

Соотношения неопределённости числа фотонов и оператора фазы электромагнитного поля для фазовых квантовых суперпозиций когерентных состояний

© А.В. Козловский

Физический институт РАН им. П.Н.Лебедева,
119991 Москва, Россия

e-mail: kozlovskiyav@lebedev.ru

Поступила в редакцию 09.07.2019 г.

В окончательной редакции 26.11.2019 г.

Принята к публикации 06.12.2019 г.

Проведено исследование различных соотношений неопределённости для фазы (так называемого оператора Пегга-Барнетта) электромагнитного поля и числа фотонов, тригонометрических функций фазы и числа фотонов, а также тригонометрических функций фазы и фазы поля. Рассмотрено электромагнитное поле в квантовых состояниях фазовых суперпозиций когерентных состояний, представляющих собой общие суперпозиции двух когерентных состояний с одинаковыми модулями и произвольными фазами. Рассматриваются и сравниваются между собой жёсткие соотношения неопределённости (неравенство Коши) и мягкие соотношения неопределённости (неравенства Гейзенберга).

Ключевые слова: принцип неопределённости, квантовые флуктуации фазы, эрмитов оператор фазы, суперпозиции когерентных состояний.

DOI: 10.21883/OS.2020.03.49065.235-19

Введение

Использование неклассических состояний электромагнитного (ЭМ) поля позволяет улучшать фазовую чувствительность интерферометров, широко применяемых для прецизионных измерений. Основанная на соотношении неопределённости (СН) для числа фотонов и фазы поля оценка чувствительности интерферометров (в пределах квантовых флуктуаций) использует предположение о канонической сопряженности операторов этих наблюдаемых. Оценка (скейлинг) уровня флуктуаций проводится с помощью так называемого гейзенберговского предела квантовых флуктуаций $\delta\varphi = \sqrt{\langle(\Delta\varphi)^2\rangle} \sim 1/\langle n \rangle$ или предела дробового шума $\delta\varphi \sim 1/\sqrt{\langle n \rangle}$ [1–3], характерного для когерентного состояния ЭМ поля. Использование некоторых неклассических состояний может значительно улучшать фазовую чувствительность интерферометров и позволяет достигать максимального её значения $\delta\varphi \sim 1/\langle n \rangle$ для большого значения среднего числа фотонов $\langle n \rangle$ [2,3].

Эрмитов оператор фазы поля, предложенный Пеггом и Барнеттом [4–9], позволяет провести точные квантовомеханические расчёты флуктуаций фазы и СН для различных квантовых состояний поля и установить пределы точности интерферометрических измерений, обусловленные квантовыми флуктуациями. Исследования флуктуаций фазы и их возможной минимизации (например, в случае сжатого когерентного состояния) проведены в [10–13].

Квантовое состояние ЭМ поля, представляющее собой суперпозицию когерентных состояний [14–19] относится к числу неклассических состояний поля, не имеющих классического аналога, тогда как квантовое описание поля в когерентном состоянии является наиболее близким к классическому описанию ЭМ поля. Неклассичность суперпозиций когерентных состояний проявляется в виде квадратурного сжатия и субпуассоновской статистики числа фотонов поля, а также плотности вероятности в фазовом пространстве для них оказывается отрицательной или обладает сингулярностями выше чем δ -функции.

В работах [20–22] показана возможность экспериментальных измерений флуктуаций фазы света, используя метод оптической гомодинной томографии совместно с теорией эрмитового оператора фазы Пегга-Барнетта. В [20,21] экспериментально измерены флуктуации фазы света в состоянии сжатого вакуума. В работе [22] измерены правые и левые части СН Гейзенберга для света в когерентном состоянии.

Целью настоящей работы является исследование СН для фазы и числа фотонов поля, косинуса фазы и числа фотонов поля, а также фазы и косинуса фазы поля. Расчёты проведены в рамках теории Пегга-Барнетта для эрмитового оператора фазы поля. Отдельно для указанного квантового состояния поля рассмотрены СН Гейзенберга (мягкое соотношение неопределённости, МСН) и жёсткие соотношения неопределённости (ЖСН, неравенство Коши). Найдены условия, при которых ЖСН и МСН значительно различаются между собой.

ЖСН и МСН для эрмитова оператора фазы

Рассмотрим операторное неравенство Коши для произвольных эрмитовых операторов поля \hat{A} и \hat{B} следующего вида:

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq |\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle|^2, \quad (1)$$

где

$$\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle, \quad \Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle.$$

Нетрудно убедиться, что среднее произведения в правой части (1) равно

$$\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle = \langle\hat{A}\hat{B}\rangle - \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle. \quad (2)$$

Теперь неравенство Коши (1) может быть записано в следующем виде:

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle + \langle\Delta\hat{B}\Delta\hat{A}\rangle + \langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|^2. \quad (3)$$

Опуская в правой части неравенства (3) два первых слагаемых, мы приходим к МСН для операторов \hat{A} и \hat{B} или к СН Гейзенберга

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|^2. \quad (4)$$

Правая часть соотношения (4) определяется только средним квантово-механическим коммутатора операторов.

Отметим, что принцип неопределённости Гейзенберга, выражением которого является неравенство (4), в качестве необходимого условия одновременного точного измерения наблюдаемых системы A и B требует выполнения $\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle = 0$ для операторов наблюдаемых \hat{A} и \hat{B} .

Поскольку верно равенство (2), точное (жёсткое) СН (3) может быть записано также в следующем виде [23,24]:

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq |\langle\hat{A}, \hat{B}\rangle|^2, \quad \langle\hat{A}, \hat{B}\rangle \equiv \langle\hat{A}\hat{B}\rangle - \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle. \quad (5)$$

Правая часть (5) определяется величиной центрального корреляционного момента операторов $\langle\hat{A}, \hat{B}\rangle = \langle\Delta\hat{A}\Delta\hat{B}\rangle$ и не зависит в явном виде от коммутатора этих операторов.

Из неравенства (5) непосредственно следует, что необходимым условием одновременного точного измерения наблюдаемых системы A и B ($\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle = 0$, $\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle = 0$) является выполнение равенства $\langle\hat{A}, \hat{B}\rangle = 0$, т.е. равенства нулю квантовой ковариации операторов наблюдаемых \hat{A} и \hat{B} . Это равенство также является необходимым условием точного измерения одной из наблюдаемых A и B ($\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle = 0$, $\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \neq 0$ или $\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle \neq 0$, $\langle(\Delta\hat{B})^2\rangle = 0$).

Статистическая независимость операторов квадратур поля является достаточным, но не необходимым условием равенства нулю центрального корреляционного момента этих операторов.

Рассмотрим далее в качестве одного из операторов, входящих в СН эрмитов, оператор фазы поля, а также его тригонометрические функции.

В работах [4–9] авторы рассмотрели решение уравнений на собственные функции фазовой переменной в дискретном спектре собственных значений фазы. Расчёты показали, что собственные вектора $|\theta_m\rangle$ операторов фазы поля, рассматриваемые в конечномерном базисе фоковских состояний, для собственных значений фазы

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{S+1}, \quad m = 0, 1, \dots, S, \quad (6)$$

где $(S+1)$ — неограниченно большая, но конечная размерность базиса фоковских состояний, θ_0 — произвольное число, определяющее интервал изменения собственных значений фазы ($\theta_0 \leq \theta_m < \theta_0 + 2\pi$), составляют полный ортонормированный базис векторов состояний. В работах Пегга и Барнетта [4,5] предложено рассматривать дискретный базис собственных векторов состояний фазы в $(S+1)$ -мерном подпространстве фоковских состояний для собственных значений (6) в виде

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{S+1}} \sum_{n=0}^S e^{in\theta_m} |n\rangle. \quad (7)$$

Эрмитов оператор фазы $\hat{\varphi}_\theta$ с собственными значениями θ_m при этом определяется согласно

$$\hat{\varphi}_\theta = \sum_{m=0}^S \theta_m |\theta_m\rangle\langle\theta_m|, \quad \hat{\varphi}|\theta_m\rangle = \theta_m |\theta_m\rangle. \quad (8)$$

Важной особенностью оператора фазы $\hat{\varphi}$, определяемого согласно (8)–(6), является то, что результаты расчётов средних значений и дисперсий фазы поля качественно зависят от выбора параметра θ_0 . За исключением фоковских $|n\rangle$ и собственных состояний оператора фазы $|\theta_m\rangle$, для которых средние и дисперсии не зависят от θ_0 , только правильный выбор значения параметра θ_0 обеспечивает получение физически осмысленных результатов при расчёте этих средних величин.

