

## Влияние электрон-дырочной асимметрии на электронную структуру спиральных краевых состояний в квантовой яме HgTe/HgCdTe

© М.В. Дурнев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: durnev@mail.ioffe.ru

Поступила в Редакцию 14 ноября 2019 г.

В окончательной редакции 14 ноября 2019 г.

Принята к публикации 19 ноября 2019 г.

Изучено влияние электрон-дырочной асимметрии на электронную структуру спиральных краевых состояний в квантовой яме HgTe/HgCdTe. В рамках четырехзонной *kp*-модели, учитывающей отсутствие центра пространственной инверсии, получены аналитические выражения для энергетического спектра и волновых функций краевых состояний, компонент тензора *g*-фактора и матричных элементов электро-дипольных оптических переходов между спиновыми ветвями краевых электронов. Показано, что при одновременном выполнении двух условий — электрон-дырочной асимметрии и отсутствии центра инверсии — спектр краевых электронов отклоняется от линейного, получены выражения для поправок к линейному спектру.

**Ключевые слова:** Топологические изоляторы, теллурид ртути, краевые состояния, магнитное поле.

DOI: 10.21883/FTT.2020.03.49012.629

### 1. Введение

Изучение спиральных краевых состояний, возникающих на краю двумерных топологических изоляторов, является важной областью физики двумерных кристаллических систем с нетривиальными топологическими свойствами [1–3]. К ключевым направлениям исследований можно отнести изучение локального и нелокального электронного транспорта по краевым каналам [4–7], механизмов рассеяния назад [8–14] и фотогальванического эффекта [15,16]. Среди различных систем, на краях которых экспериментально обнаружены одномерные спиральные каналы [2,3,17], наибольшее внимание привлекают квантовые ямы HgTe/HgCdTe. В таких ямах переход между тривиальным и топологическим состоянием происходит при изменении ширины квантовой ямы.

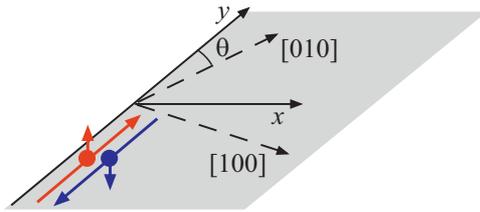
Для поиска электронных состояний в квантовых ямах HgTe/HgCdTe вблизи критической ширины обычно используется четырехзонная *kp*-модель, включающая в себя расположенные близко по энергии электронные и дырочные подзоны. Изотропный вариант этой модели носит название модели Bernevig-Hughes-Zhang (BHZ) [1] и широко используется для расчета электронной структуры объемных и краевых состояний [18–25]. Однако, как показывают атомистические расчеты [26,27], отсутствие центра пространственной инверсии в решетке цинковой обманки и низкая симметрия гетероинтерфейсов квантовой ямы HgTe/HgCdTe приводят к сильному смешиванию электронных и дырочных подзон, которое модифицирует *kp*-модель [19,27,28] и приводит к существенной перестройке объемных и краевых электронных состояний [27,29,30]. Отсутствие центра пространственной инверсии в квантовой яме HgTe/HgCdTe ответственно, например, за возникновение оптических переходов

между спиральными состояниями с противоположным спином в рамках сильного электродипольного механизма [31].

Как в изотропной модели BHZ, так и в гамильтониане нецентросимметричной *kp*-модели присутствуют диагональные слагаемые, пропорциональные квадрату волнового вектора и связанные с наличием далеких энергетических зон. Эти вклады отличаются по величине для электронных и дырочных подзон, что приводит к нарушению электрон-дырочной симметрии: при замене электрона на дырку и одновременной смене знака энергии эффективный *kp*-гамильтониан не переходит сам в себя.

Несмотря на то, что квадратичные по волновому вектору слагаемые сами по себе слабо влияют на групповую скорость и ширину локализации краевых состояний — эти характеристики определяются большим межзонным смешиванием, линейным по волновому вектору, — электрон-дырочная асимметрия, заложенная в диагональных слагаемых, приводит к значительной перестройке энергетического спектра и волновых функций краевых состояний. Электрон-дырочная асимметрия может приводить также к возникновению новых эффектов. Она, например, ответственна за возникновение циркулярного фотогальванического эффекта с участием спиральных состояний [15,24,31,32]. Влияние электрон-дырочной асимметрии на спектр и структуру краевых состояний изучалось ранее в рамках модели BHZ (см., например, работы [24,25]). Однако подобные исследования не проводились для реалистичных квантовых ям, не обладающих центром пространственной инверсии.

В работе исследовано влияние электрон-дырочной асимметрии на спиральные краевые состояния в квантовых ямах HgTe/HgCdTe. В частности, проанализирован характер дисперсии краевых электронов и получены



**Рис. 1.** Край топологического изолятора на основе квантовой ямы HgTe/CdHgTe с изображением спиральных краевых состояний.

выражения для волновых функций краевых состояний в рамках нецентросимметричной  $kp$ -модели, найден тензор  $g$ -фактора краевых электронов, рассчитаны матричные элементы оптических переходов между спиновыми ветвями краевых состояний. Работа имеет следующую структуру: в разделе 2 изложена общая модель и получены выражения для энергии и волновых функций краевых состояний при нулевом волновом векторе вдоль края; в разделе 3 рассчитан тензор  $g$ -фактора краевых электронов; в разделе 4 найден спектр и волновые функции краевых состояний в широком диапазоне волновых векторов; в разделе 5 рассчитаны матричные элементы оптических переходов между спиновыми ветвями краевых состояний; наконец, в разделе 6 обсуждается влияние граничных условий на полученные результаты.

## 2. Структура краевых состояний при нулевом волновом векторе

В этом разделе мы сформулируем модель и получим волновые функции спиральных состояний при нулевом волновом векторе движения вдоль края. Рассмотрим квантовую яму HgTe/CdHgTe, выращенную вдоль кристаллографического направления  $[001]$ , с шириной, близкой к критической, при которой происходит переход в фазу топологического изолятора. Такая структура обладает точечной симметрией  $D_{2d}$  без центра пространственной инверсии. Состояния вблизи уровня Ферми формируются из лежащих близко по энергии электронно-подобных подзон  $|E1, \pm 1/2\rangle$  и дырочно-подобных подзон  $|H1, \pm 3/2\rangle$  [1]. В базисе  $|E1, +1/2\rangle$ ,  $|H1, +3/2\rangle$ ,  $|E1, -1/2\rangle$ ,  $|H1, -3/2\rangle$  состояния в квантовой яме описываются следующим гамильтонианом [29]:

$$\mathcal{H}_0(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} \delta_0 - (\mathcal{B} + \mathcal{D})k^2 & iAk_+ & 0 & i\gamma e^{-2i\theta} \\ -iAk_- & -\delta_0 + (\mathcal{B} - \mathcal{D})k^2 & i\gamma e^{-2i\theta} & 0 \\ 0 & -i\gamma e^{2i\theta} & \delta_0 - (\mathcal{B} + \mathcal{D})k^2 & -iAk_- \\ -i\gamma e^{2i\theta} & 0 & iAk_+ & -\delta_0 + (\mathcal{B} - \mathcal{D})k^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  — волновой вектор электрона в плоскости квантовой ямы,  $k = |\mathbf{k}|$ ,  $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\delta_0$  и  $\gamma$  — вещественные параметры зонной структуры. При  $\mathcal{B} < 0$  ( $\mathcal{B} > 0$ ) и  $\delta_0 < 0$  ( $\delta_0 > 0$ ) квантовая яма находится в режиме топологического изолятора, и на ее краях возникают спиральные краевые состояния. Параметр  $\gamma$  описывает отсутствие центра инверсии в структуре и, в основном, определяется смешиванием подзон  $|E1, \pm 1/2\rangle$  и  $|H1, \mp 3/2\rangle$  на интерфейсах квантовой ямы [27]. Значение этого параметра пока не установлено экспериментально, а теоретические значения лежат в диапазоне  $2 \div 5$  meV для ямы HgTe/Hg<sub>0.3</sub>Cd<sub>0.7</sub>Te [19,26–28].

