

## Лазерная нанофлюидика жидких кристаллов

© Izabela Śliwa<sup>1</sup>, A.B. Захаров<sup>2,¶</sup><sup>1</sup> Poznan University of Economics and Business,  
Poznan, Poland<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения РАН,  
Санкт-Петербург, Россия

¶ E-mail: izabela.sliwa@ue.poznan.pl, alexandre.zakharov@yahoo.ca

Поступила в Редакцию 13 января 2020 г.

В окончательной редакции 13 января 2019 г.

Принята к публикации 14 января 2019 г.

Численными методами, в рамках нелинейного обобщения классической теории Эриксона–Лесли, допускающей учет термомеханических вкладов как в выражение для сдвигового напряжения, так и в уравнение баланса энтропии, описано несколько сценариев формирования гидродинамических течений в наноразмерных планарно-ориентированных жидкокристаллических (ПОЖК)-каналах. В результате формирования как градиента температуры  $\nabla T$ , в изначально однородно прогретом ПОЖК-канале под действием сфокусированного лазерного излучения, так и градиента поля директора  $\nabla \hat{n}$ , под действием статического электрического поля, естественно возникающего на границе раздела ЖК-фаза/твердое тело, и в результате взаимодействия  $\nabla T$  и  $\nabla \hat{n}$ , в наноразмерном ПОЖК-канале может окончательно сформироваться вихревой поток.

**Ключевые слова:** физика жидких кристаллов, нанофлюидика, термомеханические силы.

DOI: 10.21883/FTT.2020.06.49359.002

## 1. Введение

Интерес со стороны исследователей к нанофлюидике, то есть, области физики жидкостей в нанолитровых объемах ( $1 \text{ nl} = 10^{-12} \text{ m}^3$ ), продиктован многообещающими приложениями этих систем в биологии [1], оптоэлектронике [2] и различных сенсорах и датчиках [3], в основу которых положены анизотропные молекулярные жидкости и жидкокристаллические (ЖК) материалы. Часто манипуляции такими наноразмерными анизотропными молекулярными системами в сверхтонких капиллярах и каналах осуществляются с помощью внешнего электрического поля [4]. Этот метод транспортировки нанолитровых объемов одинаково применим как для молекулярных жидкостей, так и для манипулирования нанолитровыми объемами ЖК-материалов. Отличительной особенностью ЖК-систем от анизотропных молекулярных жидкостей является то, что при определенных термодинамических условиях в ЖК-системах формируется ориентационное упорядочение молекул, которое описывается полем директора  $\hat{n}$  [5]. Было показано, что взаимодействие градиентов поля директора  $\nabla \hat{n}$  и температуры  $\nabla T$  ответственно за возникновение термомеханической силы (ТМС), которая, в свою очередь, ответственна за формирование устойчивого гидродинамического потока  $v$  ЖК-материалов в тонких и сверхтонких каналах и капиллярах [6]. Величина этого потока пропорциональна сдвиговой составляющей термомеханического вклада  $\sigma_{zx}^{tm}$  в тензор напряжения (ТН)  $v \sim \frac{d}{\eta} \sigma_{zx}^{tm}$ , где  $\eta$  — сдвиговая вязкость ЖК-материала, а  $d$  — ширина ЖК-канала. Таким образом, необходимым

и достаточным условием возникновения направленного потока ЖК-материала в сверхтонких каналах и капиллярах под действием ТМС является наличие градиентов поля директора  $\nabla \hat{n}$  и температуры  $\nabla T$ . Если локальный градиент температуры в объеме ЖК-фазы легко формируется с помощью лазерного излучения, то градиент поля директора удастся сформировать, например, посредством гибридной ориентации ЖК-фазы, в которой ориентация поля директора на одной из поверхностей планарная, а на другой — гомеотропная. Все это указывает на то, что существует возможность немеханической транспортировки нанолитровых объемов ЖК-материала под действием сфокусированного лазерного излучения. В случае однородно-ориентированной ЖК-фазы, когда ориентация поля директора на ограничивающих поверхностях либо планарная, либо гомеотропная, направленное течение ЖК-фазы под действием градиента температуры отсутствует. В этом случае чтобы инициировать горизонтальное течение ЖК-фазы, необходимо деформировать однородно ориентированную ЖК-среду, с тем чтобы создать градиент поля директора. Этим фактором, который позволит деформировать планарно-ориентированную ЖК-полость, заключенную между двумя ограничивающими поверхностями, может служить перпендикулярно направленное электрическое поле. Таким полем может являться электростатическое поле двойного электрического слоя, естественно возникающего на границе раздела ЖК-фаза/твердое тело. Поскольку ЖК представляет собой слабый электролит, в котором число ионов практически равно числу катионов, то в пристенном слое на границе раздела ЖК-фаза/твердое

тело возникает двойной электрический слой с плотностью заряда  $\sigma$ . Электрическое поле, создаваемое этим зарядом, пронизывает ЖК-фазу на расстояние порядка длины дебаевской экранировки  $\lambda_D$  [7] и способно деформировать пристенные слои однородно-ориентированной ЖК-полости. При этом возникает вопрос: какой должна быть плотность заряда двойного электрического слоя, для того чтобы осуществить деформацию ЖК-фазы и тем самым инициировать горизонтальный поток ЖК-материала в тонком капилляре или канале.

Исследование этих новых состояний будет проведено в рамках нелинейного обобщения классической теории Эриксона-Лесли [8,9] с учетом балансов массы, импульсов и моментов, действующих на единицу объема ЖК-материала, а также с учетом баланса энтропии [10]. Численными методами будут исследованы различные гидродинамические режимы формирования течений в наноразмерных планарно-ориентированных ЖК-полостях, заключенных между двумя параллельными границами, под действием градиента температуры и электростатического поля, естественно возникающего на границе раздела ЖК-фаза/твердое тело.

## 2. Основные уравнения

Рассмотрим длинный прямоугольный ЖК-канал с размерами  $L$  и  $d$  ( $L \gg d$ ), ограниченный твердыми горизонтальными и вертикальными поверхностями. Допустим, что директор планарно ориентирован на всех поверхностях. Рассмотрим систему координат, отсчитываемую от нижней ограничивающей поверхности ЖК-канала так, что ось  $X$  и орт  $\hat{i}$  совпадают с направлением директора на нижней (верхней) ограничивающей поверхности ( $\hat{i} \parallel \hat{n}_{z=d}$ ), в то время как ось  $Z$  и орт  $\hat{k}$  направлены ортогонально ( $\hat{k} \perp \hat{n}_{z=d}$ ), а орт  $\hat{j} = \hat{k} \times \hat{i}$ . Будем предполагать, что переориентация поля директора  $\hat{n} = (n_x, 0, n_z) = \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{k}$  под действием градиента температуры  $\nabla T$ , формирующегося за счет сфокусированного лазерного излучения и плотности заряда двойного электрического слоя  $\sigma$ , осуществляется в плоскости  $XZ$ . Здесь  $\theta \equiv \theta(x, z, t)$  — полярный угол, образованный директором  $\hat{n}$  и ортом  $\hat{k}$ .