Оператор фазы (8) использовался в ряде работ для расчёта средних и дисперсий (флуктуаций) фазы ЭМ поля в различных его квантовых состояниях. Так, в [4–6] найдены средние квантово-механической фазы поля в фоковском $|n\rangle$, когерентном $|\alpha\rangle$ и собственном состоянии фазы $|\theta_m\rangle$ поля. В работах [10–13] проведены расчёты средних значений фазы для двухфотонного (сжатого) когерентного состояния. В [18,19] рассмотрены флуктуации оператора фазы в состояниях суперпозиций флуктуации оператора фазы в состояниях суперпозиций $N_\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle)$. В работе [25] найдены флуктуации фазы для общих фазовых суперпозиций когерентных состояний.

Векторы квантовых состояний суперпозиции двух когерентных состояний поля в частном случае, когда когерентные состояния $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$, составляющие суперпозицию, имеют одинаковые значения амплитуд $n_\alpha = n_\beta$,

$n_\alpha \equiv |\alpha|^2$, $n_\beta \equiv |\beta|^2$, но разные значения фазовых углов $\varphi_\alpha \neq \varphi_\beta$, носят название фазовых суперпозиций. В настоящей работе нами рассмотрены и проанализированы свойства СН для эрмитова оператора фазы ЭМ поля в состояниях фазовых суперпозиций когерентных состояний вида

$$\begin{aligned} |\Phi_{\alpha,\beta}(\xi)\rangle &= N_{\alpha,\beta,\xi}(|\alpha\rangle + e^{i\xi}|\beta\rangle), \\ \alpha &= \sqrt{n_\alpha}e^{i\varphi_\alpha}, \quad \beta = \sqrt{n_\alpha}e^{i\varphi_\beta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Получены и проанализированы СН операторов фазы ЭМ поля и числа фотонов, а также тригонометрических функций оператора фазы в состояниях (9) для любых значений ξ .

Константы нормировки, входящие в (9), которые могут быть найдены из условия нормировки $\langle \Psi_{\alpha,\beta}(\xi) | \Psi_{\alpha,\beta}(\xi) \rangle = 1$, есть

$$N_{\alpha,\beta,\xi} = 1/\sqrt{2(1 + \cos \Theta e^{-\delta/2})}, \quad (10)$$

где

$$\delta \equiv |\alpha - \beta|^2 = 2n_\alpha(1 - \cos \Delta), \quad (11)$$

$$n_\alpha = |\alpha|^2, \quad n_\beta = n_\alpha, \quad (12)$$

$$\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha, \quad (13)$$

$$\Theta \equiv \xi + n_\alpha \sin \Delta. \quad (14)$$

Средние значения и дисперсии операторов числа фотонов и фазы для фазовых суперпозиций когерентных состояний поля

Среднее число фотонов для поля в состоянии фазовой суперпозиции когерентных состояний имеют вид [24]

$$\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle = n_\alpha \frac{1 + e^{-\delta/2} \cos(\Delta + \Theta)}{1 + e^{-\delta/2} \cos \Theta}. \quad (15)$$

Дисперсии (флуктуации) числа фотонов поля $\langle (\Delta n)^2 \rangle \equiv \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$ в состоянии фазовой суперпозиции могут быть вычислены с использованием формулы (15) для среднего числа фотонов $\langle n \rangle \equiv \langle a^+ a \rangle$ и следующего выражения для среднего квадрата числа фотонов:

$$\langle n^2 \rangle = n_0 \frac{1 + n_\alpha + e^{-\delta/2} [\cos(\Delta + \Theta) + n_\alpha \cos(2\Delta + \Theta)]}{1 + e^{-\delta/2} \cos \Theta}. \quad (16)$$

Использование приведённых формул позволяет также найти фактор Фано поля $F \equiv \langle (\Delta n)^2 \rangle / \langle n \rangle$,

$$\begin{aligned} F &= 1 + n_\alpha \left\{ \frac{1 + e^{-\delta/2} \cos(2\Delta + \Theta)}{1 + e^{-\delta/2} \cos(\Delta + \Theta)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 + e^{-\delta/2} \cos(\Delta + \Theta)}{1 + e^{-\delta/2} \cos \Theta} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Значение фактора Фано $F < 1$ указывает на присутствие субпуассоновской статистики фотонов, т.е. наличие

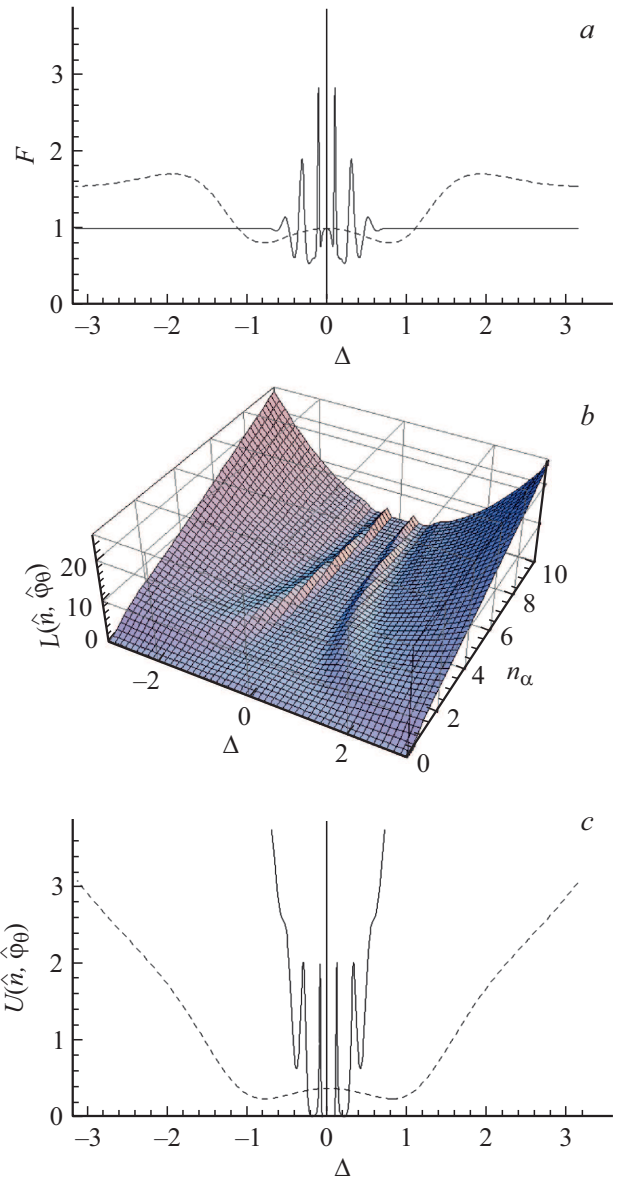


Рис. 1. (а) Зависимости фактора Фано $F = \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle_{p\theta_0,p}$ от $\Delta = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ в интервале от $-\pi$ до π для поля в состоянии фазовой суперпозиции при $n_\alpha = 1$ (штриховая линия) и $n_\alpha = 30$ (непрерывная линия) в случае $\xi = 0$. (б) Зависимость левой части СН $L(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) \equiv \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle_{p,s} \langle (\Delta \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{p,s}$ от n_α и разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ для поля в состоянии фазовой суперпозиции в случае $\xi = 0$. (с) Зависимость разности левой и правой частей СН $U(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) \equiv L(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) - R(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta)$ от разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ для $n_\alpha = 1$ (штриховая) и $n_\alpha = 0$ (непрерывная линия) для поля в состоянии фазовой суперпозиции в случае $\xi = 0$.

неклассического состояния поля, обладающего сжатием по числу фотонов, т.е. уровнем квантовых флуктуаций числа фотонов ниже уровня дробового шума.

На рис. 1,а приведены зависимости фактора Фано $F(\Delta)$ при $n_\alpha = 1$ и $n_\alpha = 30$ для $\xi = 0$. Флуктуации числа фотонов для поля в фазовой суперпозиции когерентных состояний обладают сложной осциллирующей

зависимостью от $-\pi \leq \Delta \leq \pi$, причём статистика фотонов (в зависимости от значения этой величины для фиксированных значений n_α, ξ) может быть как супер- ($F > 1$), так и субпуассоновской ($F < 1$). Зависимости $F(\Delta)$ имеют осцилляционный характер на интервале изменения Δ , величина которого определяется значением величины n_α . На рисунке видно, что для $n_\alpha \gg 1$ значение флуктуаций числа фотонов быстро осциллирует в интервале изменения $|\Delta| < 0.5$, и статистика фотонов является как супер-, так субпуассоновской. Вне указанного интервала изменения Δ статистика числа фотонов пуассоновская ($F = 1$). Для $n_\alpha \sim 1$, как видно на рис. 1, а при $n_\alpha = 1$, статистика фотонов меняется на всём интервале изменения Δ от суперпуассоновской к субпуассоновской. Особый случай представляют собой суперпозиции с $\xi \approx \pm\pi$. Для состояний суперпозиций такого вида субпуассоновская статистика числа фотонов имеет место для любых значений Δ при малых значениях n_α (~ 1).