В дальнейшем мы будем пользоваться системой координат, в которой ось  $z$  совпадает с осью роста квантовой ямы, край образца параллелен оси  $y$ , и образец занимает полупространство  $x > 0$ , см. рис. 1. Ось  $y$  составляет угол  $\theta$  с кристаллографической осью  $[010]$ , что позволяет рассматривать структуры с различными кристаллографическими ориентациями края. В частности, при  $\theta = 0$  край образца параллелен оси  $[010]$ , в то время как при  $\theta = \pi/4$  край параллелен оси  $[110]$ . При получении аналитических выражений и анализе результатов мы будем считать, что  $\mathcal{B} < 0$ ,  $\delta_0 < 0$ ,  $|\mathcal{D}| < |\mathcal{B}|$ ,  $\mathcal{A} > 0$  и  $\gamma > 0$ . Для численных оценок мы будем использовать набор параметров  $\mathcal{A} = 3.6$  eV·Å,  $\mathcal{B} = -68$  eV·Å<sup>2</sup>,  $\mathcal{D} = -51$  eV·Å<sup>2</sup> [19],  $\gamma = 5$  meV [27], и  $\delta_0 = -10$  meV, что соответствует яме HgTe/Hg<sub>0.3</sub>Cd<sub>0.7</sub>Te шириной 8 nm.

Диагональные слагаемые в гамильтониане (1), пропорциональные  $k^2$ , возникают за счет смешивания четырех рассматриваемых подзон с более энергетически далекими подзонами, которые не входят в гамильтониан. Это смешивание описывается параметрами  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{D}$ . Как видно, в случае  $\mathcal{D} \neq 0$  диагональные слагаемые входят несимметрично для электронных и дырочных подзон, и следовательно нарушают симметрию гамильтониана относительно замены электрона на дырку.

Таким образом, отношение  $\mathcal{D}/\mathcal{B}$  можно назвать параметром электрон-дырочной асимметрии. Как будет показано дальше, спектр и волновые функции краевых состояний будут в значительной степени определяться этим параметром. Для приведенных выше параметров  $\mathcal{D}/\mathcal{B} \approx 0.75$ .

Для поиска краевых состояний мы будем решать уравнение Шредингера

$$\mathcal{H}_0 \left( -i \frac{\partial}{\partial x}, k_y \right) \psi_{k_y, s} = \varepsilon_{k_y, s} \psi_{k_y, s} \quad (2)$$

с граничными условиями  $\psi_{k_y, s}(x=0) = 0$  и  $\psi_{k_y, s}(x \rightarrow +\infty) = 0$ . Для каждого волнового вектора  $k_y$  существует пара таких состояний, отличающихся значением псевдospина  $s = \pm 1/2$ . Используемые граничные условия являются простейшими, граничные условия более сложного вида будут обсуждаться в разделе 6.

Рассмотрим вначале случай  $k_y = 0$ . Покажем, что в этом случае существует аналитическое решение уравнения (2) с энергией

$$\varepsilon_{0s} = -\delta_0 \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}}. \quad (3)$$

Для этого подставим энергию (3) в уравнение (2) и запишем искомые волновые функции в виде

$$\begin{aligned} \psi_{0+1/2} &= \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{2L}} \begin{bmatrix} a(x) \\ -\alpha a(x) \\ -ib(x)e^{2i\theta} \\ -iab(x)e^{2i\theta} \end{bmatrix}, \\ \psi_{0-1/2} &= \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{2L}} \begin{bmatrix} -ib(x)e^{-2i\theta} \\ iab(x)e^{-2i\theta} \\ a(x) \\ \alpha a(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mathcal{B} + \mathcal{D}}{\mathcal{B} - \mathcal{D}}}. \quad (5)$$

После такой подстановки уравнения на функции  $a(x)$  и  $b(x)$  будут аналогичны уравнениям при  $\mathcal{D} = 0$ . Пользуясь известным решением при  $\mathcal{D} = 0$  [29], получим

$$\begin{aligned} a(x) &= \mathcal{N} \left[ e^{-x/l_1} \cos \frac{\varphi}{2} - e^{-x/l_2} \cos \left( k_0 x - \frac{\varphi}{2} \right) \right], \\ b(x) &= \mathcal{N} \left[ e^{-x/l_1} \sin \frac{\varphi}{2} + e^{-x/l_2} \sin \left( k_0 x - \frac{\varphi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\mathcal{N} = \frac{2}{\sqrt{l_2(1 + \alpha^2)}}, \quad (7)$$

$$l_1 = -\frac{\chi \mathcal{B}}{\mathcal{A}}, \quad l_2 = -\frac{\mathcal{A}}{\chi \delta_0}, \quad k_0 = \frac{\gamma}{\mathcal{A}}, \quad \tan \varphi = -\frac{\gamma}{\chi \delta_0}, \quad (8)$$

и

$$\chi = \frac{\sqrt{\mathcal{B}^2 - \mathcal{D}^2}}{|\mathcal{B}|}. \quad (9)$$

При выводе уравнения (6) использовалось соотношение  $l_1 \ll l_2$ , которое выполнено в реалистичных квантовых ямах. Так, из (8) следует, что для приведенных выше параметров  $l_1 \approx 10 \text{ \AA}$ ,  $l_2 \approx 540 \text{ \AA}$ . В дальнейшем, при

получении результатов мы будем считать соотношение  $l_1 \ll l_2$  выполненным. Формулы (3)–(9) являются обобщениями результатов работы [32] (случай  $\mathcal{D} \neq 0$ ,  $\gamma = 0$ ) и работы [29] (случай  $\mathcal{D} = 0$ ,  $\gamma \neq 0$ ). Из полученных формул видно, что несмотря на малость параметров  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{D}$  (что проявляется в малости длины  $l_1$ ), все результаты существенно зависят от отношения  $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ .

Ключевое следствие электрон-дырочной асимметрии — это сдвиг дираковской точки ( $\varepsilon_{0s}$ ) из середины щели ( $\varepsilon = 0$ ). Из формулы (3) следует, что дираковская точка сдвигается пропорционально отношению  $\mathcal{D}/\mathcal{B}$ : при  $\mathcal{D} < 0$  сдвиг происходит в сторону зоны проводимости, в случае  $\mathcal{D} > 0$  — в сторону валентной зоны. Сдвиг дираковской точки приводит к перераспределению относительных вкладов подзон  $|E1, \pm 1/2\rangle$  и  $|H1, \pm 3/2\rangle$  в волновые функции, увеличению длины затухания  $l_2$  и изменению скорости краевых электронов. В предельных случаях  $\mathcal{D} = \pm \mathcal{B}$  дираковская точка попадает на границу энергетической щели, и краевые состояния при  $k_y = 0$  гибридизуются с объемными. Как следует из (8), в этом случае  $l_2 \rightarrow \infty$ .

Спроецировав часть гамильтониана (1), в которую входят слагаемые с  $k_y$ , на волновые функции (4), получим энергию краевых состояний с точностью до линейных по  $k_y$  вкладов

$$\varepsilon_{k_y, s} = -\delta_0 \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{B}} + 2s \hbar v_0 k_y, \quad (10)$$

где скорость краевых электронов

$$v_0 = \frac{\mathcal{A}}{\hbar} \frac{|\delta_0| \chi^2}{\sqrt{\chi^2 \delta_0^2 + \gamma^2}}. \quad (11)$$

### 3. Эффект Зеемана для краевых состояний

В рамках рассматриваемой  $k\mathbf{p}$ -модели взаимодействие электрона с магнитным полем  $\mathbf{B}$  характеризуется суммой орбитального вклада, описываемого гамильтонианом (1) с подстановкой Пайерлса  $\mathcal{H}_0[\mathbf{k} - (e/c\hbar)\mathbf{A}]$ , где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля, и зеемановского вклада [26]

$$\mathcal{H}_Z = \frac{\mu_B}{2} \begin{pmatrix} g_e^\perp B_z & 0 & g_e^\parallel B_- & 0 \\ 0 & g_h^\perp B_z & 0 & g_h^\parallel e^{-4i\theta} B_+ \\ g_e^\parallel B_+ & 0 & -g_e^\perp B_z & 0 \\ 0 & g_h^\parallel e^{4i\theta} B_- & 0 & -g_h^\perp B_z \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $g_e^\parallel$ ,  $g_e^\perp$ ,  $g_h^\parallel$  и  $g_h^\perp$  —  $g$ -факторы подзон  $|E1\rangle$  и  $|H1\rangle$ , содержащие вклады от смешивания с далекими электронными и дырочными подзонами,  $B_\pm = B_x \pm iB_y$ , и  $\mu_B$  — магнетон Бора.

Взаимодействие магнитного поля с краевыми электронами в базисе  $(\psi_{0+1/2}, \psi_{0-1/2})$  описывается эффективным гамильтонианом

$$\mathcal{H}_{\text{edge}}^{(\mathbf{B})} = \frac{\mu_B}{2} \sum_{\alpha, \beta=x, y, z} g_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha} B_{\beta}, \quad (13)$$

где  $g_{\alpha\beta}$  — компоненты тензора  $g$ -фактора краевых электронов, и  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  — матрицы Паули. Спроецировав гамильтониан (12) на волновые функции (4), получим компоненты  $g$ -фактора для поля  $\mathbf{B}$  в плоскости ямы

$$\begin{aligned} g_{xx} &= g_1 \cos^2 2\theta + g_2 \sin^2 2\theta, \\ g_{yy} &= g_1 \sin^2 2\theta + g_2 \cos^2 2\theta, \\ g_{xy} &= g_{yx} = \frac{1}{2} (g_1 - g_2) \sin 4\theta, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{B} - \mathcal{D}}{\mathcal{B}} g_e^{\parallel} - \frac{\mathcal{B} + \mathcal{D}}{\mathcal{B}} g_h^{\parallel} \right), \\ g_2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{B} - \mathcal{D}}{\mathcal{B}} g_e^{\parallel} + \frac{\mathcal{B} + \mathcal{D}}{\mathcal{B}} g_h^{\parallel} \right) \frac{|\delta_0| \chi}{\sqrt{\chi^2 \delta_0^2 + \gamma^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Формула (15) является обобщением результатов работы [29] на случай  $\mathcal{D} \neq 0$ . Поскольку  $g$ -фактор тяжелой дырки  $g_h^{\parallel}$  близок к нулю в квантовых ямах из материалов с решеткой цинковой обманки [33], то основной вклад в  $g_1$  и  $g_2$  дается первыми слагаемыми в (15). В реальных структурах множитель  $(\mathcal{B} - \mathcal{D})/\mathcal{B}$  может сильно отличаться от единицы, например, для параметров, приведенных в разделе II,  $(\mathcal{B} - \mathcal{D})/\mathcal{B} \approx 1/4$ , то есть  $g$ -факторы для поля в плоскости ямы уменьшаются примерно в четыре раза по сравнению со случаем  $\mathcal{D} = 0$ . Оценки дают  $g_1 \approx 2.5$ ,  $g_2 \approx 2$ , что согласуется с результатами численного моделирования спектра краевых состояний в работе [31].

Магнитное поле, направленное по нормали к квантовой яме, смешивает подзоны  $|E1\rangle$  и  $|H1\rangle$ , что приводит к большим орбитальным вкладам в компоненты  $g_{\alpha z}$ . Диагональная компонента  $g_{zz}$ , как и в случае  $\mathcal{D} = 0$ , зависит от калибровки векторного потенциала и может быть выбрана нулем [29], в то время как недиагональные компоненты не зависят от калибровки и имеют следующий вид:

$$g_{xz} = -g_3 \sin 2\theta, \quad g_{yz} = g_3 \cos 2\theta, \quad (16)$$

где

$$g_3 = \frac{2m_0 \mathcal{A}^2}{\hbar^2} \frac{\gamma |\delta_0| \chi^2}{(\delta_0^2 \chi^2 + \gamma^2)^{3/2}}. \quad (17)$$

Оценки дают  $g_3 \approx 130$ , то есть  $g_3 \gg g_1, g_2$ .

Магнитное поле смешивает краевые состояния и открывает щель в их спектре. Величина щели при  $\theta = 0$

$$\varepsilon_g = \mu_B \sqrt{g_1^2 B_x^2 + (g_2 B_y + g_3 B_z)^2}. \quad (18)$$

Как следует из (18), щель открывается для любого направления поля за исключением случая, когда поле лежит в плоскости  $yz$  и направлено под углом  $-\arctan g_2/g_3$  к оси  $y$ . Отметим, что для любой ориентации края (любого  $\theta$ ) существует направление в пространстве, вдоль которого приложенное поле не открывает щель.

Гигантская анизотропия  $g$ -фактора подтверждается в экспериментах по магнитотранспорту. В работе [7] обнаружено, что перпендикулярное магнитное поле приводит к подавлению проводимости по краевым каналам за счет открытия зеэмановской щели, тогда как влияние продольного магнитного поля на проводимость значительно слабее.