В случае когда нематик находится в контакте с твердой ограничивающей поверхностью, то имеет место избирательная адсорбция ионов. Так например, положительные ионы притягиваются поверхностью, в то время как отрицательные ионы (катионы) отталкиваются. Принимая во внимание тот факт, что ЖК-фаза обычно содержит практически равное количество ионов и катионов (слабый электролит), то находясь в контакте с твердой ограничивающей поверхностью образуется двойной электрический слой с плотностью заряда  $\sigma$ . Электростатическое поле  $\mathbf{E}$ , инициируемое плотностью электрического заряда  $\sigma$ , проникает в объем ЖК-фазы на глубину порядка дебаевской длины экранировки

$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0 k_B T}{2e^2 n_{eq}}}$  и может быть рассчитано в рамках теории Пуассона-Больцмана как [7]

$$\mathbf{E}(x, z) = E_x \hat{i} + E_z \hat{k}, \tag{1}$$

где компоненты электрического поля имеют вид

$$E_x = E_0 \left[ \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right) - \exp\left(-\frac{L-x}{\lambda_D}\right) \right]$$

и

$$E_z = E_0 \left[ \exp\left(-\frac{z}{\lambda_D}\right) - \exp\left(-\frac{d-z}{\lambda_D}\right) \right].$$

соответственно, а  $E_0 = \sigma / (\epsilon_0 \epsilon_a)$  — поверхностное электростатическое поле,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\epsilon_a = (\epsilon_{\parallel} + 2\epsilon_{\perp})/3$  — диэлектрическая проницаемость ЖК-среды,  $\epsilon_{\parallel}$  и  $\epsilon_{\perp}$  — диэлектрические постоянные вдоль и поперек направления директора  $\hat{n}$  соответственно,  $\epsilon = \epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta_s + \epsilon_{\perp} \sin^2 \theta_s$ ,  $e$  — заряд протона,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $\theta_s$  — значение угла между направлением директора  $\hat{n}_s$  на ограничивающей поверхности и ортом  $\hat{k}$  и  $n_{eq}$  — концентрация ионов в объеме ЖК-фазы.

Наша главная цель состоит в том, чтобы исследовать влияние локально формирующегося, с помощью лазерного излучения, градиента температуры  $\nabla T$  в объеме ЖК-фазы и градиента поля директора  $\nabla \hat{n}$ , формирующегося под влиянием электростатического поля  $\mathbf{E}$ , инициируемого плотностью электрического заряда  $\sigma$ , на характер гидродинамического потока в наноразмерном планарно-ориентированном ЖК (ПОЖК)-канале. В нашем случае верхняя ограничивающая поверхность нагревается инфракрасным лазерным лучом, причем длительность и мощность лазерного импульса ограничена только тем условием, чтобы температура верхней ограничительной поверхности находилась в диапазоне температур, соответствующих существованию нематической фазы. В настоящей работе предлагается новый подход, описывающий механизм формирования сложного гидродинамического течения в наноразмерных ПОЖК-каналах под действием потока тепла

$$\lambda_{\perp} \left( \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial z} \right)_{0 \leq x \leq L, z=d} = q, \tag{2}$$

направленного ортогонально  $\mathbf{q} = q \hat{k}$  через верхнюю ограничивающую поверхность канала в ЖК-фазу, в то время как на остальных поверхностях ЖК-канала поддерживается постоянная температура

$$T_{0 \leq x \leq L, z=0} = T_{x=0, 0 < z < d} = T_{x=L, 0 < z < d} = T_w. \tag{3}$$

Здесь  $\lambda_{\perp}$  - коэффициенты теплопроводности ЖК-фазы в направлении, перпендикулярном направлению директора  $\hat{n}$ .

Следует отметить, что планарная ориентация ЖК-канала предполагает, что на нижней, верхней и двух

боковых ограничивающих поверхностях выполнены следующие граничные условия для поля директора

$$\begin{aligned} (n_x)_{0 \leq x < L, z=0} &= (n_x)_{0 \leq x < L, z=d} = 1, \\ (n_x)_{x=0, 0 \leq z < d} &= (n_x)_{x=L, 0 \leq z < d} = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

В свою очередь, поле скорости  $\mathbf{v} = u\hat{i} + w\hat{k}$  удовлетворяет условию прилипания

$$\begin{aligned} u_{0 \leq x < L, z=0} &= u_{0 \leq x < L, z=d} = u_{x=0, 0 \leq z < d} = u_{x=L, 0 \leq z < d} = 0, \\ w_{0 \leq x < L, z=0} &= w_{0 \leq x < L, z=d} = w_{x=0, 0 \leq z < d} = w_{x=L, 0 \leq z < d} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $u \equiv v_x(x, z, t)$  и  $w \equiv v_z(x, z, t)$  — компоненты вектора  $\mathbf{v}$ .

Принимая во внимание тот факт, что ширина ЖК-канала варьируется в пределах нескольких сотен нанометров, будем считать, что плотность ЖК-фазы постоянна по сечению канала ( $\rho = \text{const}$ ). Таким образом, мы имеем дело с несжимаемой ЖК-фазой, и условие несжимаемости  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  принимает вид

$$u_{,x} + w_{,z} = 0, \quad (6)$$

где  $u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ .

В нашем случае гидродинамические уравнения, описывающие эволюцию как поля директора  $\hat{\mathbf{n}}$  и скорости  $\mathbf{v}$ , так и поля температуры  $T$  могут быть получены из условия баланса угловых и линейных моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы [8,9], а также баланса энтропии [10]. Так, уравнение баланса угловых моментов имеет вид [7]

$$\mathbf{T}_{\text{el}} + \mathbf{T}_{\text{elast}} + \mathbf{T}_{\text{vis}} + \mathbf{T}_{\text{tm}} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{T}_{\text{el}} = -\epsilon_0 \epsilon_a \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}})$  — электрический,  $\mathbf{T}_{\text{elast}} = \frac{\delta \mathcal{W}_{\text{F}}}{\delta \hat{\mathbf{n}}} \times \hat{\mathbf{n}}$  — упругий,  $\mathbf{T}_{\text{vis}} = \frac{\delta \mathcal{R}^{\text{vis}}}{\delta \hat{\mathbf{n}}_t} \times \hat{\mathbf{n}}$  — вязкий и  $\mathbf{T}_{\text{tm}} = \frac{\delta \mathcal{R}^{\text{tm}}}{\delta \hat{\mathbf{n}}_t} \times \hat{\mathbf{n}}$  — термомеханический вклады в баланс угловых моментов соответственно (детали вычислений даны в Приложении), в то время как уравнение Навье–Стокса для поля скорости  $\mathbf{v}$  принимает вид [7]

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (8)$$

где  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{elast}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{vis}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{tm}} - \mathcal{P}\mathcal{Y}$  — полный тензор напряжения (ТН), в то время как его упругий, вязкий и термомеханический вклады имеют вид  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} = -\frac{\partial \mathcal{W}_{\text{F}}}{\partial \nabla \hat{\mathbf{n}}} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{n}})^{\text{T}}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{vis}} = \frac{\delta \mathcal{R}^{\text{vis}}}{\delta \nabla \mathbf{v}}$  и  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tm}} = \frac{\delta \mathcal{R}^{\text{tm}}}{\delta \nabla \mathbf{v}}$  соответственно, а  $\hat{\mathbf{n}}_t = \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt}$  — материальная производная поля директора  $\hat{\mathbf{n}}$ . Здесь  $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{vis}} + \mathcal{R}^{\text{tm}} + \mathcal{R}^{\text{th}}$  — полная диссипационная функция Рэлея, в то время как  $\mathcal{W}_{\text{F}} = \frac{1}{2} [K_1 (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + K_3 (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2]$  — представляет собой плотность упругой энергии, а  $K_1$  и  $K_3$  — коэффициенты упругости продольного и поперечного

изгибов соответственно. В свою очередь  $\mathcal{P}$  представляет собой гидростатическое давление в планарно-ориентированном ЖК-канале.

В случае прогревания верхней ограничивающей поверхности инфракрасным лазерным лучом, изменения поля температуры  $T(x, z, t)$  удовлетворяют уравнению теплопроводности [10]

$$\rho C_P \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{q} = -T \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \nabla T}$  — тепловой поток через верхнюю ограничивающую поверхность в ЖК-фазу, а  $C_P$  — коэффициент теплоемкости нематика.