Флуктуации и средние значения операторов фазы поля в состояниях фазовых суперпозиций когерентных состояний

Прежде чем перейти к вычислению средних значений и дисперсий эрмитова оператора фазы (8), (7), (6) для поля в общей суперпозиции когерентных состояний найдём средние значения и дисперсии оператора фазы поля в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$ для любых значений параметра θ_0 :

$$\langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\alpha, \theta_0} \equiv \langle \alpha | \hat{\varphi}_\theta | \alpha \rangle, \quad \langle \hat{\varphi}_\theta^2 \rangle_{\alpha, \theta_0} \equiv \langle \alpha | \hat{\varphi}_\theta^2 | \alpha \rangle, \quad (18)$$

где

$$\hat{\varphi}_\theta^2 = \sum_{m=0}^S \theta_m^2 |\theta_m\rangle \langle \theta_m|. \quad (19)$$

Поскольку в базисе фоковских состояний векторы когерентных состояний записываются в виде разложения

$$|\alpha\rangle = e^{-n_\alpha/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_\alpha^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{in\varphi_\alpha} |n\rangle, \quad (20)$$

с помощью (20) и (7) получаем

$$\langle \theta_m | \alpha \rangle = \frac{e^{-n_\alpha/2}}{\sqrt{S+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_\alpha^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{in(\varphi_\alpha - \theta_m)}. \quad (21)$$

Для среднего значения $\langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\alpha, \theta_0}$ находим в результате суммирования по m и взятия предела $S \rightarrow \infty$ следующее выражение для среднего значения оператора фазы для когерентного состояния поля:

$$\langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\alpha, \theta_0} = \theta_0 + \pi + f_1, \quad (22)$$

$$f_1 \equiv 2e^{-n_\alpha/2} \sum_{n>n'}^{\infty} \frac{n_\alpha^{(n+n')/2}}{\sqrt{n!n'}} \frac{\sin[(n-n')(\theta_0 - \varphi_\alpha)]}{n-n'}. \quad (23)$$

Если для произвольной величины θ_0 в формулах (6), (22) и (23) выбрать значение

$$\theta_0 = \varphi_\alpha - \pi \frac{S}{S+1}, \quad (24)$$

то нетрудно убедиться, что в этом случае $f_1 = 0$ и

$$\langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_\alpha = \varphi_\alpha. \quad (25)$$

Используя формулы (19) и (21) для среднего квадрата фазы в когерентном состоянии поля, получаем для любого значения θ_0 следующее:

$$\langle \hat{\varphi}_0^2 \rangle_{\alpha, \theta_0} = \frac{\pi^2}{3} + (\theta_0 + \pi)^2 + 2\theta_0 f_1 + f_2, \quad (26)$$

где

$$f_2 \equiv 4e^{-n_\alpha} \sum_{n>n'}^{\infty} \frac{n_\alpha^{(n+n')/2}}{\sqrt{n!n'}} \frac{\cos[(n-n')(\theta_0 - \varphi_\alpha)]}{(n-n')^2}. \quad (27)$$

В свою очередь, принимая величину θ_0 в виде (24), находим для среднего квадрата фазы формулу

$$\langle \hat{\varphi}_0^2 \rangle_\alpha = \frac{\pi^2}{3} + \varphi_\alpha^2 + 4e^{-n_\alpha} \sum_{n>n'}^{\infty} (-1)^{n-n'} \frac{n_\alpha^{(n+n')/2}}{\sqrt{n!n'}} \frac{1}{(n-n')^2}, \quad (28)$$

а для дисперсии фазы вследствие равенства (25) получаем следующую известную [7,17] формулу:

$$\langle (\Delta \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_\alpha = \frac{\pi^2}{3} + 4e^{-n_\alpha} \sum_{n>n'}^{\infty} (-1)^{n-n'} \frac{n_\alpha^{(n+n')/2}}{\sqrt{n!n'}} \frac{1}{(n-n')^2}. \quad (29)$$

Перейдем далее к расчету средних значений и дисперсий фазы поля в состоянии общей суперпозиции когерентных состояний вида

$$|\Psi_{\alpha,\beta}(\xi)\rangle = N_{\alpha,\beta,\xi} (|\alpha\rangle + e^{i\xi} |\beta\rangle), \quad (30)$$

$$\alpha = \sqrt{n_\alpha} e^{i\varphi_\alpha}, \quad \beta = \sqrt{n_\beta} e^{i\varphi_\beta}.$$

Входящий в (30) нормировочный фактор в данном случае равен

$$N_{\alpha,\beta,\xi} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \Theta e^{-\delta/2})}}, \quad (31)$$

где введены обозначения $\delta \equiv |\alpha - \beta|^2 = n_\alpha + n_\beta - 2\sqrt{n_\alpha n_\beta} \cos \Delta$, $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$, $\Theta \equiv n_\alpha \sin \Delta + \xi$.

Средние и дисперсии эрмитова оператора фазы поля, определяемого согласно (8)–(6), для поля в общей суперпозиции когерентных состояний (30) и произвольной θ_0 есть

$$\langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\alpha,\beta,\theta_0} \equiv \langle \Psi_{\alpha,\beta}(\xi) | \hat{\varphi}_\theta | \Psi_{\alpha,\beta}(\xi) \rangle, \quad (32)$$

$$\langle \hat{\varphi}_\theta^2 \rangle_{\alpha,\beta,\theta_0} \equiv \langle \Psi_{\alpha,\beta}(\xi) | \hat{\varphi}_\theta^2 | \Psi_{\alpha,\beta}(\xi) \rangle.$$

Подставляя (8), (30) и (21) в первое из равенств (32) и используя следующее из (7), (20) соотношение (21), выполняя суммирование по m , после взятия предела

$m \rightarrow \infty$ находим для среднего фазы поля в состоянии общей суперпозиции следующее выражение:

$$\langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\alpha,\beta,\theta_0} = N_{\alpha,\beta,\xi}^2 \left\{ \langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\alpha,\theta_0} + \langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\beta,\theta_0} + 2e^{\frac{n_\alpha+n_\beta}{2}} [S_0(\theta_0 + \pi) + S_1] \right\}, \quad (33)$$

где

$$S_0 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_\alpha^{n/2} n_\beta^{n/2}}{n!} \cos[\Delta n + \xi] = e^{\sqrt{n_\alpha n_\beta} \cos \Delta} \times \cos \left[\sqrt{n_\alpha n_\beta} \sin \Delta + \xi \right], \quad (34)$$

$$S_1 \equiv \sum_{n \neq n'}^{\infty} \frac{n_\alpha^{n/2} n_\beta^{n'/2}}{\sqrt{n! n'!}} \frac{\sin[\varphi_\beta n' - \varphi_\alpha n + \theta_0(n - n') + \xi]}{n - n'}. \quad (35)$$

Величины $\langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\alpha,\theta_0}$ и $\langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\beta,\theta_0}$, входящие в (33), представляют собой средние значения фазы поля в когерентном состоянии для произвольного значения θ_0 . Для них нами выше получены выражения (22), (23). Среднее квадрата оператора фазы (19) в состоянии фазовой суперпозиции (30) для произвольного значения параметра θ_0 также находится путем суммирования по m и взятия предела $S \rightarrow \infty$ и имеет следующий вид:

$$\langle \hat{\varphi}_\theta^2 \rangle_{\alpha,\beta,\theta_0} = N_{\alpha,\beta,\xi}^2 \left\{ \langle \hat{\varphi}_\theta^2 \rangle_{\alpha,\theta_0} + \langle \hat{\varphi}_\theta^2 \rangle_{\beta,\theta_0} + 2e^{\frac{n_\alpha+n_\beta}{2}} \times \left\{ \left[\frac{4}{3} \pi^2 + \theta_0(\theta_0 + 2\pi) \right] S_0 + 2\theta_0 S_1 + 2S_2 \right\} \right\}, \quad (36)$$

$$S_2 \equiv \sum_{n \neq n'}^{\infty} \frac{n_\alpha^{n/2} n_\beta^{n'/2}}{\sqrt{n! n'!}} \frac{\cos[\varphi_\beta n' - \varphi_\alpha n + \theta_0(n - n') + \xi]}{(n - n')^2}. \quad (37)$$

Величины $\langle \hat{\varphi}_\theta^2 \rangle_{\alpha,\theta_0}$ и $\langle \hat{\varphi}_\theta^2 \rangle_{\beta,\theta_0}$, входящие в (28), представляют собой средние значения квадрата фазы поля в когерентном состоянии для произвольного значения θ_0 . Для них нами выше получено выражение (26). В частном случае фазовых суперпозиций в формулах (33)–(37) полагается $n_\alpha = n_\beta$, а для θ_0 выбирается значение, соответствующее данному квантовому состоянию.

