующих с кластером спинов задана и неизменна. Выражение (2) в этом случае можно понимать как усреднение произведения $f(r)\langle \varphi \rangle_r$ по функции распределения $W(r)$. На использовании

формулы (2) и основан метод усреднения по полям взаимодействия.

Рассмотрим модель Изинга на некоторой решетке. Этой решеткой может быть какая-нибудь периодическая решетка с координационным числом q , но, в принципе, под словом „решетка“ можно понимать произвольный граф (не содержащий, разумеется, петель и параллельных ребер). Пусть в каждом узле решетки содержится изинговский „спин“ принимающий значения $+1$ и -1 , а взаимодействуют только спины, находящиеся в связанных узлах. Тогда гамильтониан модели Изинга можно записать так:

$$\mathcal{H}(\Omega) = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j - H_{ex} \sum_i \sigma_i. \quad (4)$$

Суммирование в первой сумме проводится по всем парам связанных спинов, во второй — по всем узлам.

Выделим теперь на решетке кластер, состоящий только из одного спина σ_0 . Кластерный гамильтониан $\mathcal{H}_c(c, r) = -J\sigma_0 \sum_{\sigma_i \in r} \sigma_i - \sigma_0 H_{ex}$, а формула (2), в которой примем $f = 1$ и $\varphi = \sigma_0$, приводит к

$$\langle \sigma_0 \rangle = \sum_r \text{th}\left(K \sum_{\sigma_i \in r} \sigma_i + h_{ex}\right) W(r), \quad (5)$$

что совпадает с полученным в [9].

Для простой решетки средние значения каждого спина равны между собой и равны M -макроскопической намагниченности системы. В более сложных случаях средние значения (5) (и функции распределения $W(r)$) могут быть различны для разных спинов.

Условная вероятность (5) является функцией суммы значений спинов, принадлежащих r , то есть суммы спинов, непосредственно взаимодействующих с σ_0 . Будем называть эту сумму „полем взаимодействия“ и обозначим h , усреднение в (5) является, в сущности, усреднением по функции распределения этого поля взаимодействия

$$\langle \sigma_0 \rangle = \int \text{th}(Kh + h_{ex}) W(h) dh, \quad (6)$$

где

$$W(h) = \sum_r \delta\left(h - \sum_{\sigma_i \in r} \sigma_i\right) W(r), \quad (7)$$

здесь δ — дельта-функция.

Таким образом, среднюю намагниченность каждого конкретного спина в модели Изинга на любой решетке можно рассматривать как среднее значение $\text{th}(Kh + h_{ex})$ по функции распределения „полей взаимодействия“ $W(h)$, вычисленной для этого спина.

Возьмем теперь кластер из двух соседних спинов σ_1 и σ_2 (димер). Взяв в (2) $f = 1$ и $\varphi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$, получим

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right\rangle \\ &= \int \frac{\text{sh}(K(h_1 + h_2) + 2h_{ex})}{\text{ch}(K(h_1 + h_2) + 2h_{ex}) + e^{-2K} \text{ch}(K(h_1 - h_2))} \\ & \quad \times W(h_1, h_2) dh_1 dh_2, \end{aligned} \quad (8)$$

где $h_{1,2}$ — поля взаимодействия, то есть суммы спинов из множества r , взаимодействующих со спинами σ_1 и σ_2 соответственно. Функция распределения этих полей $W(h_1, h_2)$ определяется аналогично (6). Для простой решетки средние (8) одинаковы для каждого димера и равны макроскопической намагниченности системы на атом.

Рассмотрим теперь модель Изинга на некоторой простой решетке, но с немагнитным разбавлением по связям. (Приводимые ниже рассуждения можно, с небольшими изменениями, распространить и на случай разбавления по узлам.) Будем полагать, что связь исходной решетки с вероятностью $1-b$ разорвана, то есть слагаемое, описывающее взаимодействие спинов по этой связи исключено из гамильтониана (4). Будем считать, что разорванные связи случайно и без корреляции разбросаны по узлам решетки. Рассматривая каждый отдельный i -й магнитный атом в такой решетке и применив для него равенство (6), получим, что среднее значение его спина равно

$$\langle \sigma_i \rangle = \int \text{th}(Kh + h_{ex}) W(h) dh,$$

где $W(h)$ „локальная“ функция распределения по полям взаимодействия на этом конкретном атоме. Согласно методу самоусреднения [10], для вычисления макроскопической намагниченности M разбавленного магнетика нужно вычислить среднее всех $\langle \sigma_i \rangle$ в системе с достаточно большим N (точнее, в термодинамическом пределе):

$$M = \overline{\langle \sigma_i \rangle} = \int \text{th}(Kh + h_{ex}) W(h, b) dh, \quad (9)$$