Для того чтобы исследовать эволюцию поля директора  $\hat{\mathbf{n}}$  (или полярного угла  $\theta(x, z, t)$ ) к его равновесному распределению по сечению ПОЖК-канала  $\hat{\mathbf{n}}_{\text{eq}}(x, z)$ , а также поля скорости  $\mathbf{v}(x, z, t)$ , вызванную взаимодействием градиентов поля директора  $\nabla \hat{\mathbf{n}}$  и температуры  $\nabla T$ , мы рассмотрим безразмерные аналоги уравнений (7)–(9). Так, безразмерное уравнение баланса моментов может быть записано в виде (детали изложены в Приложении)

$$\begin{aligned} \theta_{,\tau} &= -\frac{L}{d} (1 + \gamma_{12} \cos 2\theta) u_{,z} - \frac{E_z^2}{2} \sin 2\theta + \delta_1 \left[ g(\theta) \theta_{,zz} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sin 2\theta \mathcal{K} \left( \theta_{,z}^2 - \frac{2d}{L} \theta_{,xz} \right) - \frac{2d}{L} \theta_{,x} \theta_{,z} \mathcal{K} \cos 2\theta \right] \\ &- \delta_2 \left[ \frac{d}{4L} \chi_{,x} \theta_{,z} \sin 2\theta + \frac{d}{2L} \chi_{,z} \theta_{,x} \sin 2\theta \left( \frac{1}{2} + \cos^2 \theta \right) \right] \\ &+ \delta_2 \left[ \chi_{,z} \theta_{,z} \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\bar{x} = x/L$  и  $\bar{z} = z/d$  — безразмерные пространственные переменные,  $\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon_a E_0}{\gamma_1} t$  — безразмерное время,  $\mathcal{K} = 1 - K_{31}$ ,  $g(\theta) = \sin^2 \theta + K_{31} \cos^2 \theta$  — функция полярного угла  $\theta$ ,  $K_{31} = K_3/K_1$ ,  $\gamma_{21} = \gamma_2/\gamma_1$ ,  $\delta_1 = \left( \frac{E_{\text{th}}}{\pi E_0} \right)^2$  и  $\delta_2 = \xi \frac{T_{NI}}{K_1} \delta_1$  — четыре параметра ЖК-системы,  $E_{\text{th}} = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_1}{\epsilon_0 \epsilon_a}}$  — пороговое напряжение электрического поля  $\mathbf{E}$ ,  $\xi \sim 10^{-12} \text{ J/mK}$  — термомеханическая постоянная [6],  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — коэффициенты вращательной вязкости, а  $T_{NI}$  — температура фазового перехода нематик-изотропная фаза. Следует отметить, что в дальнейшем верхняя черта в обозначениях пространственных переменных  $x$  и  $z$  будет опущена.

Безразмерный аналог уравнения Навье–Стокса в нашем случае может быть записан в виде (детали изложены в Приложении)

$$\begin{aligned} \delta_3 \frac{du}{d\tau} &= \frac{d}{L} \left[ (u_{,z} \mathcal{F}_1)_{,x} + \delta_2 \chi_{,z} \theta_{,z} \mathcal{F}_2 \right]_{,z} \\ &+ \left[ u_{,z} \mathcal{F}_3 + \frac{d}{L} \left( \frac{\alpha_1}{\gamma_1} \sin 4\theta w_{,z} - \frac{1}{2} (1 - \gamma_{21} \cos 2\theta) \dot{\theta} \right) \right]_{,z}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\delta_3 \frac{dw}{d\tau} = \left( -w_{,z} \mathcal{F}_6 - \frac{1}{2} \gamma_{21} \sin 2\theta \dot{\theta} + \frac{L}{d} u_{,z} \mathcal{F}_5 \right)_{,z} + (u_{,z} \mathcal{F}_4)_{,x} + (\mathcal{P} + \mathcal{B})_{,z}, \quad (12)$$

где множество функций  $\mathcal{F}_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) и  $\mathcal{B}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \frac{1}{2\gamma_1} \sin 2\theta \left( \alpha_1 \sin^2 \theta + \frac{\alpha_5 + \alpha_6}{4} - \frac{\gamma_2}{2} \right), \\ \mathcal{F}_2 &= \frac{1}{4} \left( \sin 2\theta - 6 \sin^2 \theta - 3 \cos^4 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \right), \\ \mathcal{F}_3 &= \frac{1}{4\gamma_1} [\gamma_1 + \gamma_2 \cos 2\theta + 2\alpha_4 + 2(\alpha_5 + \alpha_6) \sin 2\theta], \\ \mathcal{F}_4 &= \mathcal{F}_1 + \frac{1}{2} \gamma_{21} \cos 2\theta - \frac{1}{2}, \\ \mathcal{F}_5 &= -\mathcal{F}_1 + \frac{\sin 2\theta}{4\gamma_1} (\alpha_5 + \alpha_6 + 2\alpha_1 \sin 2\theta), \\ \mathcal{F}_6 &= \mathcal{F}_1 - \frac{1}{\gamma_1} (2\alpha_1 + \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_1 \cos 2\theta), \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{B} = \left[ \frac{1}{2} \delta_2 \chi_{,z} \theta_{,z} \sin 2\theta \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) - \delta_1 g(\theta) \theta_{,z}^2 \right]_{,z}$$

соответственно,  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{d\tau}$  — материальная производная полярного угла, а  $\delta_3 = \rho \frac{K_1}{\gamma_1^2} \delta_1^2$  — еще один параметр ЖК-системы. Следует отметить, что уравнение (12) было переписано с учетом условия несжимаемости  $u_{,x} = -w_{,z}$ . В свою очередь, безразмерное уравнение баланса энтропии принимает вид

$$\begin{aligned} \delta_4 \frac{d\chi}{d\tau} &= \left( \Lambda \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right) \chi_{,zz} - (\Lambda - 1) \sin 2\theta \chi_{,z} \theta_{,z} \\ &+ (\Lambda - 1) \frac{d}{L} \left[ \sin 2\theta \chi_{,xz} - \cos 2\theta (\chi_{,x} \theta_{,z} + \chi_{,z} \theta_{,x}) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\Lambda = \lambda_{\parallel} / \lambda_{\perp}$ ,  $\chi \equiv \chi(x, z, \tau) = T(x, z, \tau) / T_{NI}$  — безразмерная температура, а  $\delta_4 = \frac{\rho C_p K_1}{\gamma_1 \lambda_{\perp}}$  — еще один параметр ЖК-системы.

Теперь процесс релаксации поля директора в ПОЖК наноразмерном канале к его равновесному распределению по сечению канала под действием электрических, вязких, упругих и термомеханических сил может быть описан системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (10)–(13), с учетом соответствующих граничных условий для угла

$$\theta_{0 \leq x < 1, z = -1} = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_{x = \pm 1, -1 < z < 1} = \frac{\pi}{2}, \quad (14)$$

скорости

$$\mathbf{v}_{-1 < x < 1, z = \pm 1} = \mathbf{v}_{x = \pm 1, -1 < z < 1} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

и температуры

$$\chi_{-1 < x < 1, z = 1} = \chi_w,$$

$$\chi_{-1 \leq x \leq 1, z = -1} = \chi_{x = -1, -1 < z < 1} = \chi_{x = 1, -1 < z < 1} = \chi_w,$$

$$\left( \frac{\partial \chi(x, z, \tau)}{\partial z} \right)_{0 \leq x \leq 1, z = 1} = \bar{q}. \quad (16)$$

Здесь  $\chi_w = T_w / T_{NI}$  — значение безразмерной температуры на ограничивающих поверхностях,  $\bar{q} = -\frac{qd}{T_{NI} \lambda_{\perp}}$  — безразмерный тепловой поток через верхнюю ограничивающую поверхность в ЖК-фазу. Следует отметить, что верхняя черта в обозначениях теплового потока  $q$  в дальнейшем будет опущена.