#### 4. Структура краевых состояний при ненулевом волновом векторе

Для того чтобы изучать электронный транспорт и оптические переходы с участием краевых электронов, необходимо знать волновые функции и спектр краевых состояний при ненулевом волновом векторе движения вдоль края. В этом разделе мы найдем спектр и волновые функции краевых состояний при  $k_y \neq 0$ . В рамках изотропной модели, соответствующей  $\gamma = 0$  в гамильтониане (1), а также в рамках модели без центра инверсии, но при наличии электрон-дырочной симметрии ( $\gamma \neq 0, \mathcal{D} = 0$ ), приведены аналитические выражения для спектра и волновых функций во всем диапазоне волновых векторов. В более общем случае получены приближенные результаты, справедливые при малой величине отношения  $\mathcal{D}/\mathcal{B}$  или  $\gamma/|\delta_0|$ .

##### А. Изотропная модель

Рассмотрим для начала случай  $\gamma = 0$ , соответствующий изотропной модели. Детальный анализ структуры краевых состояний в изотропной модели приведен в работе [25]. В этом случае гамильтониан (1) распадается на два независимых блока размерностью  $2 \times 2$ . При  $\gamma = 0$  уравнение Шредингера (2) имеет аналитическое решение, справедливое во всем диапазоне  $k_y$  [20,25]

$$\varepsilon_{k_y s}^{(0)} = -q\delta_0 + 2s\chi \mathcal{A} k_y, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \psi_{k_y+1/2}^{(0)} &= \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{2L}} \begin{bmatrix} a(x, k_y) \\ -\alpha a(x, k_y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \psi_{k_y-1/2}^{(0)} &= \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{2L}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a(x, -k_y) \\ \alpha a(x, -k_y) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь  $q = \mathcal{D}/\mathcal{B}$ , функция  $a$  имеет вид [см. (6) при  $\gamma = 0$ ]

$$a(x, k_y) = \frac{2}{\sqrt{l_2(k_y)(1 + \alpha^2)}} \left[ e^{-x/l_1} - e^{-x/l_2(k_y)} \right], \quad (21)$$

с учетом зависимости длины локализации краевых состояний  $l_2$  от волнового вектора

$$l_2(k_y)^{-1} = l_2^{-1} - qk_y - k_y^2 l_1, \quad (22)$$

и длины  $l_1$  и  $l_2$  даются формулами (8). Полученное выражение для  $a(x, k_y)$  справедливо, как и ранее, при  $l_1 \ll l_2(k_y)$ . Член  $k_y^2 l_1$  мал во всем диапазоне исследуемых  $k_y$ , поэтому в дальнейшем он не будет учитываться.

Важным следствием электрон-дырочной асимметрии ( $q \neq 0$ ) является зависимость длины затухания краевого состояния от  $k_y$ . Как будет показано ниже, эта зависимость приводит к ненулевому матричному элементу оператора электрического дипольного момента между краевыми состояниями.

Рассмотрим подробнее случай  $q > 0$ . Как следует из (22), длина  $l_2(k_y)$  обращается в бесконечность при  $k_y = k^* = 1/(ql_2)$  для краевого состояния с  $s = +1/2$  и при  $k_y = -k^*$  для состояния с  $s = -1/2$ . Можно показать, что в точках  $k_y = \pm k^*$  дисперсионные ветви краевых состояний (19) касаются нижней границы зоны проводимости  $\epsilon_c = \sqrt{\delta_0^2 + \mathcal{A}^2 k_y^2}$ . В этих точках краевые состояния „сливаются“ с объемными (двумерными) состояниями. Однако отметим, что процессы упругого рассеяния из краевых состояний в состояния зоны проводимости включаются значительно раньше, уже при  $\epsilon_{k_y,s} = -\delta_0$ , то есть при  $k_y = 1/l_2(1 + q)$ .

При движении по дисперсионным ветвям краевых состояний в сторону валентной зоны длина  $l_2(k_y)$  уменьшается. При  $\epsilon_{k_y,s} = \delta_0$ , когда энергия краевых состояний сравнивается с энергией потолка валентной зоны,  $l_2(k_y) = l_2(1 - q)$ . При дальнейшем увеличении волнового вектора  $l_2(k_y)$  может стать сравнимой с  $l_1$ , и формулы (21), (22) перестают быть применимы. Аккуратный анализ этой ситуации изложен в работе [25].

## В. Модель без центра инверсии

Перейдем теперь к модели реалистичных квантовых ям без центра пространственной инверсии, которая описывается гамильтонианом (1) с  $\gamma \neq 0$ . Мы получим аналитические результаты в двух пределах: в пределе  $\gamma/|\delta_0| \ll 1$ , когда антидиагональные члены гамильтониана (1) можно считать малым возмущением, и в пределе  $|\mathcal{D}/\mathcal{B}| \ll 1$ , то есть в пределе малой электрон-дырочной асимметрии.

### 1. Предел $\gamma/|\delta_0| \ll 1$

В этом разделе будем считать антидиагональные члены гамильтониана (1) малым возмущением.

Невозмущенные волновые функции  $\psi_{k_y, \pm 1/2}^{(0)}$  краевых состояний найдены в разделе 4 для произвольного  $k_y$ ,

см. (20). Обратим внимание, что в первом порядке теории возмущений по  $\gamma$  краевые состояния  $\psi_{k_y, \pm 1/2}^{(0)}$  не смешиваются и не сдвигаются по энергии. Это означает, что поправки к волновым функциям краевых состояний связаны с подмешиванием к краевым состояниям объемных состояний зоны проводимости и валентной зоны.

Таким образом, в первом порядке теории возмущений по  $\gamma$  энергия краевых состояний не меняется и совпадает с (19). Волновые функции краевых состояний будем искать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{k_y, +1/2} &= \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{2L}} \begin{bmatrix} a_1(x, k_y) \\ -\alpha a_2(x, k_y) \\ -ib_1(x, k_y)e^{2i\theta} \\ -iab_2(x, k_y)e^{2i\theta} \end{bmatrix}, \\ \psi_{k_y, -1/2} &= \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{2L}} \begin{bmatrix} -ib_1(x, -k_y)e^{-2i\theta} \\ iab_2(x, -k_y)e^{-2i\theta} \\ a_1(x, -k_y) \\ \alpha a_2(x, -k_y) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $b_1$  и  $b_2$  — искомые функции  $\propto \gamma$ . В первом порядке теории возмущений функции  $a_1$  и  $a_2$  равны и совпадают с невозмущенной функцией (21). Функция  $\psi_{k_y, -1/2}$  связана с  $\psi_{k_y, +1/2}$  операцией инверсией времени. Уравнение (2) с невозмущенной энергией (19) приводит к следующей системе уравнений на  $b_1$  и  $b_2$

$$\begin{aligned} l_1 b_1'' + b_2' + [l_2(k_y)^{-1} + k_y] b_1 + k_y b_2 &= -k_0 a, \\ l_1 b_2'' + b_1' + [l_2(k_y)^{-1} - k_y] b_2 - k_y b_1 &= -k_0 a. \end{aligned} \quad (24)$$

Решение этой системы, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$b_1 = b(x) + B(x), \quad b_2 = b(x) - B(x), \quad (25)$$