где $W(h, b) = \overline{W(h)}$ — „средняя“ функция распределения полей взаимодействия. Формулу (9) можно обобщить и на произвольный кластер, однако следует иметь в виду, что связи внутри самого кластера могут оказаться разорванными. Поэтому „самоусреднение“ необходимо проводить отдельно для каждой конфигурации разорванных связей в кластере, а затем усреднить по этим конфигурациям с весами, равными вероятности соответствующих конфигураций. Например, для кластера из двух узлов есть две конфигурации — с разорванной и не разорванной связью между атомами кластера. Вероятности этих конфигураций есть $1-b$ и b соответственно.

Значит

$$\begin{aligned} M &= \left\langle \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right\rangle = (1-b) \int \frac{1}{2} (\text{th}(Kh_1 + h_{ex}) \\ & \quad + \text{th}(Kh_2 + h_{ex})) W_1(h_1, h_2, b) dh_1 dh_2 \\ & \quad + b \int \frac{\text{sh}(K(h_1 + h_2) + 2h_{ex})}{\text{ch}(K(h_1 + h_2) + 2h_{ex}) + e^{-2K} \text{ch}(K(h_1 - h_2))} \\ & \quad \times W_2(h_1, h_2) dh_1 dh_2, \end{aligned} \quad (10)$$

Средние функции распределения $W_1(h_1, h_2, b)$ и $W_2(h_1, h_2, b)$ получаются усреднением по кластерам с разорванной и не разорванной связью соответственно.

3. Приближенные методы

Вычисление намагниченности в модели Изинга с разбавлением непосредственно по формулам (9) или (10) возможно, конечно же, только если известны соответствующие функции распределения полей взаимодействия и как видно из этих формул, нахождение функций распределения фактически эквивалентно точному решению задачи. Однако формулы (9) и (10) (или формулы, которые можно аналогичным способом получить из (2) для кластеров с большим числом атомов) можно использовать для построения приближенных методов нахождения намагниченности в модели Изинга с разбавлением. Для этого нужно принять те или иные приближения для функций распределения W , W_1 и W_2 , входящих в формулы (9) и (10). В настоящей работе мы рассмотрим два варианта приближений и оценим их точность.

Самым простым (и грубым) приближением представляется замена усреднения по полям в (9) и (10) подстановкой средних значений этих полей. Иными словами, функции распределения в (9) и (10) возьмем в следующем виде:

$$W(h, b) = \delta(h - h_a)$$

и

$$W_1(h_1, h_2, b) = W_2(h_1, h_2, b) = \delta(h_1 - h_{1a}) \delta(h_2 - h_{2a}).$$

В отношении средних полей h_a , h_{1a} и h_{2a} примем следующие предположения. Будем считать $h_{1a} = h_{2a}$, а величины полей будем считать пропорциональными количеству внешних соседних узлов: $h_{1a}/h_a = (q-1)/q$. Обозначив x коэффициент этой пропорциональности, из (9) и (10) получим

$$M = \text{th}(Kqx + h_{ex}), \quad (11)$$

где x определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \text{th}(Kqx + h_{ex}) &= (1-b) \text{th}(K(q-1)x + h_{ex}) \\ & \quad + b \frac{\text{sh}(2K(q-1)x + 2h_{ex})}{\text{ch}(2K(q-1)x + 2h_{ex}) + e^{-2K}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оказывается [11], что приближение (11) для чистого магнетика ($b = 1$) является точным решением для модели Изинга на решетке Бете, а при $b < 1$ его можно рассматривать как „псевдохаотическое“ приближение для модели Изинга с немагнитным разбавлением на решетке Бете [12]. (Псевдохаотическое приближение получается из решения задачи с подвижными немагнитными примесями при наложении дополнительного условия равенства нулю корреляции в расположении примесей в соседних узлах решетки [13].)