Для расчетов средних значений и дисперсий фазы поля в состояниях фазовых суперпозиций когерентных состояний (9) нами используется следующее значение параметра θ_0 , определяющего дискретный базис собственных функций оператора $\hat{\varphi}_\theta$, соответствующий рассматриваемым нами квантовым состояниям поля:

$$\theta_{0,p} = \frac{\varphi_\alpha + \varphi_\beta}{2} - \pi \frac{S}{S+1}. \quad (38)$$

Подстановка (38) в общие выражения для среднего значения фазы (33)–(35) для поля в состояниях (9) позволяет получить для этой величины формулу

$$\langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{p.s.} = \frac{\varphi_\alpha + \varphi_\beta}{2}. \quad (39)$$

Из (36), (37) и (33) с учетом (39) находим для дисперсии фазы поля

$$\langle (\Delta \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{p.s.} \equiv \langle \hat{\varphi}_\theta^2 \rangle_{p.s.} - \langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{p.s.}^2.$$

в фазовой суперпозиции когерентных состояний (9) выражение [25]

$$\langle (\Delta \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{p.s.} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{8e^{-n_\alpha}}{1 + e^{-2n_\alpha \sin^2 \frac{\Delta}{2}} \cos(n_\alpha \sin \Delta + \xi)} \times \sum_{n > n'}^{\infty} (-1)^{n-n'} \frac{n_\alpha^{(n+n')/2}}{\sqrt{n! n'!}} \frac{\cos(\frac{n\Delta+\xi}{2}) \cos(\frac{n'\Delta+\xi}{2})}{(n-n')^2}, \quad (40)$$

где $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$.

Из формулы (40) следует, что флуктуации фазы поля в состояниях фазовых суперпозиций зависят не от отдельных значений фаз когерентных состояний, составляющих суперпозицию, а от разности этих фаз $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$.

Расчеты показали, что с ростом n_α при уменьшении абсолютной величины разности фазовых углов когерентных состояний $|\Delta|$ в интервале изменения Δ от π до $-\pi$ для любых значений ξ величина флуктуаций (дисперсий) фазы стремится к 0, а при увеличении $|\Delta|$ флуктуации фазы возрастают. При $n_\alpha \gg 1$ для дисперсии фазы поля в общем фазовом состоянии выполняется приближенное равенство

$$\langle (\Delta \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{p.s.} \approx \frac{\Delta^2}{4}. \quad (41)$$

Формула (41) означает, что для поля как в мезо-, так и в макроскопическом состоянии (для сколь угодно большого значения среднего числа фотонов) флуктуации фазы поля в общей фазовой суперпозиции когерентных состояний велики при больших разностях фазовых углов когерентных состояний $|\Delta|$.

Расчеты также показывают, что наибольшими квантовыми флуктуациями фазы обладают фазовые суперпозиции когерентных состояний поля при $|\Delta| = \pi$ для любых значений $n_\alpha > 0$ и ξ , т.е. состояния „шредингеровского кота“ вида

$$|\Psi_{\alpha,-\alpha}(\xi)\rangle = N_{\alpha,-\alpha,\xi} (|\alpha\rangle + e^{i\xi} |-\alpha\rangle).$$

Отметим, что в случае когерентного состояния поля (т.е. при $\Delta = 0$) флуктуации фазы поля в мезо- и макроскопических состояниях ($n_\alpha \gg 1$) близки к нулю.

Корреляции операторов фазы и числа фотонов и СН число фотонов – фаза поля в состояниях фазовых суперпозиций когерентных состояний

Используя равенства (8) и (7), (6), для оператора произведения операторов числа фотонов и фазы можно получить

$$\hat{n} \hat{\varphi}_\theta = \theta_0 \hat{n} + \frac{2\pi}{(S+1)^2} \sum_{m=0}^S \sum_{n,n'=0}^{\infty} e^{i(n-n')\theta_m} nm |n\rangle \langle n'|,$$

$$\theta_0 = \frac{\varphi_\alpha + \varphi_\beta}{2} - \pi, \quad (42)$$

поскольку

$$\hat{\varphi}_\theta = \theta_0 + \frac{2\pi}{S+1} \sum_{m=0}^S m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|,$$

$$\hat{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n |n\rangle \langle n|.$$

Проводя суммирование по m от 0 до $S \gg 1$ в (42), находим

$$\hat{n}\hat{\varphi}_\theta \approx (\theta_0 + \pi) + \sum_{n \neq n'}^{\infty} e^{i(n-n')\theta_m} \frac{n}{i(n-n')} |n\rangle \langle n'|. \quad (43)$$

Выполнив расчет квантово-механического среднего $\langle \dots \rangle_{\text{p.s.}}$ от оператора (43) в состояниях суперпозиций (9), получаем

$$\langle \hat{n}\hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}} = \langle \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}} \langle \hat{n} \rangle_{\text{p.s.}} + 2N_{\alpha\beta\xi}^2 e^{-n_\alpha} \sum_{n \neq n'}^{\infty} (-1)^{n-n'} \frac{n_\alpha^{\frac{n+n'}{2}}}{\sqrt{n!n'!}}$$

$$\times \frac{n}{i(n-n')} \left\{ \cos \left[\frac{\Delta}{2} (n-n') \right] + \cos \left[\frac{\Delta}{2} (n+n') + \xi \right] \right\}. \quad (44)$$

Проведя подобные расчеты для $\langle \hat{\varphi}_\theta \hat{n} \rangle_{\text{p.s.}}$, находим следующее выражение для среднего коммутатора числа фотонов и фазы:

$$\langle [\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta] \rangle_{\text{p.s.}} = 2N_{\alpha\beta\xi}^2 e^{-n_\alpha} \sum_{n \neq n'}^{\infty} (-1)^{n-n'} \frac{n_\alpha^{\frac{n+n'}{2}}}{i\sqrt{n!n'!}}$$

$$\times \left\{ \cos \left[\frac{\Delta}{2} (n-n') \right] + \cos \left[\frac{\Delta}{2} (n+n') + \xi \right] \right\}. \quad (45)$$

Сравнивая (44) с (45), нетрудно убедиться, что

$$|\langle [\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta] \rangle_{\text{p.s.}}| = 2|\langle \hat{n}, \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}}|. \quad (46)$$

Таким образом, показано, что правые части жесткого СН (ЖСН) (5) и мягкого СН (МСН) (4) при $\hat{A} = \hat{n}$, $\hat{B} = \hat{\varphi}_\theta$ равны между собой в рассматриваемом нами случае операторов числа фотонов и фазы поля для фазовой суперпозиции когерентных состояний.

Из полученного нами выражения (44) следует, что корреляции числа фотонов и фазы зависят только от разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$. Формулы (17) и (40) для дисперсий числа фотонов и фазы поля также указывают на зависимости этих величин только от Δ . Как следует из выражения (46), правые части ЖСН и МСН определяются с помощью корреляций (44)

согласно

$$|\langle \hat{n}, \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}}|^2 = \frac{|\langle [\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta] \rangle_{\text{p.s.}}|^2}{4} = 4 \left| N_{\alpha\beta\xi}^2 e^{-n_\alpha} \sum_{n \neq n'}^{\infty} \frac{n_\alpha^{\frac{n+n'}{2}}}{i\sqrt{n!n'!}} \right.$$

$$\left. \times (-1)^{n-n'} \left\{ \cos \left[\frac{\Delta}{2} (n-n') \right] + \cos \left[\frac{\Delta}{2} (n+n') + \xi \right] \right\} \right|^2. \quad (47)$$

Флуктуации фазы $\langle (\Delta\hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{\text{p.s.}}$, входящие в левую часть СН, при $n_\alpha \gg 1$ имеют зависимость (41) от разности фаз когерентных состояний, это означает, что флуктуации фазы значительны для мезо- и макроскопических полей с большими n_α в случае больших значений $|\Delta|$ и не убывают с ростом среднего числа фотонов. Флуктуации же числа фотонов поля в рассматриваемом нами состоянии увеличиваются с ростом среднего числа фотонов.