Систему нелинейных уравнений (10)–(13), с граничными условиями (14)–(16), следует дополнить начальным условием для полярного угла

$$\theta(\tau = 0, x, z) = \theta_{el}(x, z), \quad (17)$$

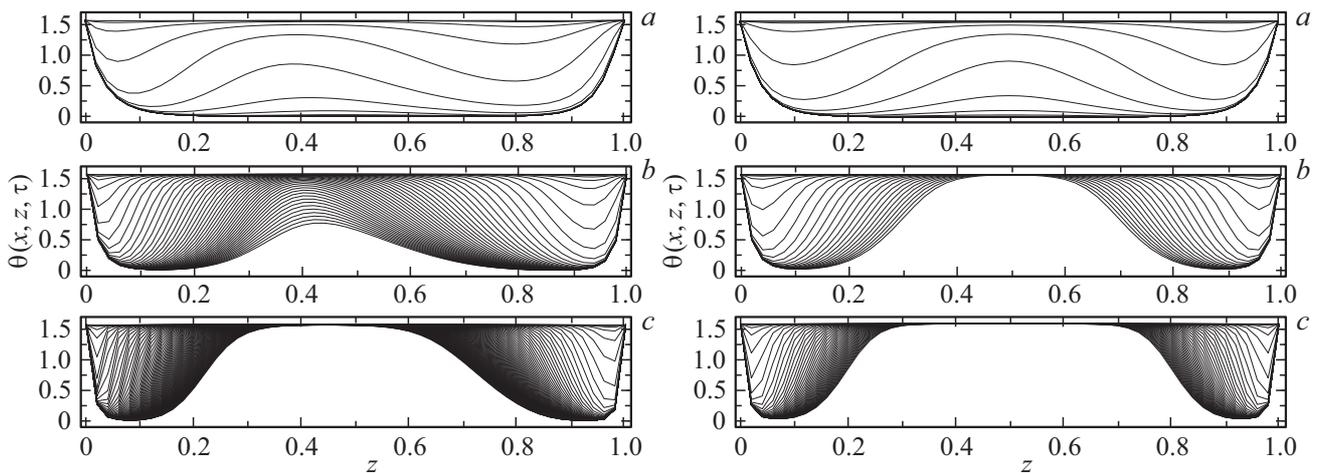
где значение полярного угла  $\theta_{elast}(x, z)$  — есть решение уравнения (10), полученное только с учетом упругих сил (при отсутствии как поля скорости, так и температуры  $u = w = \chi_{,x} = \chi_{,z} = 0$ ) и граничного условия (14).

### 3. Решение гидродинамических уравнений и основные результаты

Для того чтобы понять, какую роль играют как тепловой поток  $\mathbf{q} = q\hat{\mathbf{k}}$ , направленный в ЖК-канал через ограничивающую поверхность, так и двойной электрический слой с плотностью заряда  $\sigma$  в формировании гидродинамического течения в наноразмерном ПОЖК-канале, предположим, что лазерное излучение сфокусировано на верхней ограничивающей поверхности. Здесь функция  $q$  имеет вид

$$q(x, z) = q_0 \exp \left( -2 \frac{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}{\Delta} \right) \mathcal{H}(\tau_{in} - \tau) \quad (18)$$

и описывает распределение инжектируемой энергии в наноразмерный ЖК-канал, в то время как  $q_0$  — безразмерная мощность теплового потока,  $\Delta = \frac{\omega_0}{d}$  — размер Гауссова пятна лазерного излучения,  $x_0$  и  $z_0$  — координаты его центра соответственно,  $\mathcal{H}(\tau_{in} - \tau)$  — функция Хэвисайда и  $\tau_{in}$  — характерное безразмерное время накачки лазерного излучения в ЖК-фазу. Следует отметить, что первые три параметра  $\delta_1 = \left( \frac{E_{th}}{\pi E_0} \right)^2$ ,  $\delta_2 = \xi \frac{T_{NI}}{K_1} \delta_1$  и  $\delta_3 = \rho \frac{K_1}{\gamma_1^2} \delta_1^2$ , входящие в систему нелинейных уравнений (10)–(13), зависят от величины порогового электрического поля  $E_{th} = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_1}{\epsilon_0 \epsilon_a}}$ , которое, в свою очередь, обратно пропорционально ширине  $d$  наноразмерного ЖК-канала. Поскольку в наших исследованиях безразмерная ширина ЖК-канала будет изменяться как  $D = d/\lambda_D = 2.0, 5.0, \text{ и } 10.0$ ,



**Рис. 1.** Слева — эволюция распределения угла  $\theta(x = 0.5, z, \tau)$  по сечению наноразмерного ПОЖК-канала под действием как лазерного излучения, так и статического электрического поля  $E_0$ , для трех значений безразмерной ширины ЖК-канала: (a)  $D = 2.0$ , (b)  $5.0$ , и (c)  $10.0$  соответственно. Справа — то же что слева, только под действием электрического поля  $E_0$ .

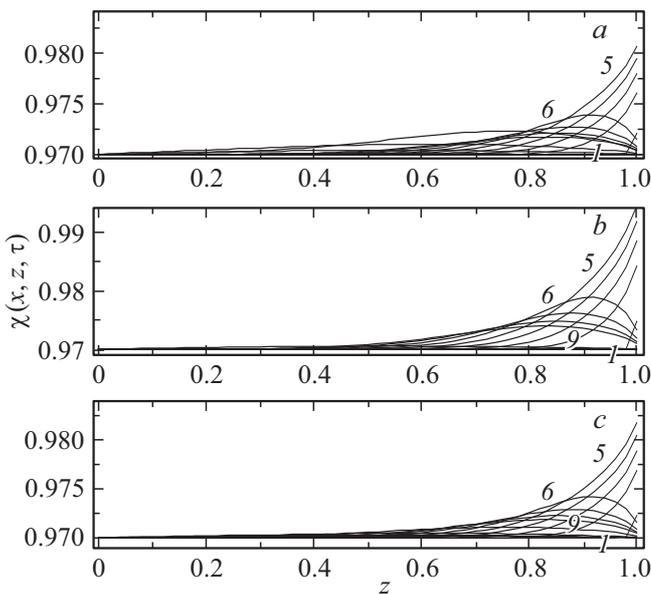
то в случае ЖК-материала, образованного молекулами 4-суано-4'-пентилбипhenyl (5CB) и при температурах, соответствующих интервалу существования нематической фазы этого ЖК-соединения, значения величин порогового электрического поля изменяются как  $E_{th}(D = 2.0) = 1.15 \cdot 10^{-3}$ ,  $E_{th}(D = 5.0) = 0.47 \cdot 10^{-3}$ , и  $E_{th}(D = 10.0) = 0.235 \cdot 10^{-3}$  (рассчитанных в единицах  $C/m^2$ ) соответственно безразмерным значениям ширины, в то время как значения параметра  $\delta_1$  изменяются соответственно как  $\delta_1(D = 2.0) \sim 9.0 \cdot 10^{-4}$ ,  $\delta_1(D = 5.0) \sim 1.4 \cdot 10^{-4}$ , и  $\delta_1(D = 10.0) \sim 0.36 \cdot 10^{-4}$ . В свою очередь, значения параметров  $\delta_2$  и  $\delta_3$  соответственно изменяются как  $\delta_2(D = 2.0) \sim 0.27$  и  $\delta_3(D = 2.0) \sim 1.8 \times 10^{-12}$ ,  $\delta_2(D = 5.0) \sim 4.2 \cdot 10^{-2}$  и  $\delta_3(D = 5.0) \sim 4.4 \cdot 10^{-14}$ , и  $\delta_2(D = 10.0) \sim 1.1 \cdot 10^{-3}$  и  $\delta_3(D = 10.0) \sim 2.9 \cdot 10^{-15}$ . Таким образом, величина параметра  $\delta_1(D = 2.0)$  в 25 раз больше величины  $\delta_1(D = 10.0)$ , в то время как величина параметра  $\delta_3(D = 2.0)$  приблизительно в 245 раз больше чем величина  $\delta_3(D = 10.0)$ . Впоследствии мы покажем, как вариации величин параметров  $\delta_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ), входящих в систему нелинейных уравнений в частных производных (10)–(13), будут влиять на характер гидродинамического течения, возникающего в наноразмерном ПОЖК-канале, как под действием теплового потока  $\mathbf{q} = q\hat{\mathbf{k}}$ , направленного в ЖК-канал через ограничивающую поверхность, так и двойного электрического слоя с плотностью заряда  $\sigma$ .