где

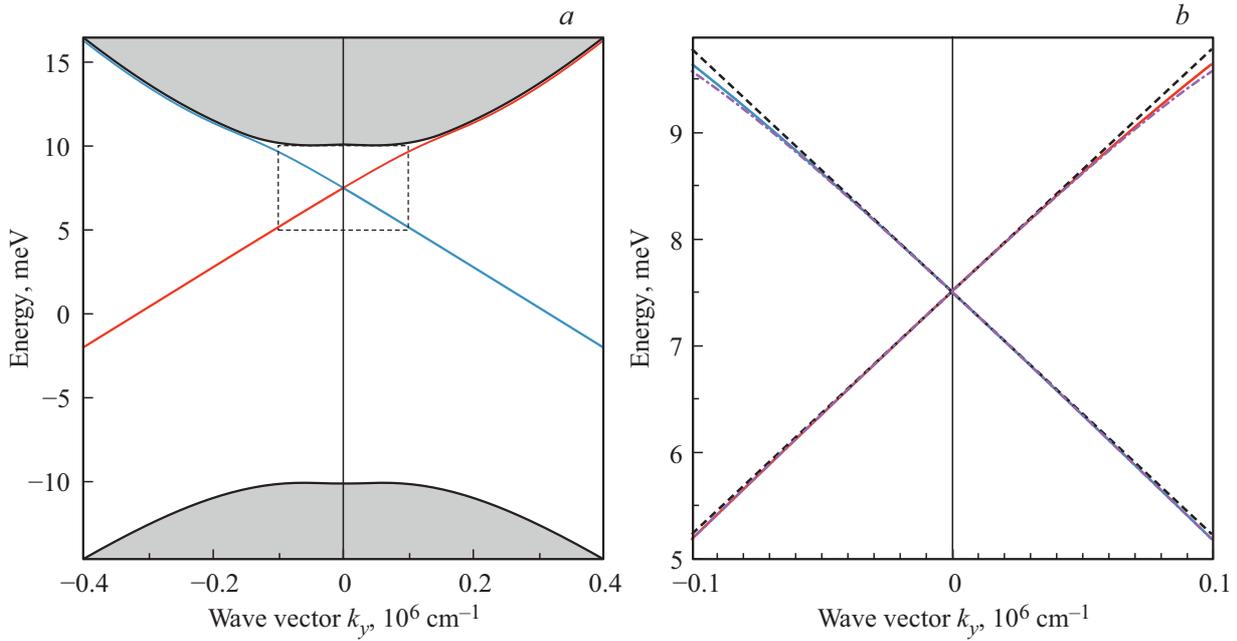
$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{\mathcal{N}(k_y) k_0 l_2(k_y)}{2} \left\{ e^{-x/l_1} + \left[ \frac{2x}{l_2(k_y)} - 1 \right] e^{-x/l_2(k_y)} \right\}, \\ B(x) &= -\mathcal{N}(k_y) k_0 k_y l_2(k_y) x e^{-x/l_2(k_y)}, \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$\mathcal{N}(k_y) = \frac{2}{\sqrt{l_2(k_y)(1 + \alpha^2)}}.$$

При  $k_y = 0$  функции  $b_1$  и  $b_2$  равны и совпадают с выражением (6), взятым в пределе  $\gamma/|\delta_0| \ll 1$ . Для применимости теории возмущений нужно, чтобы функции  $b_{1,2}$  были малы по сравнению с  $a$ , то есть  $k_0 l_2(k_y) \ll 1$ . Это накладывает ограничение на диапазон применимости полученных формул по  $k_y$ .

Используя полученные в первом порядке теории возмущений по  $\gamma/|\delta_0|$  поправки к волновым функциям,



**Рис. 2.** Дисперсия электронных состояний в квантовой яме HgTe/HgCdTe для зонных параметров, приведенных в тексте, и  $\gamma = 2 \text{ meV}$ , так что  $\gamma/|\delta_0| = 0.2$ . Ветви краевых состояний выделены. На панели *b*) показан увеличенный фрагмент дисперсии краевых состояний. Сплошные линии — численный расчет, штриховые линии — линейная зависимость со скоростью, рассчитанной по формуле (11), штрих-пунктирные линии — зависимость  $\varepsilon_{k_y,s}^{(0)} + \varepsilon_{k_y,s}^{(2)}$ , учитывающая отклонение от линейного поведения.

найдем поправки второго порядка к энергии краевых состояний:

$$\varepsilon_{k_y,s}^{(2)} = \langle \psi_{k_y,s}^{(0)} | V_\gamma | \psi_{k_y,s}^{(1)} \rangle, \quad (27)$$

где  $\psi_{k_y,s}^{(0)}$  — волновые функции нулевого приближения (20),  $\psi_{k_y,s}^{(1)}$  — линейная по  $\gamma$  часть волновых функций (23), и  $V_\gamma$  — антидиагональная часть гамильтониана (1). Расчет показывает, что

$$\varepsilon_{k_y,s}^{(2)} = -\frac{\gamma^2}{2|\delta_0|} \frac{k_y l_2}{(1 - qk_y l_2)^2}. \quad (28)$$

Формула (28) содержит как квадратичную по  $\gamma$  поправку к скорости краевых электронов, так и, в случае  $q \neq 0$ , члены более высоких степеней по  $k_y$ . Таким образом, при одновременном выполнении двух условий — электрон-дырочной асимметрии и отсутствии центра инверсии ( $q \neq 0$  и  $\gamma \neq 0$ ) — спектр краевых электронов отклоняется от линейного. Как и прежде, формула (28) применима в случае  $k_0 l_2(k_y) \ll 1$ , то есть при  $1 - qk_y l_2 \gg k_0 l_2$ .

На рис. 2 приведены результаты численного расчета краевых и объемных состояний в яме HgTe/CdHgTe и сравнение с полученными аналитическими зависимостями. Видно, что спектр краевых электронов отклоняется от линейного со скоростью (11), и это отклонение хорошо описывается зависимостью  $\varepsilon_{k_y,s} = \varepsilon_{k_y,s}^{(0)} + \varepsilon_{k_y,s}^{(2)}$ . Поправки к линейной дисперсии краевых электронов исследовались также в работе [25] в рамках изотропной модели, но с граничными условиями более сложного

вида. Нелинейность спектра приводит, например, к генерации краевого фототока в краевых каналах за счет непрямых оптических переходов [16].

## 2. Предел малой электрон-дырочной асимметрии

В случае произвольной величины  $\gamma$ , но при  $q = \mathcal{D}/\mathcal{B} \ll 1$  можно также получить аналитические выражения для краевых состояний. По-прежнему, будем искать волновые функции краевых состояний в виде (23). Рассмотрим подробно состояние  $\psi_{k_y+1/2}$ . Волновая функция состояния  $\psi_{k_y-1/2}$  связана с  $\psi_{k_y+1/2}$  формулой (23), а энергия  $\varepsilon_{k_y-1/2} = \varepsilon_{-k_y+1/2}$ . Уравнение Шредингера (2) на функцию  $\psi_{k_y+1/2}$  приводит к следующей системе

$$\begin{aligned} l_1 a_1'' + a_2' + \left( l_2^{-1} + \frac{E}{\alpha \mathcal{A}} \right) a_1 - k_y a_2 - k_0 b_2 &= 0, \\ l_1 a_2'' + a_1' + \left( l_2^{-1} - \frac{\alpha E}{\mathcal{A}} \right) a_2 + k_y a_1 - k_0 b_1 &= 0, \\ l_1 b_1'' + b_2' + \left( l_2^{-1} + \frac{E}{\alpha \mathcal{A}} \right) b_1 + k_y b_2 + k_0 a_2 &= 0, \\ l_1 b_2'' + b_1' + \left( l_2^{-1} - \frac{\alpha E}{\mathcal{A}} \right) b_2 - k_y b_1 + k_0 a_1 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где мы представили энергию краевого состояния в виде  $\varepsilon_{k_y+1/2} = -q\delta_0 + E$ .