Пример зависимости левой части СН $L(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) \equiv \langle (\Delta\hat{n})^2 \rangle_{\text{p.s.}} \langle (\Delta\hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{\text{p.s.}}$ от Δ приведен на рис. 1, *b*. На рисунке показано, что левая часть СН близка к 1/4 в узком интервале изменения $|\Delta| \approx 0$ и резко возрастает для больших $|\Delta|$ в случае $n_\alpha \gg 1$. С ростом n_α при $|\Delta| \approx \pi$, т.е. в случае макроскопических состояний нечётных суперпозиций когерентных состояний, левые части СН неограниченно возрастают линейно по $n_\alpha \gg 1$.

Как отмечалось выше, правые части МСН и ЖСН числа фотонов–фазы поля в случае фазовых суперпозиций когерентных состояний совпадают между собой для любых n_α и ξ . То есть

$$R(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) \equiv R_r(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) = R_s(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta),$$

$$R_r(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) \equiv |\langle \hat{n}, \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}}|^2,$$

$$R_s(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) \equiv \frac{1}{4} |\langle [\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta] \rangle_{\text{p.s.}}|^2.$$

Расчеты показали, что $L(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) - R(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) \approx 0$ только в узких диапазонах изменения Δ вблизи $|\Delta| = 0$ и $n_\alpha \gg 1$, как показано на рис. 1, *c*. Это означает, что состояние поля фазовой суперпозиции когерентных состояний не является в общем случае состоянием с минимальной неопределённостью число фотонов–фаза поля.

СН для числа фотонов и тригонометрических функций операторов фазы поля в состояниях фазовых суперпозиций когерентных состояний

Рассмотрим теперь тригонометрические функции от эрмитова оператора фазы $\hat{\varphi}_\theta$, определяемого в $(S+1)$ -мерном пространстве фоковских состояний,

$$\cos \hat{\varphi}_\theta = \frac{e^{i\hat{\varphi}_\theta} + e^{-i\hat{\varphi}_\theta}}{2}, \quad \sin \hat{\varphi}_\theta = \frac{e^{i\hat{\varphi}_\theta} - e^{-i\hat{\varphi}_\theta}}{2i}. \quad (48)$$

Операторные функции $e^{i\hat{\varphi}_\theta}$ и $e^{-i\hat{\varphi}_\theta}$, входящие в (48), унитарны, поскольку оператор фазы $\hat{\varphi}_\theta$ эрмитов.

Используя соотношения

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{S+1}} \sum_{m=0}^S e^{-in\theta_m} |\theta_m\rangle, \quad (49)$$

$$e^{i\hat{\varphi}_\theta} |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{S+1}} \sum_{m=0}^S e^{i(n-1)\theta_m} |\theta_m\rangle, \quad (50)$$

может быть показано [7], что

$$e^{i\hat{\varphi}_\theta} = \sum_{n=1}^S |n-1\rangle \langle n| + e^{i(S+1)\theta_0} |S\rangle \langle 0|, \quad (51)$$

$$e^{-i\hat{\varphi}_\theta} = \sum_{n=1}^S |n\rangle \langle n-1| + e^{-i(S+1)\theta_0} |0\rangle \langle S|. \quad (52)$$

Общее состояние суперпозиции когерентных состояний поля (30) может быть представлено в виде разложения в базисе фоковских состояний как

$$|\Psi_{\alpha,\beta}(\xi)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} Z_m(\alpha, \beta, \xi) |m\rangle, \quad (53)$$

где обозначено

$$Z_m(\alpha, \beta, \xi) \equiv N_{\alpha,\beta,\xi} (\alpha^m e^{-n_\alpha/2} + e^{i\xi} \beta^m e^{-n_\beta/2}) / \sqrt{m!}. \quad (54)$$

Используя (51)–(54), для средних значений периодических тригонометрических функций оператора фазы (48) поля в состоянии общей суперпозиции когерентных состояний можно найти следующие выражения:

$$\langle \cos \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}} = \lim_{S \rightarrow \infty} \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{S-1} (\alpha, \beta, \xi) Z_{n+1}(\alpha, \beta, \xi) + e^{i(S+1)\theta_0} Z_S^*(\alpha, \beta, \xi) Z_0(\alpha, \beta, \xi) \right], \quad (55)$$

$$\langle \sin \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}} = \lim_{S \rightarrow \infty} \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{S-1} (\alpha, \beta, \xi) Z_{n+1}(\alpha, \beta, \xi) + e^{i(S+1)\theta_0} Z_S^*(\alpha, \beta, \xi) Z_0(\alpha, \beta, \xi) \right], \quad (56)$$

Вторые слагаемые в квадратных скобках в формулах (55) и (56) стремятся к 0 при $S \rightarrow \infty$, поскольку $n_\alpha^{S/2} e^{-n_\alpha/2} / \sqrt{S!}$, $n_\beta^{S/2} e^{-n_\beta/2} / \sqrt{S!} \rightarrow 0$ при $S \rightarrow \infty$. Вследствие этого средние значения тригонометрических функций оператора фазы (в отличие от средних значений самого оператора фазы $\hat{\varphi}_\theta$) оказываются не зависящими от параметра θ_0 .

Для дисперсий тригонометрических функций эрмитова оператора фазы в состоянии фазовой суперпозиции (9) находим

$$\langle (\Delta \cos \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{\text{p.s.}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re}[Z_n^*(\alpha, \beta, \xi) Z_{n+2}(\alpha, \beta, \xi)] - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \text{Re}[Z_n^*(\alpha, \beta, \xi) Z_{n+1}(\alpha, \beta, \xi)] \right)^2, \quad (57)$$

$$\langle (\Delta \sin \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{\text{p.s.}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \text{Re}[Z_n^*(\alpha, \beta, \xi) Z_{n+2}(\alpha, \beta, \xi)] - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \text{Im}[Z_n^*(\alpha, \beta, \xi) Z_{n+1}(\alpha, \beta, \xi)] \right)^2. \quad (58)$$

Из формул (57) и (58) следует, что для рассматриваемых нами состояний поля дисперсии периодических тригонометрических функций оператора фазы не зависят от параметра θ_0 .

Численные расчеты показывают, что для дисперсий косинуса и синуса фазы поля в состояниях фазовых суперпозиций при $n_\alpha \gg 1$ справедливы соотношения [24]

$$\langle (\cos \hat{\varphi}_\theta) \rangle_{\text{p.s.}} \approx \frac{\cos \varphi_\alpha + \cos \varphi_\beta}{2},$$

$$\langle (\sin \hat{\varphi}_\theta) \rangle_{\text{p.s.}} \approx \frac{\sin \varphi_\alpha + \sin \varphi_\beta}{2}, \quad (59)$$

$$\langle (\cos^2 \hat{\varphi}_\theta) \rangle_{\text{p.s.}} \approx \frac{\cos^2 \varphi_\alpha + \cos^2 \varphi_\beta}{2},$$

$$\langle (\sin^2 \hat{\varphi}_\theta) \rangle_{\text{p.s.}} \approx \frac{\sin^2 \varphi_\alpha + \sin^2 \varphi_\beta}{2}, \quad (60)$$

$$\langle (\Delta \cos \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{\text{p.s.}} \approx \frac{(\cos \varphi_\alpha - \cos \varphi_\beta)^2}{4},$$

$$\langle (\Delta \sin \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{\text{p.s.}} \approx \frac{(\sin \varphi_\alpha - \sin \varphi_\beta)^2}{4}. \quad (61)$$

Используя формулы (48), (51) и (52), получаем

$$\hat{n} \cos \hat{\varphi}_\theta = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{S-1} n |n\rangle \langle n+1| + (n+1) |n+1\rangle \langle n| + e^{i(S+1)\theta_{0,p}} |S\rangle \langle 0|, \quad \theta_{0,p} = \frac{\varphi_\alpha + \varphi_\beta}{2} - \pi. \quad (62)$$

С помощью формул (53) и (54) находим среднее квантово-механическое оператора (62) в состоянии фазовой суперпозиции

$$\langle \hat{n} \cos \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}} = \sum_{n=0}^{\infty} n \text{Re}[Z_n^*(\alpha, \beta, \xi) Z_{n+1}(\alpha, \beta, \xi)] + \frac{1}{2} Z_{n+1}^*(\alpha, \beta, \xi) Z_n(\alpha, \beta, \xi), \quad (63a)$$

$$\langle \cos \hat{\varphi}_\theta \hat{n} \rangle_{p.s.} = \sum_{n=0}^{\infty} n \operatorname{Re}[Z_n^*(\alpha, \beta, \xi) Z_{n+1}(\alpha, \beta, \xi)] + \frac{1}{2} Z_n^*(\alpha, \beta, \xi) Z_{n+1}(\alpha, \beta, \xi). \quad (63b)$$

Для получения соотношения (63) использовалось $SZ_S^*(\alpha, \beta, \xi) \rightarrow 0$ при $S \rightarrow \infty, \forall n_\alpha \gg 1$.