Процесс эволюции поля директора  $\hat{\mathbf{n}}$  к его распределению  $\hat{\mathbf{n}}_{in}(x, z, \tau_{in})$ , соответствующему окончанию процесса прогревания ЖК-фазы, описывающейся полярным углом  $\theta(x, z, \tau)$ , с его начального распределения  $\theta(x, z, \tau = 0)$  и до  $\theta_{in}(x, z, \tau_{in})$ , а также формирование гидродинамического течения в наноразмерном ПОЖК-канале под действием как лазерного излучения, сфокусированного на верхней границе, так и

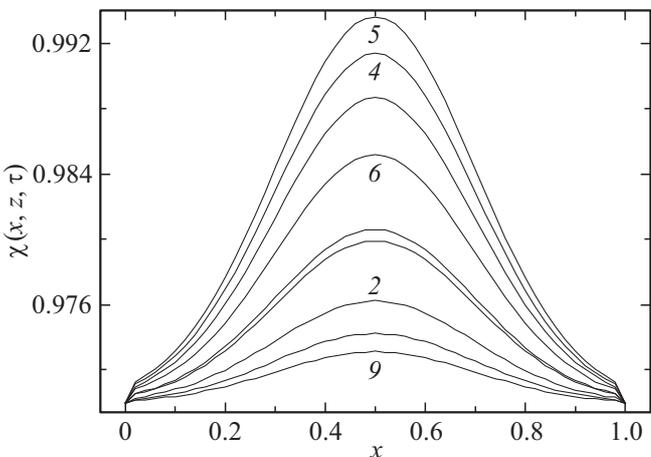
двойного электрического слоя с плотностью заряда  $\sigma$ , были исследованы численно методом релаксаций [11], а критерием сходимости итерационной процедуры был выбран  $\epsilon = |(\theta_{m+1} - \theta_m) / \theta_m| \sim 10^{-4}$ . Здесь  $m$  — номер итерации.

На рис. 1 представлены результаты расчета эволюции полярного угла  $\theta(x = 0.5, z, \tau)$ , начиная с его начального распределения  $\theta(x = 0.5, z, \tau = 0) = \theta_{elast}(x = 0.5, z)$  и до  $\theta_{in}(x, z, \tau_{in})$ , соответствующего окончанию процесса нагревания лазерным излучением, для трех значений безразмерной ширины ЖК-канала: (a)  $D = d/\lambda_D = 2.0$  ( $d \sim 100$  nm), (b)  $D = 5.0$  ( $d \sim 0.25 \mu\text{m}$ ), и (c)  $D = 10.0$  ( $d \sim 0.5 \mu\text{m}$ ) соответственно. На левой стороне рис. 1 (случай I) представлена эволюция полярного угла  $\theta(x = 0.5, z, \tau)$  под действием как лазерного излучения, так и двойного электрического слоя, в то время как на правой стороне рис. 1 (случай II) представлена эволюция  $\theta(x = 0.5, z, \tau)$  под действием только двойного электрического слоя. При этих вычислениях безразмерный тепловой поток был выбран в форме, представленной функцией  $q(x, z)$  (см. (18)), с безразмерной мощностью теплового потока, равной  $q_0 = 0.25$  ( $\sim 4.0 \cdot 10^{-2}$  mW/ $\mu\text{m}^2$ ) и временем накачки излучения, равным  $\tau_{in} = 0.01$  ( $\sim 0.6$  ns), в то время как плотность двойного электрического слоя была выбрана равной  $\sigma = 10^{-2}$  C/ $\text{m}^2$ . Анализируя результаты вычислений, следует отметить, что в случае I как тепловой поток мощностью  $q_0 = 0.25$ , так и статическое электрическое поле, создаваемое двойным электрическим слоем с плотностью заряда  $\sigma = 10^{-2}$  C/ $\text{m}^2$ , способно деформировать поле директора таким образом, что распределение полярного угла  $\theta(x = 0.5, z, \tau)$  по сечению ПОЖК-канала представляет собой асимметричную функцию относительно середины сечения ЖК-канала, в то время как в случае II, под действием только электрических сил, мы имеем дело

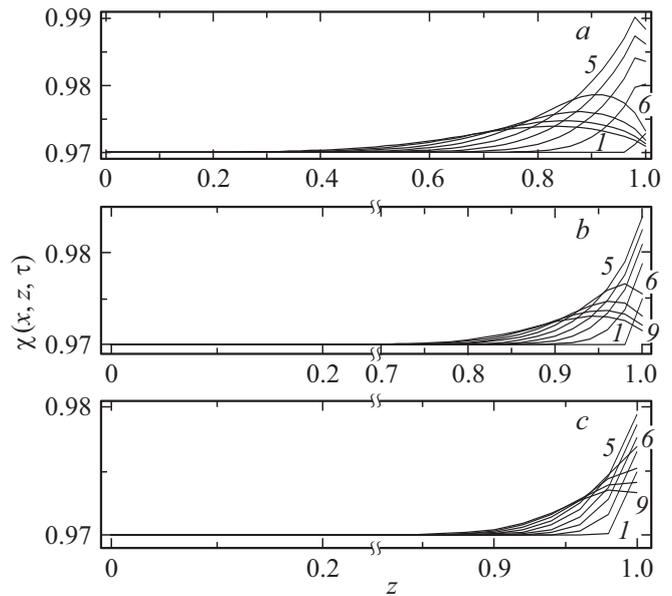
с симметричным распределением угла  $\theta(x = 0.5, z, \tau)$ . Такой процесс переориентации поля директора в наноразмерном ПОЖК-канале, как он описан в случаях I и II, свидетельствует о том, что основной вклад в этот процесс переориентации осуществляется за счет статического электрического поля  $E_0 = \sigma / (\epsilon_0 \epsilon_a)$ , инициируемого двойным электрическим слоем. Второе, что необходимо отметить, это то, что в случае сверхтонкого ЖК-канала  $D = d / \lambda_D = 2.0$  ( $d \sim 100$  nm), плотности заряда  $\sigma = 10^{-2}$  C/m<sup>2</sup> двойного электрического слоя достаточно для того, чтобы переориентировать поле директора по всей ширине ЖК-канала (см. рис. 1, a),



**Рис. 2.** Эволюция распределения поля температуры  $\chi(x, z, \tau)$  по сечению сверхтонкого ( $D = 2.0$ ) ПОЖК-канала, в процессе прогрева (кривые с 1 по 5) и охлаждения (кривые с 6 по 9) соответственно.



**Рис. 3.** Эволюция распределения поля температуры  $\chi(x, z = 1, \tau)$  вдоль верхней границы ( $z = 1$ ) сверхтонкого ( $D = 2.0$ ) ПОЖК-канала. Номера кривых соответствуют тем процессам, что показаны на рис. 2.