Другое приближение для функций распределения, входящих в (8) и (9), состоит в следующем [18]. У каждого i -го узла разбавленной по связям решетки есть k связанных с этим узлом соседей. Это случайное число, принимающее значения от 0 до q и при случайном и некоррелированном расположении разорванных связей в решетке распределенное по биномиальному закону. Следовательно, функцию $W(h, b)$, входящую в (9), всегда можно представить в виде

$$W(h, b) = \sum_{k=0}^q C_q^k b^k (1-b)^{q-k} W^{(k)}(h, b).$$

Здесь $W^{(k)}(h, b)$ — условная функция распределения по полям взаимодействия при условии, что у узла есть ровно k связанных с ним соседних узлов, C_q^k — биномиальные коэффициенты. Аналогично, функции $W_{1,2}(h_1, h_2, b)$, входящие в выражение (10), можно представить в виде

$$W_{1,2}(h_1, h_2, b) = \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{q-1}^p C_{q-1}^l b^{p+l} (1-b)^{2(q-1)-(p+l)} \times W_{1,2}^{(p,l)}(h_1, h_2, b).$$

Построим теперь следующее приближение. Заменим усреднение по условным функциям распределения $W^{(k)}$ и $W_{1,2}^{(p,l)}$ подстановкой в соответствующие выражения условных средних. Иными словами возьмем условные функции распределения в виде

$$W^{(k)}(h, b) = \delta(h - h_a^{(k)})$$

и

$$W_1^{(p,l)}(h_1, h_2, b) = W_2^{(p,l)}(h_1, h_2, b) = \delta(h_1 - h_{1a}^{(p)}) \delta(h_2 - h_{2a}^{(l)}).$$

Будем считать, что средние значения полей $h_a^{(k)}$, $h_{1a}^{(p)}$ и $h_{2a}^{(l)}$ пропорциональны значениям k , p и l соответственно с одним и тем же коэффициентом пропорциональности, который обозначим u . Тогда из (9) и (10) получим

$$M = \sum_{k=0}^q C_q^k b^k (1-b)^{q-k} \text{th}(Kky + h_{ex}), \quad (13)$$

где u определяется из уравнения

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^q C_q^k b^k (1-b)^{q-k} \text{th}(Kky + h_{ex}) \\ &= (1-b) \sum_{p=0}^{q-1} C_{q-1}^p b^p (1-b)^{q-1-p} \text{th}(Kpy + h_{ex}) \\ &+ b \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{l=0}^{q-1} C_{q-1}^p C_{q-1}^l b^{p+l} (1-b)^{2(q-1)-(p+l)} \\ &\times \frac{\text{sh}(K(p+l)y + 2h_{ex})}{\text{ch}(K(p+l)y + 2h_{ex}) + e^{-2K} \text{ch}(K(p-l)y)}. \quad (14) \end{aligned}$$

Приближение (13) в дальнейшем будем называть „биномиальным“. Рассмотрим основные свойства биномиального приближения (13). Во-первых, заметим, что для чистого магнетика ($b = 1$) приближение (13) совпадает с (11) и является, таким образом, точным решением для модели Изинга на решетке Бете. Есть еще одно сходство между приближениями (13) и (11). А именно, если для приближения (11) найти критическое значение параметра $K = K_c$, при котором исчезает ненулевой корень (12) для $h_{ex} = 0$, получим [11,12]

$$K_c = \frac{1}{2} \ln \frac{b + b_c}{b - b_c}, \quad b_c = \frac{1}{q-1}. \quad (15)$$

Используя (14), нетрудно показать, что в биномиальном приближении для критического значения параметра K_c и перколяционного порога b_c получается точно такой же результат (15). Однако, в общем случае приближения (11) и (13) не совпадают. Для того, чтобы сопоставить эти приближения по степени точности, их, конечно, желательно сравнить с точным решением. Для модели Изинга с разбавлением по узлам или связям точное решение можно построить для одномерной цепочки [14]. Как известно [15], одномерная цепочка является в некотором смысле „патологическим“ видом кристаллической решетки — в ней не может быть фазового перехода и спонтанной намагниченности при ненулевой температуре, а при немагнитном разбавлении бесконечный кластер магнитных атомов разрушается при любой ненулевой концентрации примесей. То есть, рассматривая одномерную цепочку с немагнитными примесями, мы всегда находимся в области концентраций ниже порога протекания и температур выше температуры Кюри. Тем не менее, возможность получить точное решение позволяет сопоставить его с приближенными методами.