Отметим, что корреляции (63) определяют правую часть ЖСН согласно (5) для $A = \hat{n}, B = \cos \hat{\varphi}_\theta$. Правая часть МСН определяет среднее квантово-механическое от коммутатора операторов числа фотонов и косинуса оператора фазы поля. Из соотношений (63a) и (63b) следует, что среднее такого коммутатора есть

$$\langle [\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta] \rangle_{p.s.} = i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im}[Z_{n+1}^*(\alpha, \beta, \xi) Z_n(\alpha, \beta, \xi)]. \quad (64)$$

Флуктуации (дисперсии) косинуса оператора фазы $\langle (\Delta \cos \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{p.s.}$ монотонно убывают с ростом n_α и достигают величины ≈ 0 для $|\Delta|$ вблизи 0 при $n_\alpha \gg 1$. Для больших n_α с увеличением $|\Delta|$ флуктуации косинуса фазы монотонно возрастают и достигают величины ≈ 1 при $|\Delta| \approx \pi$.

Левая часть СН $L(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle_{p.s.} \langle (\Delta \cos \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{p.s.}$ обладает зависимостью от n_α и Δ , подобной $L(\hat{n}, \hat{\varphi}_\theta) \equiv \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle_{p.s.} \langle (\Delta \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{p.s.}$ и изображенной на рис. 1, *b* при тех же значениях параметров, но достигает значительно меньшей максимальной величины $\approx n_\alpha$ при $n_\alpha \gg 1$ и $|\Delta| \approx \pi$.

На рис. 2, *a* показан пример зависимости правой части ЖСН $R_t(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ от n_α и Δ . Как видно на рисунке, правая часть ЖСН близка к нулю (< 0.06) для всех значений параметров n_α и Δ , за исключением малой области $n_\alpha \approx 1.5$ и $\Delta \approx 1.2$, где присутствует ярко выраженный пик значения $R_t(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta) \approx 0.2$.

В отличие от СН для числа фотонов–оператора фазы, рассмотренного нами выше, правые части ЖСН и МСН для числа фотонов–косинуса оператора фазы различаются между собой. На рис. 2, *b* показана зависимость разности правых частей ЖСН и МСН $R_t(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta) - R_s(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ от n_α и Δ для значений параметров, использованных для рис. 2, *a*. На рисунке видно, что правые части МСН и ЖСН совпадают между собой для $n_\alpha \gg 1$ и заметно различаются при $n_\alpha \sim 1$ в областях максимальных значений правой части ЖСН.

Разность левой и правой частей ЖСН и МСН $U_x(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv L(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta) - R_x(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta), x \equiv t, s$ близка к 0 в ограниченном интервале вблизи $|\Delta| = 0$ для $n_\alpha \gg 1$ и велика ($\approx n_\alpha$) при значениях $n_\alpha \gg 1$. На рис. 2, *c* изображены зависимости $U_t(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ от Δ для большого и малого значений n_α . Как показано на рисунке, $U_t(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ для больших n_α близка к 0 в интервале значений разности фаз $|\Delta| < 0.4$ и быстро растет с увеличением $|\Delta|$ вне этого интервала. Для малых n_α разность левой и правой частей ЖСН $U_t(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ близка к 0 на более широком интервале изменения Δ .

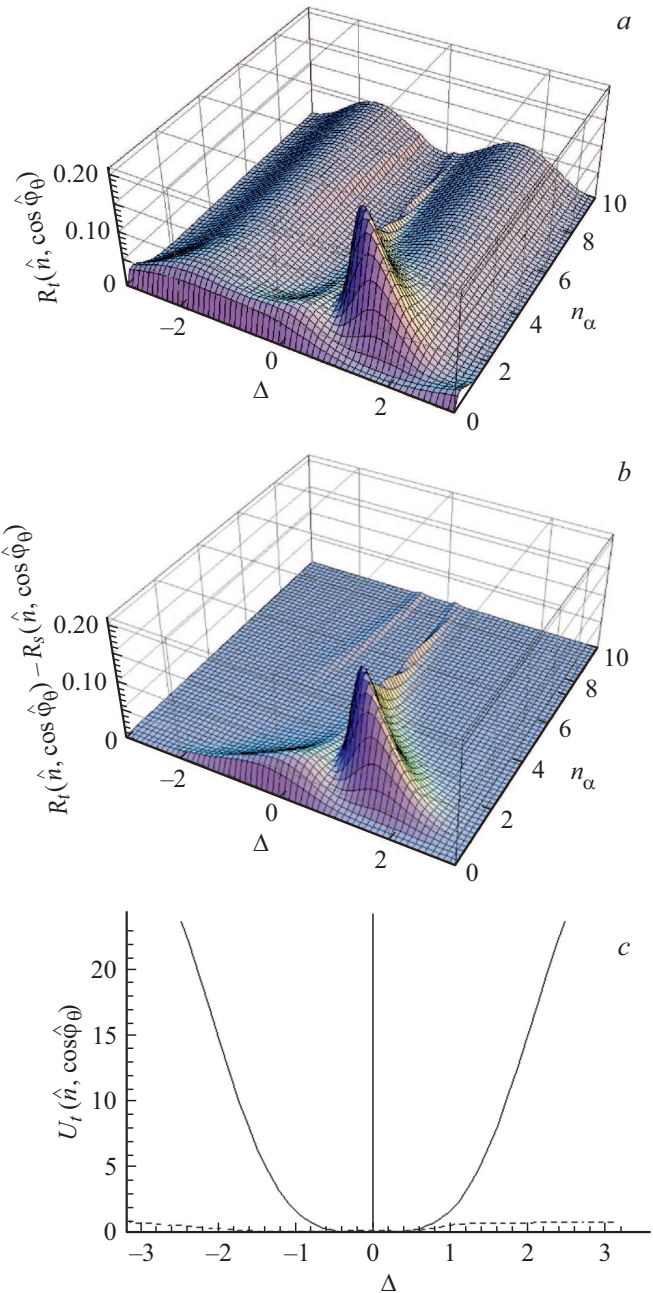


Рис. 2. (а) Зависимость правой части жесткого СН $R_t(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv |\langle \hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta \rangle_{p.s.}|^2$ от n_α и разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ для поля в состоянии фазовой суперпозиции вида в случае $\xi = \pi/2, \varphi_\alpha = 0$. (б) Зависимость разности правых частей ЖСН и МСН $R_t(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta) - R_s(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ от n_α и разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ для поля в состоянии фазовой суперпозиции в случае $\xi = \pi/2, \varphi_\alpha = 0$. (с) Зависимость разности левой и правой частей ЖСН $U_t(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv L(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta) - R_t(\hat{n}, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ от разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ для $n_\alpha = 1$ (штрихи) и $n_\alpha = 30$ (непрерывная линия) для поля в состоянии фазовой суперпозиции в случае $\xi = 0, \varphi_\alpha = 0$.