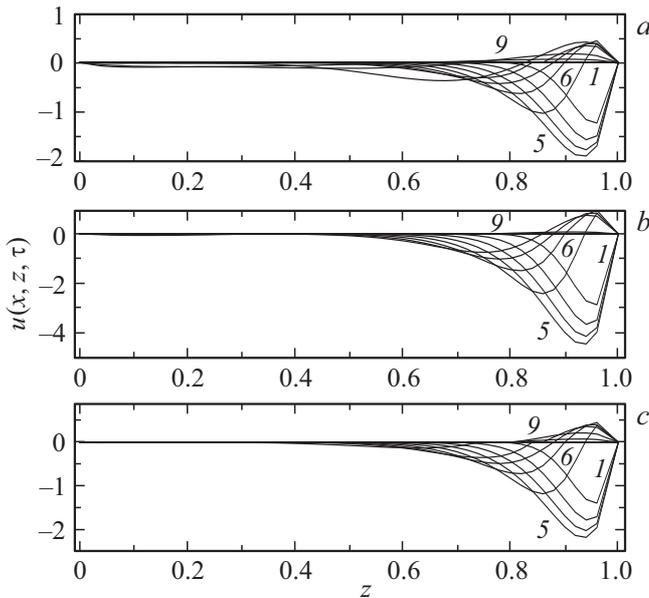


**Рис. 4.** Эволюция распределения поля температуры  $\chi(x = 0.5, z, \tau)$  по сечению ПОЖК-канала, для трех значений безразмерной ширины канала: (a)  $D = 2.0$ , (b) 5.0, и (c) 10.0 соответственно. Номера кривых соответствуют тем процессам, что показаны на рис. 2.

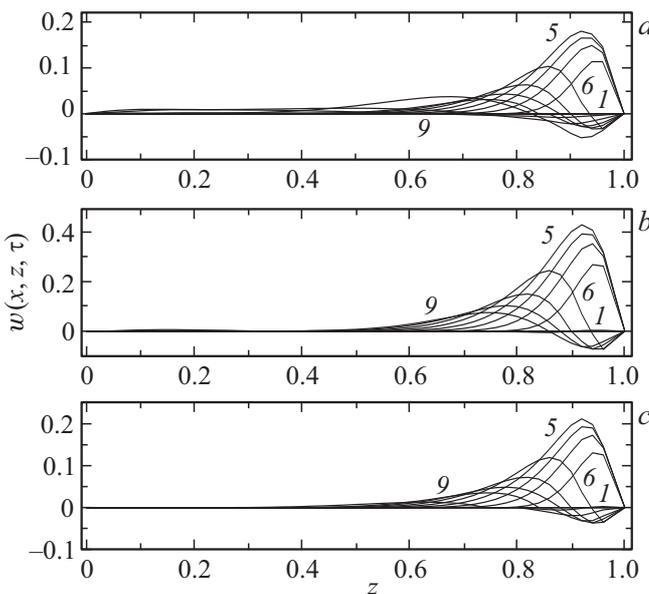
в то время как в случае более широкого ЖК-канала  $D = 10.0$  ( $d \sim 0.5 \mu\text{m}$ ) существует полость, в центре ЖК-канала ( $0.35 \leq z \leq 0.55$ ), где влияние как электрического поля, так и лазерного излучения полностью отсутствует. Ниже будет показано, что более сложная картина эволюции поля директора в канале шириной  $D = 10.0$  ( $d \sim 0.5 \mu\text{m}$ ), чем в сверхтонком ЖК-канале ( $D = 2.0$  ( $d \sim 100$  nm)), приводит к сложной пространственной зависимости термомеханической силы, ответственной за формирование гидродинамического потока в этих ЖК-каналах.

Эволюция поля температуры  $\chi(x, z, \tau)$  от его начального распределения  $\chi(x, z, \tau = 0) = \chi_w$  и до значений соответствующих окончанию процесса прогрева ЖК-канала  $\chi(x, z, \tau = \tau_{in})$ , представлена на рис. 2, 3 и 4. Кривые с 1 по 5 номер соответствуют временам  $\tau_k = \Delta\tau \times (k - 1)$  ( $k = 1, \dots, 5$ ;  $\Delta\tau = 0.0025$ ) (процесс нагревания ЖК-канала), в то время как кривые с 6 по 9 номер соответствуют временам  $\tau_k = \Delta\tau \times (k - 1)$  ( $k = 6, \dots, 9$ ;  $\Delta\tau = 0.0025$ ) (процесс охлаждения ЖК-канала) соответственно. Зависимости  $\chi(x_k, z, \tau)$  ( $x_k = 0.25k$  ( $k = 1, 2, 3$ )) представленные на рис. 2a-c описывают эволюцию безразмерного поля температуры по сечению сверхтонкого ЖК-канала ( $D = 2.0$  ( $d \sim 100$  nm)), для трех значений положения пространственной переменной  $x_k = 0.25k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Результаты вычислений показывают, что глубина прогрева ПОЖК-канала составляет  $\sim 40$  nm в глубину ЖК-фазы со стороны верхней прогреваемой границы канала. На рис. 3 представлена эволюция распределения

безразмерного поля температуры  $\chi(x, z = 1, \tau)$  вдоль верхней границы ЖК-канала как в процессе прогрева (кривые с 1 по 5 номер), так и в процессе охлаждения (кривые с 6 по 9 номер) соответственно. И наконец, на рис. 4 представлены зависимости  $\chi(x = 0.5, z, \tau)$  по сечению ПОЖК-канала для случая трех значений ширины канала: (a)  $D = 2.0$  ( $d \sim 100$  nm), (b)  $D = 5.0$



**Рис. 5.** Эволюция распределения горизонтальной  $u(x, z, \tau)$  составляющей поля скорости  $\mathbf{v} = u\hat{i} + w\hat{k}$  по сечению сверхтонкого ( $D = 2.0$ ) ПОЖК-канала, для трех значений положения пространственной переменной  $x_k = 0.25k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Номера кривых соответствуют тем процессам, что показаны на рис. 2.



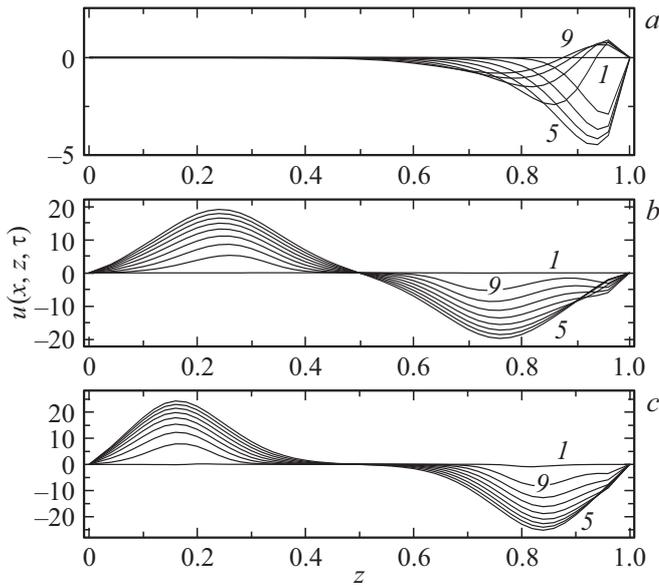
**Рис. 6.** То же что на рис. 5, но для вертикальной  $w(x, z, \tau)$  составляющей поля скорости  $\mathbf{v}$ .

( $d \sim 0.25 \mu\text{m}$ ), и (c)  $D = 10.0$  ( $d \sim 0.5 \mu\text{m}$ ) соответственно. Следует отметить, что с увеличением ширины ЖК-канала процент прогретого объема убывает с 50%, в случае  $D = 2.0$ , и до 10%, в случае  $D = 10.0$  соответственно.