Рассмотрим одномерный изинговский магнетик (цепочку) с разбавлением по связям. При таком разбавлении цепочка разбивается на отрезки магнитных атомов разной длины, разделенные разорванными связями. Среднее значение изинговского спина, в расчете на один

магнитный атом, может быть вычислено так:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} m_n p_n, \quad (16)$$

где m_n — средняя намагниченность атома отрезка длиной n , а p_n — вероятность того, что произвольно взятый магнитный атом принадлежит такому отрезку. Очевидно, что $p_n = nb^{n-1}(1-b)^2$, а намагниченность m_n вычислим следующим образом. Пусть Z_n — статистическая сумма для отрезка из n изинговских спинов $\sigma_1, \dots, \sigma_n$

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} \exp\left(K \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \sigma_{i+1} + h_{ex} \sum_{i=1}^n \sigma_i\right) \\ &= F_n(+1) + F_n(-1), \end{aligned}$$

где

$$F_n(\sigma_n) = \sum_{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}} \exp\left(K \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i \sigma_{i+1} + h_{ex} \sum_{i=1}^n \sigma_i\right).$$

Тогда

$$m_n = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial h_{ex}} \ln Z_n = \frac{1}{n} \frac{F_{n,h}(+1) + F_{n,h}(-1)}{F_n(+1) + F_n(-1)},$$

где $F_{n,h}(\sigma)$ — производная $F_n(\sigma)$ по h_{ex} . Для величин $F_n(\pm 1)$ и их производных можно составить рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} F_{n+1}(\sigma) &= \sum_{\sigma'=\pm 1} F_n(\sigma') e^{K\sigma\sigma' + h_{ex}\sigma} \\ &= F_n(+1) e^{K\sigma + h_{ex}\sigma} + F_n(-1) e^{-K\sigma + h_{ex}\sigma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{n+1,h}(\sigma) &= (F_{n,h}(+1) + \sigma F_n(+1)) e^{K\sigma + h_{ex}\sigma} \\ &\quad + (F_{n,h}(-1) + \sigma F_n(-1)) e^{-K\sigma + h_{ex}\sigma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(+1) &= F_{1,h}(+1) = e^{h_{ex}}, \quad F_1(-1) = e^{-h_{ex}}, \\ F_{1,h}(-1) &= -e^{-h_{ex}}. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$x_n = F_n(-1)/F_n(+1), \quad y_n = F_{n,h}(+1)/F_n(+1),$$

$$z_n = F_{n,h}(-1)/F_n(+1)$$

получим

$$m_n = \frac{1}{n} \frac{y_n + z_n}{1 + x_n}, \quad (17)$$

$$x_{n+1} = \frac{e^{-2K} + x_n}{1 + x_n e^{-2K}} e^{-2h_{ex}} y_{n+1} = \frac{y_n + z_n e^{-2K}}{1 + x_n e^{-2K}} + 1,$$

$$z_{n+1} = \frac{z_n + y_n e^{-2K}}{1 + x_n e^{-2K}} e^{-2h_{ex}} - x_{n+1},$$

$$x_1 = e^{-2h_{ex}}, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = -e^{-2h_{ex}}.$$