Система (29) имеет аналитическое решение при  $q = 0$  ( $\alpha = 1$ ) с энергией

$$E^{(0)} = \frac{\mathcal{A}k_y |\delta_0|}{\sqrt{\delta_0^2 + \gamma^2}}. \quad (30)$$

Таким образом, спектр краевых состояний, полученный в разделе 2 по теории возмущений при малых  $k_y$ , остается в случае  $q = 0$  линейным во всем диапазоне волновых векторов. Подробности решения, а также выражения для функций  $a_{1,2}$  и  $b_{1,2}$  приведены в приложении.

При  $q \ll 1$  с точностью до линейных по  $q$  слагаемых имеем  $\alpha \approx 1 + q$  и  $\alpha^{-1} \approx 1 - q$ . Таким образом, система (29) имеет такой же вид, что и при  $q = 0$ , только теперь длина  $l_2$  зависит от энергии

$$l_2^{-1}(E) = l_2^{-1} - \frac{qE}{\mathcal{A}}. \quad (31)$$

В этой формуле с точностью до членов, линейных по  $q$ , можно положить  $E = E^{(0)}$ , и тогда получим

$$l_2^{-1}(k_y) \approx l_2^{-1} - \frac{qk_y |\delta_0|}{\sqrt{\delta_0^2 + \gamma^2}}. \quad (32)$$

Формула (32) описывает зависимость длины затухания краевого состояния  $s = +1/2$  от  $k_y$  при  $q \ll 1$ .

Чтобы найти поправки к дисперсии краевых состояний (30) при  $q \ll 1$  подставим выражение (32) для  $l_2(k_y)$  в правую часть формулы (30) для энергии. Получим в первом порядке по  $q$

$$E \approx E^{(0)} - q\mathcal{A}^2 k_y^2 \frac{\gamma^2 |\delta_0|}{(\delta_0^2 + \gamma^2)^2}. \quad (33)$$

Из формулы (33) следует, что при наличии электрон-дырочной асимметрии спектр краевых состояний перестает быть строго линейным, и в нем появляются квадратичные по волновому вектору поправки. Этот результат согласуется с полученным в пределе  $\gamma/|\delta_0| \ll 1$ , см. формулу (28).

## 5. Матричные элементы оптических переходов

Возбуждение края топологического изолятора электромагнитной волной вызывает оптические переходы между спиновыми ветвями краевых состояний. Благодаря отсутствию центра пространственной инверсии в квантовых ямах HgTe/HgCdTe оптические переходы возникают за счет электродипольного механизма [31]. Матричный элемент электрон-фотонного взаимодействия пропорционален матричным элементам оператора скорости  $\mathbf{v} = \partial \mathcal{H}_0 / \hbar \partial \mathbf{k}$  между состояниями  $\psi_{k_y, s}$  и  $\psi_{k_y, -s}$  [31]:

$$\begin{aligned} v_{s-s}^{(x)} &= \langle \psi_{k_y, s} | v_x | \psi_{k_y, -s} \rangle = u_1 e^{-4is\theta}, \\ v_{s-s}^{(y)} &= \langle \psi_{k_y, s} | v_y | \psi_{k_y, -s} \rangle = 2isu_2 e^{-4is\theta}. \end{aligned} \quad (34)$$

В этом разделе мы рассчитаем величины  $u_1$  и  $u_2$  в пределе  $\gamma/|\delta_0| \ll 1$ . Функции  $\psi_{k_y, s}$  для этого случая найдены в разделе 4, см. формулы (23), (25), (26). Расчет дает

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_0 k_0 k_y l_2^2 [l_2(k_y) - l_2(-k_y)]}{2\sqrt{l_2(k_y)l_2(-k_y)}}, \\ u_2 &= \frac{v_0 k_0 l_2^2}{\sqrt{l_2(k_y)l_2(-k_y)}} \left[ 1 - \frac{l_2(k_y) + l_2(-k_y)}{2l_2} \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где  $v_0 = \kappa \mathcal{A} / \hbar$  — скорость краевых электронов при  $\gamma/|\delta_0| \ll 1$ . После упрощений получим

$$u_1 = v_0 \frac{qk_0 k_y^2 l_2^3}{\sqrt{1 - q^2 k_y^2 l_2^2}}, \quad u_2 = -qu_1. \quad (36)$$

Формулы (35), (36) справедливы при произвольной величине  $q$  и для волновых векторов  $k_y$ , при которых выполняется соотношение  $1 - qk_y l_2 \gg k_0 l_2$ . Также везде в расчетах, как в волновых функциях, так и в операторе скорости, положено  $l_1 = 0$ .

Как следует из (35), матричные элементы  $u_1$  и  $u_2$  отличны от нуля в меру зависимости длины затухания краевых состояний от  $k_y$ , а следовательно, обращаются в ноль если система обладает электрон-дырочной симметрией ( $q = \mathcal{D}/\mathcal{B} = 0$ ). Можно показать, однако, что с учетом малых вкладов  $\propto l_1/l_2$  матричный элемент  $u_2 \neq 0$  даже при  $q = 0$ .

На рис. 3 приведены результаты расчетов матричных элементов  $u_1$  и  $u_2$  двумя методами — с помощью численной диагонализации гамильтониана (1) и по формулам (36). Из графиков видно, что в случае  $\gamma/|\delta_0| = 0.1$  аналитические расчеты хорошо согласуются с численными, однако при  $\gamma/|\delta_0| = 0.2$  уже наблюдается значительное расхождение, причем формулы (36) переоценивают величины  $u_1$  и  $u_2$ . Одна из причин — это то, что с ростом  $\gamma$  уменьшается скорость краевых электронов  $v_0$ , которая входит в выражения для  $u_1$  и  $u_2$ .