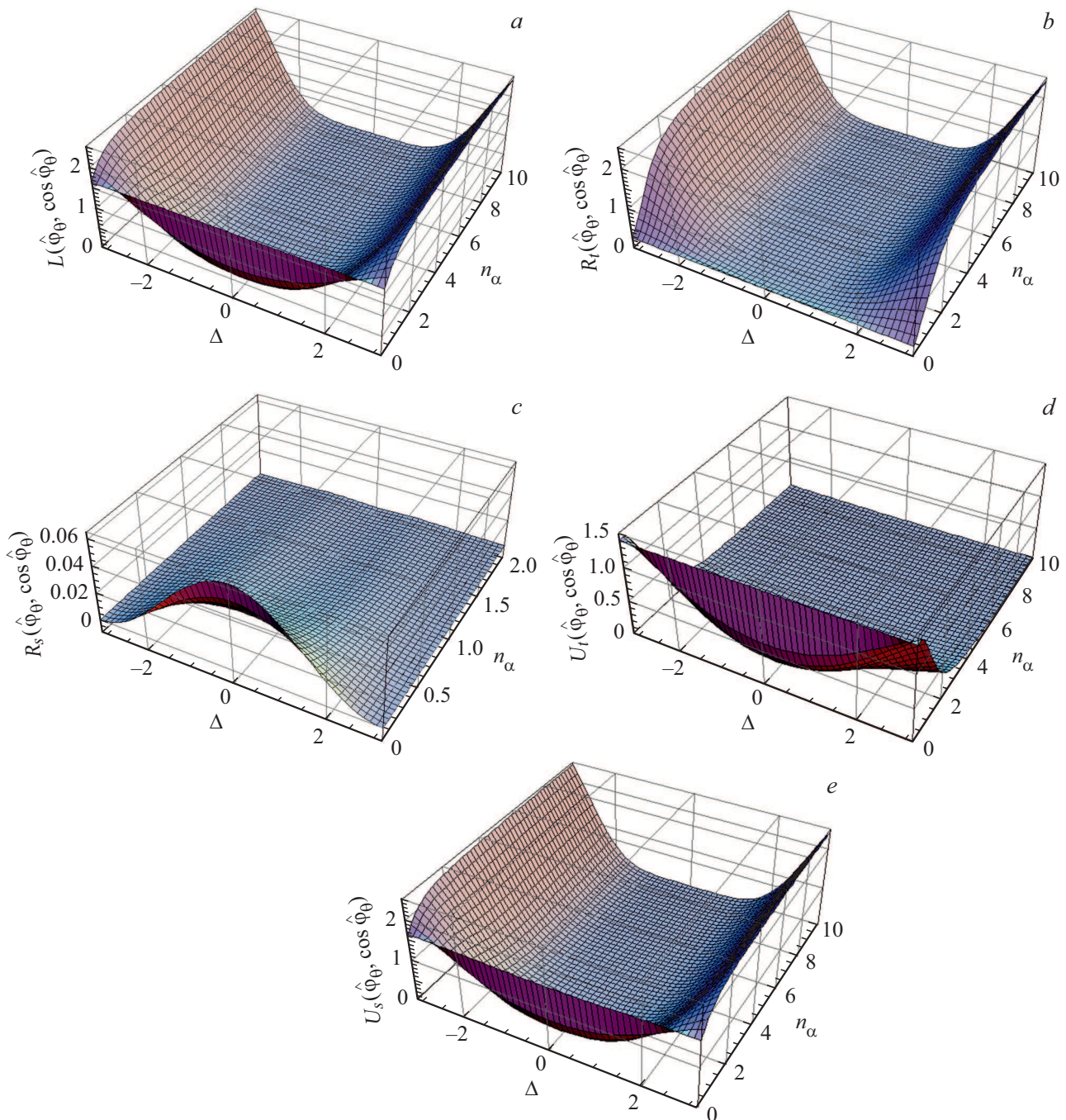


Рис. 3. (а) Зависимость левой части СН $L(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv \langle (\Delta \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{p.s.} \langle (\Delta \cos \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle$ от n_α и $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ разности фаз когерентных состояний для поля в состоянии фазовой суперпозиции в случае $\xi = 0$. (б) Зависимость правой части ЖСН $R_l(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv |\langle \hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta \rangle_{p.s.}^2$ от n_α и разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ для поля в состоянии фазовой суперпозиции в случае $\xi = 0$, $\varphi_\alpha = 0$. (с) Зависимость правой части ЖСН $R_s(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv \frac{1}{4} |\langle \hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta \rangle_{p.s.}|^2$ от n_α и разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ для поля в состоянии фазовой суперпозиции в случае $\xi = 0$, $\varphi_\alpha = 0$. (д) Зависимость разности левой и правой частей ЖСН $U_l(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv L(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) - R_l(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ от n_α и разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ для поля в состоянии фазовой суперпозиции в случае $\xi = 0$, $\varphi_\alpha = 0$. (е) Зависимость разности левой и правой частей МСН $U_s(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv L(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) - R_s(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ от n_α и разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ для поля в состоянии фазовой суперпозиции в случае $\xi = 0$, $\varphi_\alpha = 0$.

СН для оператора фазы поля и тригонометрических функций оператора фазы поля в состояниях фазовых суперпозиций когерентных состояний

Для расчетов СН для оператора фазы и косинуса оператора фазы используем следующее выражения для произведения этих операторов:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_\theta \cos \hat{\varphi}_\theta &= \theta_{0,p} \cos \hat{\varphi}_\theta + \frac{\pi}{(S+1)^2} \\ &\times \left\{ \sum_{m,n,n'=0}^{S,S-1,S} m [e^{-i(n-n')\theta_m} |n'\rangle \langle n+1| + e^{-i(n-n'+1)\theta_m} |n'\rangle \langle n|] \right. \\ &+ \sum_{m,n'=0}^S m [e^{i(S+1)\theta_{0,p}+(n'-S)\theta_m} |n'\rangle \langle 0| \\ &\left. + e^{-i(S+1)\theta_{0,p}-n'\theta_m} |n'\rangle \langle S|] \right\}, \end{aligned} \quad (65)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_m &= \theta_{0,p} + \frac{2\pi m}{S+1}, \quad m = 0, 1, \dots, S, \\ \theta_{0,p} &= \frac{\varphi_\alpha + \varphi_\beta}{2} - \pi. \end{aligned}$$

Среднее квантово-механическое от оператора (65) может быть найдено с помощью формул (53), (54) после суммирования по m и взятия предела $S \rightarrow \infty$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\varphi}_\theta \cos \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}} &= \theta_{0,p} \cos \hat{\varphi}_\theta + \frac{\pi}{(S+1)^2} (\theta_{0,p} + \pi) \langle \cos \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}} \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n \neq n'}^{\infty} \frac{e^{i\theta_{0,p}(n-n')}}{i(n'-n)} Z_{n'}^*(\alpha, \beta, \xi) Z_{n+1}(\alpha, \beta, \xi) \right. \\ &\left. + \sum_{n+1 \neq n'}^{\infty} \frac{e^{i\theta_{0,p}(n'-n-1)}}{i(n'-n-1)} Z_{n'}^*(\alpha, \beta, \xi) Z_n(\alpha, \beta, \xi) \right\}, \end{aligned} \quad (66)$$

где использовано $SZ_S^*(\alpha, \beta, \xi) \rightarrow 0$ при $S \rightarrow \infty, \forall n_\alpha$.

Аналогичным путем, вычисляя среднее $\langle \cos \hat{\varphi}_\theta \hat{\varphi}_\theta \rangle_{\text{p.s.}}$, находим среднее коммутатора $\langle [\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta] \rangle_{\text{p.s.}}$, определяющее правую часть мягкого СН (4) при $\hat{A} = \hat{\varphi}_\theta, \hat{B} = \cos \hat{\varphi}_\theta$,

$$\begin{aligned} \langle [\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta] \rangle_{\text{p.s.}} &= i \text{Im} \frac{1}{i} \\ &\times \left\{ \sum_{n \neq n'}^{\infty} \frac{e^{i\theta_{0,p}(n-n')}}{n-n'} Z_{n+1}^*(\alpha, \beta, \xi) Z_{n'}(\alpha, \beta, \xi) \right. \\ &\left. + \sum_{n+1 \neq n'}^{\infty} \frac{e^{-i\theta_{0,p}(n'-n-1)}}{n-n'+1} Z_n^*(\alpha, \beta, \xi) Z_{n'}(\alpha, \beta, \xi) \right\}. \end{aligned} \quad (67)$$

Пример зависимости левой части СН для оператора фазы и косинуса оператора фазы вида $L(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv \langle (\Delta \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{\text{p.s.}} \langle (\Delta \cos \hat{\varphi}_\theta)^2 \rangle_{\text{p.s.}}$ от значений n_α и разности фаз когерентных состояний $\Delta \equiv \varphi_\theta - \varphi_\alpha$ для поля в состоянии фазовой суперпозиции вида показан на рис. 3, а. На рисунке видно, что $L(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) \approx 0$ для значений $|\Delta| < 0.2$ и стремится к величине 2.5 при $n_\alpha \gg 1$. Правые части ЖСН и МСН для операторов фазы и косинуса фазы для поля в фазовой суперпозиции когерентных состояний качественно отличаются друг от друга. На рис. 3, б и с показаны зависимости правых частей $R_t(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ и $R_s(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ от значений n_α и разности фаз когерентных состояний Δ . Сравнение зависимостей, изображенных на этих рисунках, показывает, что правые части ЖСН и МСН различны при всех Δ , исключая область $|\Delta|$ вблизи 0. Наибольшее отличие имеет место при $|\Delta|$ вблизи π , где $R_t(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) \gg R_s(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ для любых значений n_α .