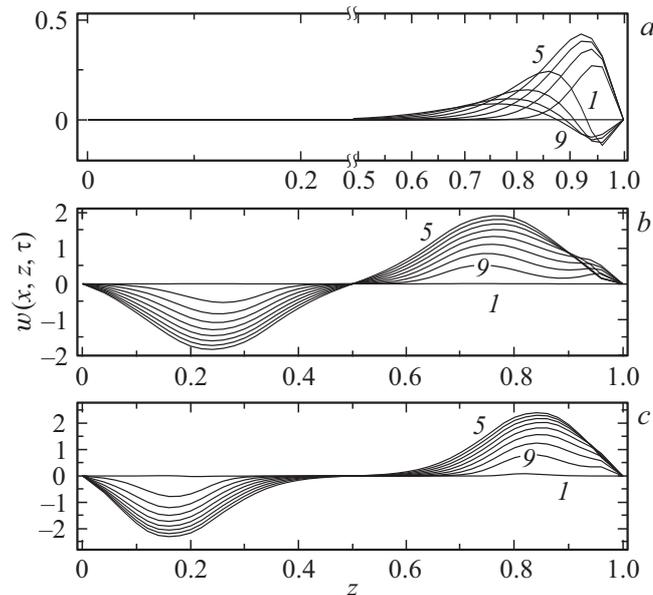
Эволюция распределения поля скорости  $\mathbf{v}(x, z, \tau) = u(x, z, \tau)\hat{i} + w(x, z, \tau)\hat{k}$  в наноразмерном ПОЖК-канале под действием как потока тепла  $\mathbf{q}$  направленного через верхнюю границу канала, так и двойного электрического слоя представлена на рис. 5–8. На рис. 5 и 6 представлены эволюции распределения горизонтальной  $u(x, z, \tau)$  (см. рис. 5) и вертикальной  $w(x, z, \tau)$  (см. рис. 6) составляющих поля скорости  $\mathbf{v}$  по сечению сверхтонкого ЖК-канала  $D = 2.0$  ( $d \sim 100$  nm), для трех значений положения пространственной переменной  $x_k = 0.25k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Кривые с 1 по 5 номер соответствуют временам  $\tau_k = \Delta\tau \times (k - 1)$  ( $k = 1, \dots, 5$ ;  $\Delta\tau = 0.0025$ ) (процесс нагревания ЖК-канала), в то время как кривые с 6 по 9 номер соответствуют временам  $\tau_k = \Delta\tau \times (k - 1)$  ( $k = 6, \dots, 9$ ;  $\Delta\tau = 0.0025$ ) (процесс охлаждения ЖК-канала) соответственно.

Прежде всего следует отметить, что эволюция горизонтальной составляющей поля скорости  $u$  в сверхтонком ЖК-канале ( $D = 2.0$ ) свидетельствует о том, что вблизи верхней более теплой границы канала формируется отрицательно направленный горизонтальный поток ЖК-материала. При этом максимальное значение  $|u| \sim 4.0$  ( $\sim 7.0$  nm/ns) достигается вблизи точки  $x = 0.5, z = 0.95$ , что на порядок больше величины вертикальной составляющей поля скорости  $|w| \sim 0.4$  ( $\sim 0.7$  nm/ns). При этом, в случае сверхтонкого ЖК-канала, практически 60% ( $0 \leq z \leq 0.60$ ) объема ЖК-фазы, отсчитанного от нижней границы канала, остается практически неподвижным. Следует также отметить, что в процессе охлаждения ЖК-канала скорость  $\mathbf{v} = u\hat{i} + w\hat{k}$  стремится к нулю, а поле температуры выравнивается по всему ЖК-каналу, спустя время  $\tau_R = 0.1$  ( $\sim 6.0$  ns).

С ростом ширины ЖК-канала, с величины  $D = 2.0$  ( $d \sim 100$  nm) до  $D = 10.0$  ( $d \sim 0.5 \mu\text{m}$ ), картина эволюции поля скорости  $\mathbf{v}$  под влиянием градиентов поля директора  $\nabla\hat{\mathbf{n}}$  и температуры  $\nabla\chi$  претерпевает существенное изменение (см. рис. 7 и 8). Прежде всего абсолютная величина как горизонтальной  $u$ , так и вертикальной  $w$  составляющих вектора скорости  $\mathbf{v}$  возрастает приблизительно в 5 раз. Во вторых, гидродинамический поток инициируемый термомеханической силой формирует вихревое течение направленное по часовой стрелке, с центром вращения в точке  $x = 0.5, z = 0.5$ . В случае  $D = 10.0$  наибольшее абсолютное значение горизонтальной составляющей вектора скорости  $|u| \sim 20.0$  ( $\sim 0.5 \mu\text{m}/\text{ns}$ ) (см. рис. 7), в то время как наибольшее абсолютное значение вертикальной составляющей вектора скорости  $|w| \sim 2.0$  ( $\sim 0.05 \mu\text{m}/\text{ns}$ ) (см. рис. 8) соответственно. За такое поведение поля скорости  $\mathbf{v} = u\hat{i} + w\hat{k}$  с ростом



**Рис. 7.** Эволюция распределения горизонтальной  $u(x, z, \tau)$  составляющей поля скорости  $\mathbf{v}$  по сечению ПОЖК-канала, для трех значений безразмерной ширины канала: (a)  $D = 2.0$ , (b) 5.0 и (c) 10.0 соответственно. Номера кривых соответствуют тем процессам, что показаны на рис. 2.



**Рис. 8.** То же что на рис. 7, но для вертикальной  $w(x, z, \tau)$  составляющей поля скорости  $\mathbf{v}$ .

ширины ЖК-канала ответственна термомеханическая сила, обусловленная взаимодействием градиентов поля директора  $\nabla \hat{\mathbf{n}}$  и температуры  $\nabla \chi$ . Следует отметить, что эволюция полярного угла  $\theta(x = 0.5, z, \tau)$  (см. рис. 1) в случае сверхтонкого ЖК-канала характеризуется выпуклым профилем  $\theta(x, z, \tau)$  по сечению канала на временах  $\tau_{in} = 0.01$  ( $\sim 0.6$  ns), в то время как в случае более широкого ЖК-канала

( $D = 10.0$  ( $d \sim 0.5 \mu\text{m}$ )) эволюция полярного угла  $\theta(x = 0.5, z, \tau)$  характеризуется двумя практически симметричными „горбами“ (см. рис. 1(b) и (c)). В результате более сложной эволюции поля директора, с ростом ширины ЖК-канала, формируется более сложная картина эволюции градиента поля директора  $\nabla \hat{\mathbf{n}}$ . Результаты вычислений показывают, что основным фактором, влияющим на эволюцию градиента поля директора, является статическое электрическое поле, формирующееся на границах ЖК-канала. Так, в случае более широкого ЖК-канала ( $D = 10.0$ ), под действием двойного электрического слоя с плотностью заряда  $\sigma = 10^{-2} \text{ C/m}^2$ , внутри канала формируется полость ( $0.35 \leq z \leq 0.55$ ), где влияние как электрических сил, так и лазерного излучения пренебрежимо мало. А поскольку прогревание ЖК-канала посредством лазерного излучения простирается вглубь только на 40 nm, то величины разнонаправленных горизонтальных потоков, которые формируются вблизи верхней и нижней ограничивающих поверхностей, достаточно для формирования вихревого потока в более широком ЖК-канале.

Как уже выше было отмечено, величина параметра  $\delta_1(D = 2.0)$  в 25 раз больше величины  $\delta_1(D = 10.0)$ , в то время как величина параметра  $\delta_3(D = 2.0)$  приблизительно в 245 раз больше, чем величина  $\delta_3(D = 10.0)$ . На величину этих параметров влияет величина порогового напряжения  $E_{th} = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_1}{\epsilon_0 \epsilon_a}}$ , которая, в свою очередь, обратно пропорциональна ширине  $d$  наноразмерного ЖК-канала. Поскольку деформация изначально однородно ориентированного ЖК-канала, при наложении внешнего, перпендикулярно направленного электрического поля  $\mathbf{E}$ , возникает только при полях  $E > E_{th}$ , то ширина  $d$  играет главную роль в процессе формирования градиента поля директора  $\nabla \hat{\mathbf{n}}$  в тонких и сверхтонких ЖК-каналах. Таким образом, величина  $E_{th}$ , а вслед за ней и ширина ЖК наноканала ответственны за столь широкий разброс значений параметров  $\delta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), входящих в систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих как процесс переориентации поля директора, так и формирования поля скорости и поля температуры.