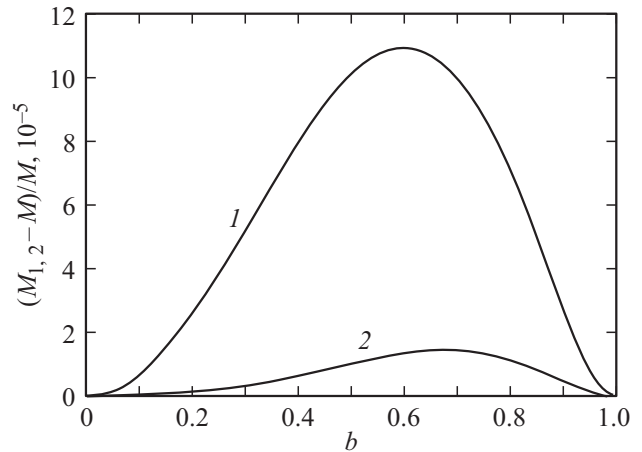


Рис. 1. Относительные разности приближенных и точного решений $(M_1 - M)/M$ (кривая 1) и $(M_2 - M)/M$ (кривая 2) для одномерной цепочки изинговских спинов с разбавлением по связям. По оси абсцисс — концентрация неразорванных связей b .

Сравним теперь решение (16) с приближениями (11) и (13). Взяв в (11) и (13) $q = 2$, получим

$$M_1 = \text{th}(2x + h_{ex}), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} M_2 &= (1-b)^2 \text{th}(h_{ex}) + 2b(1-b) \text{th}(y + h_{ex}) \\ &\quad + b^2 \text{th}(2y + h_{ex}) \end{aligned} \quad (19)$$

где x и y находятся из уравнений

$$\begin{aligned} \text{th}(2x + h_{ex}) &= (1-b) \text{th}(x + h_{ex}) \\ &\quad + b \frac{\text{sh}(2x + 2h_{ex})}{\text{ch}(2x + 2h_{ex}) + e^{-2K}} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (1-b) \text{th}(y + h_{ex}) + b \text{th}(2y + h_{ex}) &= (1-b)^2 \\ &\quad \times \frac{\text{sh}(2h_{ex})}{\text{ch}(2h_{ex}) + e^{-2K}} + 2b(1-b) \frac{\text{sh}(y + 2h_{ex})}{\text{ch}(y + 2h_{ex}) + e^{-2K}} \text{ch}(y) \\ &\quad + b^2 \frac{\text{sh}(2y + 2h_{ex})}{\text{ch}(2y + 2h_{ex}) + e^{-2K}}. \end{aligned}$$

На рис. 1 показаны относительные разности $(M_1 - M)/M$ (кривая 1) и $(M_2 - M)/M$ (кривая 2) в зависимости от b , вычисленные при $K = 0.5$ и $h_{ex} = 0.1$. Видно, что биномиальное приближение (13) приводит в данном случае к более точному результату, чем псевдохаотическое приближение (11). Наши расчеты показывают, что и при других значениях параметров K и h_{ex} биномиальное приближение является более точным, чем псевдохаотическое для одномерной разбавленной модели Изинга.

К сожалению, не удается построить точное решение для модели Изинга с разбавлением даже для решетки

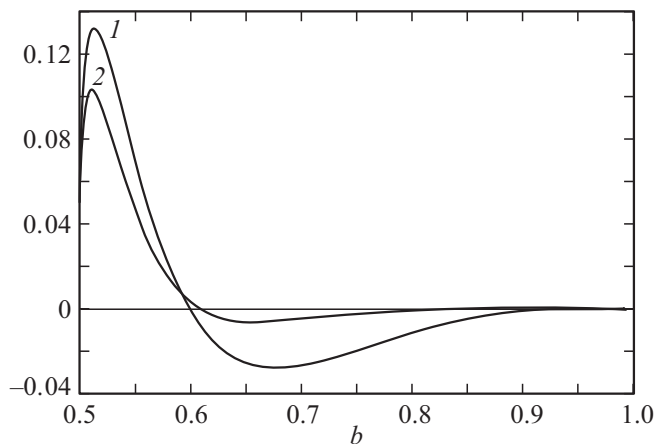


Рис. 2. Разности спонтанных намагниченностей при нулевой температуре и функции $P_0(b)$ для псевдохаотического приближения (кривая 1) и биномиального приближения (кривая 2). По оси абсцисс — концентрация неразорванных связей b .

Бете с $q > 2$. Но для решетки Бете с разбавлением можно сравнительно просто найти вероятность $P_0(b)$ того, что случайно взятый узел решетки принадлежит бесконечному кластеру [16]:

$$P_0(b) = 1 - Z^q,$$

где Z — корень уравнения $\sum_{i=0}^{q-2} Z^i = 1/b$.