Разности левых и правых частей ЖСН и МСН $U_x(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) \equiv L(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta) - R_x(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta), x \equiv t, s$ также качественно различаются для всех Δ и n_α , исключая область $|\Delta|$ вблизи 0. Величина $U_t(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ для любых Δ близка к 0 при $n_\alpha \gg 1$, тогда как $U_s(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ при $n_\alpha \gg 1$ близка к 2.5. Как показано на рис. 3, д, е, величина стремится к 0 с ростом n_α для всех значений параметров, тогда как $U_x(\hat{\varphi}_\theta, \cos \hat{\varphi}_\theta)$ возрастает до значения 2.5 при $n_\alpha \gg 1$ и больших $|\Delta|$.

На основании проведенных расчетов можно сделать вывод о том, что ЖСН для операторов $\hat{\varphi}_\theta$ и $\cos \hat{\varphi}_\theta$ указывает на то, что состояния фазовых суперпозиций когерентных состояний поля являются квантовыми состояниями с минимальной неопределенностью, тогда как МСН (соотношение Гейзенберга) не позволяет сделать такого вывода.

Заключение

В настоящей работе нами проведено исследование различных СН для эрмитового оператора фазы φ_θ и оператора числа фотонов \hat{n} , числа фотонов \hat{n} и оператора $\cos \hat{\varphi}_\theta$, а также для оператора фазы $\hat{\varphi}_\theta$ и оператора $\cos \hat{\varphi}_\theta$ для ЭМ поля в состояниях обобщенных фазовых суперпозиций двух когерентных состояний.

Нами показано, что ЖСН и МСН для числа фотонов и фазы поля ($\hat{n} - \hat{n}_\theta$) в рассмотренном квантовом состоянии совпадают между собой. При этом состояния фазовых суперпозиций когерентных состояний в общем случае не являются состояниями с минимальной неопределенностью. Условие минимальной неопределенности достигается лишь локально, на узких интервалах изменения разности фаз когерентных состояний $\Delta = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$ для больших средних значений числа фотонов когерентных состояний, $n_\alpha \gg 1$.

ЖСН и МСН для наблюдаемых $\hat{n} - \cos \hat{\varphi}_\theta$ значительно различаются между собой при $n_\alpha \sim 1$ и почти совпадают для любых n_α при $|\Delta| \approx \pi$. Это означает, что в частном случае состояния „шредингерского котика“

поля при $|\Delta| = \pi$ ЖСН и МСН совпадают, и для анализа свойств этих состояний может быть использовано неравенство Гейзенберга. В случае когерентного состояния правые части ЖСН и МСН отличаются значительно при $n_\alpha \sim 1$.

Как и в случае СН $\hat{n} - \hat{\varphi}_\theta$, как ЖСН, так и МСН для $\hat{n} - \cos \hat{\varphi}_\theta$ указывают на то, что состояния фазовых суперпозиций не являются в общем случае состояниями с минимальной неопределенностью. Произведение неопределенностей этих величин совпадает с правой частью ЖСН только на ограниченном интервале значений Δ вблизи $|\Delta| = 0$ для $n_\alpha \gg 1$, и только в этих условиях рассматриваемые квантовые состояния поля представляют собой состояния с минимальной неопределенностью.

Проведенные нами расчеты показали, что правые части ЖСН и МСН для операторов фазы и косинуса оператора фазы поля ($\hat{\varphi}_\theta - \cos \hat{\varphi}_\theta$) в состояниях фазовых суперпозиций когерентных состояний качественно отличаются между собой. Наибольшее различие имеет место при больших значениях разности фаз когерентных состояний $|\Delta|$, при этом правая часть ЖСН много больше правой части МСН. ЖСН указывает на то, что состояния фазовых суперпозиций когерентных состояний являются состоянием с минимальной неопределенностью (МУС) для $n_\alpha \gg 1$, тогда как МСН (неравенство Гейзенберга) показывает значительное различие правых и левых частей при больших значениях $|\Delta| \leq \pi$ для любых значений n_α . Это позволяет сделать вывод о том, что при исследовании СН $\hat{\varphi}_\theta - \cos \hat{\varphi}_\theta$ состояния „средингеровского кота“ ($|\Delta| = \pi$) необходимо рассмотрение ЖСН.

Использование ЖСН для операторов $\hat{n} - \cos \hat{\varphi}_\theta$ также необходимо для анализа рассматриваемых нами состояний поля при малых числах фотонов ($n_\alpha \sim 1$) в случае, когда разности фаз когерентных состояний $|\Delta|$ заметно отличаются от π .

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] *Holland M.J., Burnett K.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. N 9. P. 1355–1358.
- [2] *Schnabel Roman.* // Phys. Rep. 2017. V. 684. P. 1–51.
- [3] *Demkowicz-Dobrzański R., Jarzyna M., Kotłodyński J.* // Progress in Optics. 2015. V. 60. P. 345–435.
- [4] *Barnett S.M., Pegg D.T.* // J. Mod. Opt. 1989. V. 36. N 9. P. 7–19.
- [5] *Pegg D.T., Barnett S.M.* // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. N 4. P. 1665–1675.
- [6] *Lynch R.* // Phys. Rev. A. 1990. V. 41. N 5. P. 2841–2843.
- [7] *Popov V.N., Yarunin V.S.* // J. Mod. Optics. 1992. V. 39. N 7. P. 1525–1531.
- [8] *Lynch R.* // Phys. Rep. 1995. V. 256. N 9. P. 367–436.
- [9] *Vogel W., Welsch D.-G.* Quantum Optics. 3-d edn. Wiley-VCH, 2006. 508 p.
- [10] *Gronbech-Jensen N., Christiansen P.L., Ramanujam P.S.* // J. Opt. Soc. Am. B. 1989. V. 6 (12). P. 2423–2429.
- [11] *Mendas I., Popovic D.B.* // Phys. Rev. A. 1995. V. 50. N 9. P. 947–953.
- [12] *Opatrny T.* // J. Phys. A: Math. Gen. 1995. V. 28. N 7. P. 6961–6975.
- [13] *Vaccaro J.A., Pegg D.T.* // J. Mod. Optics. 1990. V. 37. N 1. P. 17–39.
- [14] *Yurke B., Stoler D.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. N 1. P. 13–16.
- [15] *Yurke B., Stoler D.* // Phys. Rev. A. 1987. V. 35. N 11. P. 4846–4849.
- [16] *Schleich W., Pernigo M., Fam Le Kein.* // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. N 3. P. 2172–2187.
- [17] *Buzek V., Wilson-Gordon A.D., Knight P.L., Lai W.K.* // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. N 11. P. 8079–8094.
- [18] *Gurraway B.M., Knight P.L.* // Phys. Scr. 1993. V. 48. P. 66–76; Phys. Rev. A. 1992. V. 46 (9). P. R5346–5349.
- [19] *Buzek V., Gantsog T.S., Kim M.S.* // Phys. Scr. 1993. V. 48. P. 131–142.
- [20] *Smithey D.T., Beck M., Raymer M.G., Faridani A.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70 (9). P. 1244–1247.
- [21] *Smithey D.T., Beck M., Cooper J., Raymer M.G., Faridani A.* // Phys. Scr. 1993. V. 48. P. 35–44.
- [22] *Beck M., Smithey D.T., Cooper J., Raymer M.G.* // Opt. Lett. 1993. V. 18 (15). P. 1259–1261.
- [23] *Козловский А.В.* // Опт. и спектр. 2016. Т. 120. N 44. С. 626–635; *Kozlovskii A.V.* // Opt. Spectrosc. 2016. V. 120 (4). P. 626–635.
- [24] *Kozlovskii A.V.* // J. Mod. Optics. 2016. V. 63 (21). P. 2356–2366.
- [25] *Kozlovskii A.V.* // J. Mod. Optics. 2019. V. 66 (5). P. 463–472.