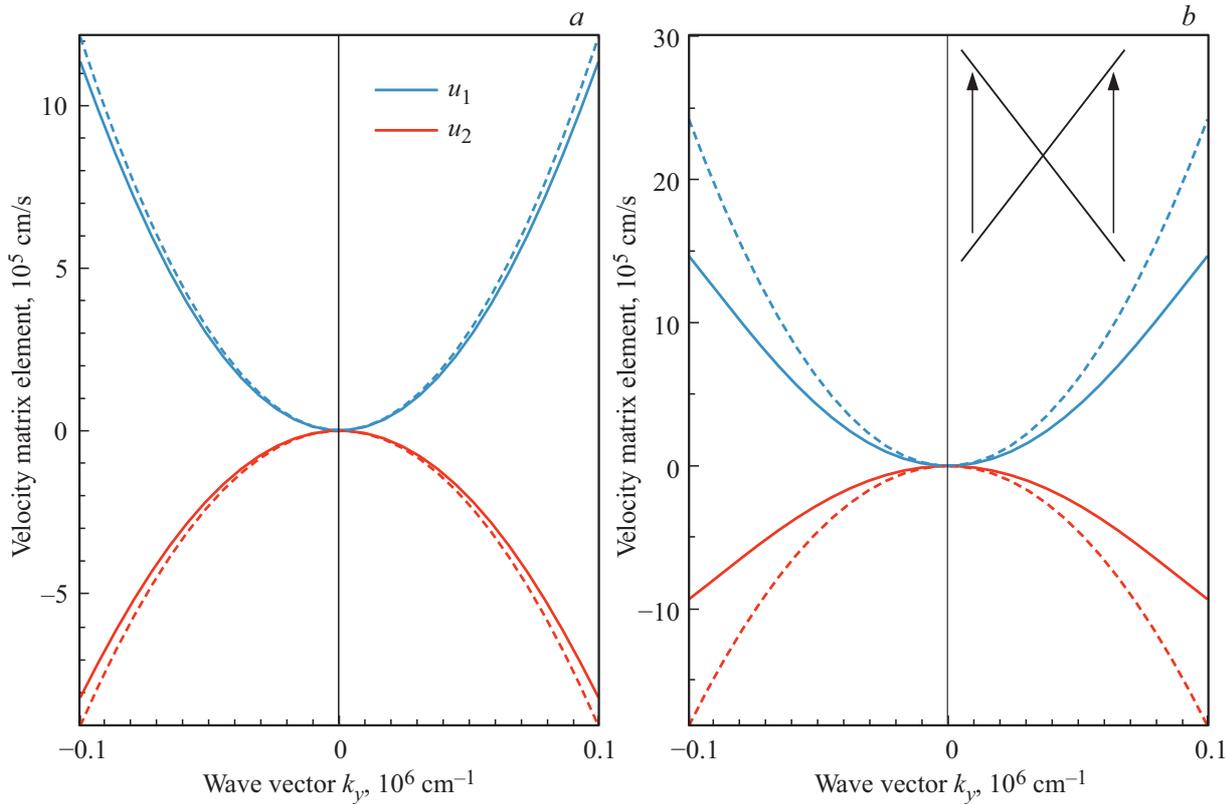
Оптические переходы между краевыми состояниями можно также охарактеризовать матричными элементами оператора дипольного момента, которые при малых  $k_y$  имеют вид [31]:

$$d_{s-s}^{(x)} = -2sie^{-4is\theta} D_1 k_y, \quad d_{s-s}^{(y)} = e^{-4is\theta} D_2 k_y, \quad (37)$$

где  $D_{1,2} = eu_{1,2}/|k_y \omega_{s-s}|$  и  $\hbar \omega_{s-s} = \epsilon_{k_y, s} - \epsilon_{k_y, -s}$ . С учетом (36)

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{e}{2} q k_0 l_2^3 = \frac{e \mathcal{D} \mathcal{B}^2}{2(\mathcal{B}^2 - \mathcal{D}^2)^{3/2}} \frac{\gamma \mathcal{A}^2}{\delta_0^3}, \\ D_2 &= -q D_1 = -\frac{e \mathcal{D}^2 \mathcal{B}}{2(\mathcal{B}^2 - \mathcal{D}^2)^{3/2}} \frac{\gamma \mathcal{A}^2}{\delta_0^3}. \end{aligned} \quad (38)$$

Оценка по формуле (38) при  $\gamma/|\delta_0| = 0.1$  дает  $D_1/e \approx 1.7 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2$  и  $D_2/e \approx -1.2 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2$ . Эта оценка согласуется по порядку величины с полученными в работе [31] численными оценками в случае  $\gamma/|\delta_0| = 0.5$ .



**Рис. 3.** Матричные элементы оператора скорости  $u_1$  и  $u_2$  для  $\gamma/|\delta_0| = 0.1$  (а) и  $\gamma/|\delta_0| = 0.2$  (б). Сплошные кривые — численный расчет, пунктирные — расчет по формулам (36). На вставке приведена схема оптических переходов.

При поглощении спиральными каналами циркулярно поляризованного света оптические переходы идут асимметрично в  $k$ -пространстве, что приводит к генерации спиновой поляризации и краевого фототока [31]. Относительная разность темпов оптических переходов из состояний  $\psi_{k_y-1/2}$  и  $\psi_{-k_y+1/2}$ ,  $g_{k_y-1/2}$  и  $g_{-k_y+1/2}$ , соответственно, пропорциональна степени циркулярной поляризации падающего света  $P_{\text{circ}}$  и равна

$$\frac{g_{k_y-1/2} - g_{-k_y+1/2}}{g_{k_y-1/2} + g_{-k_y+1/2}} = KP_{\text{circ}}, \quad (39)$$

где

$$K = -\frac{2D_1D_2}{D_1^2 + D_2^2} = \frac{2\mathcal{D}\mathcal{B}}{\mathcal{B}^2 + \mathcal{D}^2}.$$

Отметим, что коэффициент асимметрии  $K$  для переходов между крайвыми состояниями оказывается равным аналогичному коэффициенту для переходов из крайвых состояний в объемные [24]. В обоих случаях  $K = 0$ , если система обладает электрон-дырочной симметрией ( $\mathcal{D} = 0$ ). Этот результат — следствие более общего утверждения об отсутствии спиновой поляризации и фотогальванического эффекта при поглощении циркулярно поляризованного излучения системой, обладающей электрон-дырочной симметрией [31].

### 6. Роль граничных условий

Результаты работы получены для простейшего „открытого“ граничного условия  $\psi(x = 0) = 0$ . Решения, полученные с более сложным граничным условием  $\psi'(x = 0) + h\psi(x = 0) = 0$ , будут отличаться от рассмотренных в работе только коэффициентами перед экспонентами  $e^{-x/l_1}$  и  $e^{-x/l_2}$  в функциях  $a(x)$  и  $b(x)$ , см. например (6). В итоге, изменение параметра  $h$  приводит к изменению волновых функций непосредственно вблизи края на масштабе  $l_1$ , и следовательно все полученные результаты не зависят от величины  $h$ , поскольку они определяются поведением волновых функций на значительно большем масштабе  $l_2$ .

Наиболее общий вид граничных условий на границе топологического изолятора с вакуумом получен из общих физических соображений в работе [23]. Граничные условия общего вида учитывают подмешивание краем структуры далеких подзон к рассматриваемым в  $kp$ -модели.

В частности, возможен случай, когда граничное условие само по себе нарушает электрон-дырочную симметрию в системе. В этом случае даже при  $\mathcal{D} = \mathcal{B} = 0$  в гамильтониане квантовой ямы спектр крайвых состояний становится асимметричным относительно центра запрещенной зоны и отклоняется от линейного [23,35].