Известно [16], что средняя спонтанная намагниченность в модели Изинга с разбавлением при $T \rightarrow 0$ ($K \rightarrow \infty$) должна быть равна $P_0(b)$. Поскольку приближения (11) и (13) при $b = 1$ есть точные решения для модели Изинга на решетке Бете, то при $b < 1$ на них можно смотреть как на приближенные решения для модели Изинга с разбавлением для этой решетки. Поэтому имеет смысл сравнить вероятность $P_0(b)$ со спонтанной намагниченностью в приближениях (11) и (13) при $K \rightarrow \infty$.

На рис. 2 показаны разности намагниченности, вычисленной при $T \rightarrow 0$ и вероятности $P_0(b)$ для псевдохаотического приближения (10) (кривая 1) и биномиального приближения (13) (кривая 2) для решетки Бете с $q = 3$ в зависимости от b . Видно, что разность для биномиального приближения меньше, чем для псевдохаотического.

4. Заключение

Таким образом, в настоящей работе получены следующие результаты. Был сформулирован и обоснован в общей форме метод усреднения по полям взаимодействия, основанный на соотношении (2). Было показано, что этот метод можно применить к разбавленным магнетикам в комбинации с методом самоусреднения [10]. Описанный в работе общий алгоритм был применен для кластеров из одного и двух узлов (формулы (9) и (10)).

С использованием метода усреднения по полям взаимодействия были построены псевдохаотическое (11) и биномиальное (13) приближения для модели Изинга с разбавлением по связям. Точность этих приближений оценивалась с помощью сравнения с точным решением для одномерной модели Изинга с разбавлением по связям. Кроме того, намагниченности при нулевой температуре, полученные в этих приближениях, сравнивались с $P_0(b)$ для решетки Бете при $q = 3$. Эти сравнения показали, что биномиальное приближение (13) является более точным, чем приближение (11).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них отсутствует конфликт интересов.

Список литературы

- [1] Ю.А. Изюмов, М.В. Медведев. Теория магнитоупорядоченных кристаллов с примесями. Наука, М. (1970). 271 с.
- [2] Б.Н. Шалаев. ФТТ **52**, 83 (2010).
- [3] Е.З. Мейлихов, Р.М. Фарзетдинова. ФТТ **56**, 679 (2014).
- [4] С. Чандраскар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИИЛ, М. (1947). 168 с.
- [5] В.И. Белоконь, В.В. Кочегура, Л.Е. Шолпо. Методы палеомагнитных исследований горных пород. Недра, Л. (1973). 248 с.
- [6] В.И. Белоконь, С.В. Семкин. ЖЭТФ **102**, 4, 1254 (1992).
- [7] С.В. Семкин, В.П. Смагин. ФТТ **55**, 892 (2013).
- [8] С.В. Семкин, В.П. Смагин. Изв. вузов. Физика, **56**, 9 (2013).
- [9] Н.В. Callen. Phys. Lett. **4**, 161 (1963).
- [10] Вик.С. Доценко. Критические явления в спиновых системах с беспорядком. УФН **165**, 5, 481 (1995).
- [11] С.В. Семкин, В.П. Смагин. ФТТ **56**, 1064 (2014).
- [12] С.В. Семкин, В.П. Смагин. ФТТ **57**, 5, 926 (2015).
- [13] С.В. Семкин, В.П. Смагин. ЖЭТФ **148**, 729 (2015).
- [14] В.П. Смагин, С.В. Семкин. Вестн. ВГУЭС, **4**, 122 (2018).
- [15] Р. Бэкстер. Точно решаемые модели в статистической механике. Мир, М. (1985). R.J. Baxter. Exactly solved models in statistical mechanics. Academic Press, N.Y. (1982).
- [16] Дж. Займан, Модели беспорядка: Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем. Мир, М. (1982). 591 с.
- [17] С.В. Семкин, В.П. Смагин, Е. Г. Гусев. ТМФ **201**, 2, 278 (2019).
- [18] С.В. Семкин, В.П. Смагин. Изв. вузов. Физика **60**, 140 (2017).

Редактор Е.Ю. Флегонтова