#### 4. Заключение

В предлагаемой работе численными методами, в рамках нелинейного обобщения классической теории Эриксона-Лесли, с учетом баланса энтропии, описано несколько сценариев формирования гидродинамических течений в наноразмерном планарно ориентированном жидкокристаллическом (ПОЖК) канале под действием как сфокусированного лазерного излучения, так и с учетом двойного электрического слоя, естественно возникающего на границе раздела ЖК-фаза/твердое тело. Учет термомеханических вкладов в выражении для сдви-

гового напряжения и в уравнении баланса энтропии позволил описать процесс формирования вихревого потока в тонком ПОЖК-канале.

Исследованные в работе особенности, связанные с реакцией ЖК-материала, инкапсулированного в тонкие и сверхтонкие каналы, на локально формирующиеся градиенты температуры и поля директора, необходимо учитывать при создании сенсоров и датчиков используемых в биотехнологических приложениях, медицине и биометрических оптических системах.

## Приложение

Уравнение баланса моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, имеет вид

$$\mathbf{T}_{el} + \mathbf{T}_{elast} + \mathbf{T}_{vis} + \mathbf{T}_{tm} = 0,$$

где  $\mathbf{T}_{el} = -\epsilon_0 \epsilon_a \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}})$  — электрический,  $\mathbf{T}_{elast} = \frac{\delta \mathcal{W}_{elast}}{\delta \hat{\mathbf{n}}} \times \hat{\mathbf{n}}$  — упругий,  $\mathbf{T}_{vis} = \frac{\delta \mathcal{R}^{vis}}{\delta \hat{\mathbf{n}}_t} \times \hat{\mathbf{n}}$  — вязкий и  $\mathbf{T}_{tm} = \frac{\delta \mathcal{R}^{tm}}{\delta \hat{\mathbf{n}}_t} \times \hat{\mathbf{n}}$  — термомеханический вклады в баланс моментов соответственно. Здесь  $\hat{\mathbf{n}}_t \equiv \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt}$  — материальная производная вектора  $\hat{\mathbf{n}} = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_z \hat{\mathbf{k}}$ .

Уравнение баланса линейных моментов, действующих на единицу объема ЖК-фазы, имеет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

где  $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + u v_{,x} + w v_{,z}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{el} + \boldsymbol{\sigma}^{vis} + \boldsymbol{\sigma}^{tm} - \mathcal{P} \boldsymbol{\mathcal{E}}$  — полное выражение для тензора напряжения (ТН), состоящее из упругого  $\boldsymbol{\sigma}^{el} = -\frac{\partial \mathcal{W}_{el}}{\partial \nabla \hat{\mathbf{n}}} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{n}})^T$ , вязкого  $\boldsymbol{\sigma}^{vis} = \frac{\delta \mathcal{R}^{vis}}{\delta \nabla \mathbf{v}}$  и термомеханического  $\boldsymbol{\sigma}^{tm} = \frac{\delta \mathcal{R}^{tm}}{\delta \nabla \mathbf{v}}$  вкладов в ТН соответственно. Здесь  $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{vis} + \mathcal{R}^{tm} + \mathcal{R}^{th}$  — полная диссипационная функция Рэлея,  $\mathcal{W}_{el} = \frac{1}{2} [K_1 (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + K_3 (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2]$  — плотность упругой энергии,  $K_1$  и  $K_3$  — продольный и поперечный коэффициенты упругости,  $\mathcal{P}$  — гидростатическое давление в ЖК-системе,  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  — единичный тензор, в то время как  $\mathcal{R}^{vis} = \alpha_1 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \gamma_1 (\hat{\mathbf{n}}_t - \mathbf{D}_a \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + 2\gamma_2 (\hat{\mathbf{n}}_t - \mathbf{D}_a \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}) + \alpha_4 \mathbf{D}_s : (\alpha_5 + \alpha_6) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}})$  — вязкий, а  $\frac{1}{\xi} \mathcal{R}^{tm} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T) \mathbf{D}_s : \mathbf{M} + \nabla T \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T) (\hat{\mathbf{n}}_t - \mathbf{D}_a \cdot \hat{\mathbf{n}} - 3\mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} + 3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla T + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) \nabla T \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}}_t \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla T + \frac{1}{2} \mathcal{M}_0 \nabla T \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T) \mathcal{M}_0 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \frac{1}{2} \mathcal{M}_0 \hat{\mathbf{n}}_t \cdot \nabla T$  — термомеханический и  $\mathcal{R}^{th} = \frac{1}{T} \times (\lambda_{\parallel} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T))^2 + \lambda_{\perp} (\nabla T - \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T))^2$  — термический вклады в полное выражение для функции Рэлея  $\mathcal{R}$  соответственно. Здесь  $\alpha_1 - \alpha_6$  — коэффициенты вязкости Лесли,  $\gamma_1(T)$  и  $\gamma_2(T)$  — коэффициенты вращательной вязкости ЖК-системы,  $\xi$  — термомеханическая постоянная,  $\lambda_{\parallel}$  и  $\lambda_{\perp}$  — коэффициенты теплопроводности

ЖК-системы вдоль и поперек направления директора  $\hat{\mathbf{n}}$  соответственно. Тензоры  $\mathbf{D}_s = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$  и  $\mathbf{D}_a = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T]$  — являются симметричным и асимметричным вкладом в тензор скорости деформации,  $\mathbf{M} = \frac{1}{2} [\nabla \hat{\mathbf{n}} + (\nabla \hat{\mathbf{n}})^T]$  и  $\mathcal{M}_0 = \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}$  — скалярный инвариант тензора  $\mathbf{M}$ .

Уравнение теплопроводности описывающее изменение поля температуры  $T(x, z, t)$  под действием потока тепла  $\mathbf{q}$  через верхнюю границу ПОЖК-канала имеет вид

$$\rho C_P \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{Q},$$

где  $\mathbf{Q} = -T \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \nabla T}$  — есть тепловой поток в ЖК-системе, а  $C_P$  — коэффициент теплоемкости соответственно.

## Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки (гранты 3.11888.2018/11.12 и 3.9585.2017/8.9) и при финансовой поддержке РФФИ и Немецкого научно-исследовательского сообщества в рамках научного проекта № 20-52-12040.

## Список литературы

- [1] S.J. Woltman, G.D. Jay, G.P. Crawford. Nature Mater. **6**, 929 (2007).
- [2] J.G. Cuennet, A.E. Vasdekis, L. De Sio, D. Platis. Nature Photonics. **5**, 234 (2011).
- [3] A.P.H.J. Schenning, G.P. Crawford, D.J. Broer. Liquid Crystal Sensors. CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton (2018). 164 p.
- [4] T.M. Squires, S.R. Quake. Rev. Mod. Phys. **77**, 977 (2005).
- [5] P.G. de Gennes, J. Prost. The Physics of Liquid Crystals. 2nd ed. Oxford University Press, Oxford (1995).
- [6] A.V. Zakharov, A.A. Vakulenko. J. Chem. Phys. **127**, 084907 (2007).
- [7] J.N. Israellachvili. Intermolecular and Surface Forces. Academic Press, London (1992). 450 p.
- [8] J.L. Ericksen. Arch. Ration. Mech. Anal. **4**, 231 (1960).
- [9] F.M. Leslie. Arch. Ration. Mech. Anal. **28**, 265 (1968).
- [10] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. Наука, М. (1986). 736 с.
- [11] И.С. Березин, Н.Р. Жидков. Методы вычислений. Физматгиз, М. (1964). 464 с.

Редактор Ю.Э. Кумаев