Еще одним примером системы со спиральными состояниями является граница двух квантовых ям HgTe/HgCdTe разной ширины, находящихся в фазе тривиального и топологического изолятора. В простейшем случае такой контакт можно смоделировать знакопеременной зависимостью  $\delta_0(x)$  в гамильтониане (1), считая, что остальные зонные параметры слабо зависят от ширины ямы. В случае  $\mathcal{B} = \mathcal{D} = 0$  такая модель предсказывает наличие краевых состояний с симметричным линейным спектром [34,35]. Однако, если  $\mathcal{B} \neq 0$  и  $\mathcal{D} \neq 0$ , ситуация становится более сложной. Положение дираковской точки и скорость краевых электронов зависит от соотношения величин  $\delta_0$  справа и слева от контакта. Пусть  $\delta_0(x > 0) = -\delta_r$ ,  $\delta_0(x < 0) = \delta_l$ , и  $\delta_{l,r} > 0$ . Тогда, если выполняется соотношение  $\mathcal{A}/\delta_r$ ,  $\mathcal{A}/\delta_l \gg l_1$ , то электрон-дырочная асимметрия не приводит к заметному изменению спектра краевых состояний. В этом случае диагональными слагаемыми  $\propto k^2$  в гамильтониане можно пренебречь без изменения физических результатов. Такая же ситуация реализуется в случае плавного контакта. Если же реализуется случай  $\mathcal{A}/\delta_r \gg l_1$ ,  $\mathcal{A}/\delta_l \lesssim l_1$ , то электрон-дырочная асимметрия начинает играть заметную роль в спектре краевых состояний. Предел  $\mathcal{A}/\delta_l \ll l_1$  соответствует ситуации, когда волновая функция не проникает в область  $x < 0$ , то есть открытому граничному условию.

## 7. Заключение

В работе изучено влияние электрон-дырочной асимметрии на электронную структуру спиральных краевых состояний в квантовой яме HgTe/HgCdTe. Получены аналитические выражения для волновых функций и энергетического спектра спиральных состояний, тензора  $g$ -фактора, матричных элементов оптических переходов между краевыми состояниями с противоположным спином в рамках электро-дипольного механизма. Показано, что при наличии электрон-дырочной асимметрии спектр краевых состояний отклоняется от линейного, и найдены поправки более высоких степеней по волновому вектору. Показано, что электрон-дырочная асимметрия оказывает наибольшее влияние на структуру спиральных состояний для резкой границы с вакуумом, в случае же плавной границы, например, контакта между двумя изоляторами, ее роль существенно снижается. Полученные результаты могут быть использованы при анализе магнито-транспортных явлений и краевого фотогальванического эффекта в квантовых ямах HgTe/HgCdTe.

## Приложение А: Расчет волновых функций краевых состояний при $\mathcal{D} = 0$

В этом разделе мы получим аналитические выражения для волновых функций  $\psi_{k_y,s}$  в случае  $\mathcal{D} = 0$  и в пределе  $\mathcal{D}/\mathcal{B} \ll 1$ . Функции  $\psi_{k_y,s}$  будем искать в виде (23), где система уравнений на функции  $a_{1,2}$  и

$b_{1,2}$  приведена в (29). Будем искать решение системы в виде  $a_{1,2}$ ,  $b_{1,2} \propto e^{-\lambda x}$  с положительными  $\lambda$ . Подставив решение в систему, найдем корни характеристического уравнения  $\lambda_j$  и соответствующие им вектора как функции энергии  $E$ . Можно показать, что граничное условие  $\psi_{k_y,s}(x=0) = 0$  может быть удовлетворено только при  $E = \mathcal{A}k_y/\sqrt{1+k_0^2l_2^2}$ , см. формулу (30).

В пределе  $l_1 \ll l_2$  найденной энергии отвечают следующие  $\lambda$ :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{l_1}, \quad \lambda_3 = \lambda_4^* = \frac{1}{l_2} - ik_0\sqrt{1 - \frac{E^2}{\delta_0^2}}. \quad (A1)$$

Из этой формулы видно, что при  $|E| < |\delta_0|$  (энергия краевого состояния лежит в объемной щели) меняется только период осциллирующей волновой функции, а длина затухания не меняется. При  $|E| > |\delta_0|$  начинает увеличиваться длина затухания, и наконец, при  $E = \pm\delta_0\sqrt{1 + \delta_0^2/\gamma^2}$  длина затухания обращается в бесконечность. Как и в случае  $\gamma = 0$ , это происходит в точке касания краевой и объемной дисперсионных ветвей.

Приведем также окончательные выражения для функций  $a_{1,2}$  и  $b_{1,2}$

$$\begin{aligned} a_1(x) &= v_1 \{ e^{-x/l_1} \cos \varphi_1 - e^{-x/l_2} \cos[k_0(E)x - \varphi_1] \}, \\ a_2(x) &= v_1 e^{-x/l_1} \cos \varphi_1 - v_2 e^{-x/l_2} \cos[k_0(E)x - \varphi_1 - \varphi_2], \\ b_1(x) &= e^{-x/l_1} \sin \varphi_1 + v_1 v_2 e^{-x/l_2} \sin[k_0(E)x - \varphi_1 - \varphi_2], \\ b_2(x) &= e^{-x/l_1} \sin \varphi_1 + e^{-x/l_2} \sin[k_0(E)x - \varphi_1]. \end{aligned} \quad (A2)$$

Здесь

$$k_0(E) = k_0\sqrt{1 - \frac{E^2}{\delta_0^2}}, \quad \tan 2\varphi_1 = \frac{k_0(E)l_2}{1 + k_y l_2}, \quad (A3)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{|\delta_0| - E}{|\delta_0| + E}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{|\delta_0|\sqrt{1 + k_0^2 l_2^2} - E}{|\delta_0|\sqrt{1 + k_0^2 l_2^2} + E}},$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{Ek_0 l_2}{\sqrt{\delta_0^2 - E^2}\sqrt{1 + k_0^2 l_2^2}}.$$

Как было показано в разделе IV B2, в случае  $\mathcal{D}/\mathcal{B} \ll 1$  система (29) имеет такой же вид, что и при  $\mathcal{D} = 0$ , только теперь длина  $l_2$  зависит от энергии по формуле (31). Таким образом, чтобы найти волновые функции краевых состояний в пределе  $\mathcal{D}/\mathcal{B} \ll 1$ , нужно подставить в формулы (A2) и (A3) длину  $l_2$ , определяемую выражением (31).

## Благодарности

Автор выражает благодарность С.А. Тарасенко за полезные обсуждения.

## Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации (проект № МК-2943.2019.2) и гранта Фонда развития теоретической физики и математики „Базис“.

Автор выражает благодарность С.А. Тарасенко за полезные обсуждения.

## Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] B.A. Bernevig, T.L. Hughes, S.-C. Zhang. *Science* **314**, 1757 (2006).
- [2] M.König, S. Wiedmann, C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, X.-L. Qi, S.-C. Zhang. *Science* **318**, 766 (2007).
- [3] I. Knez, R.-R. Du, G. Sullivan. *Phys. Rev. Lett.* **107**, 136603 (2011).
- [4] A. Roth, C. Brüne, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, J. Maciejko, X.-L. Qi, S.-C. Zhang. *Science* **325**, 294 (2009).
- [5] G.M. Gusev, Z.D. Kvon, O.A. Shegai, N.N. Mikhailov, S.A. Dvoretzky, J.C. Portal. *Phys. Rev. B* **84**, 121302 (2011).
- [6] E.Y. Ma, M.R. Calvo, J. Wang, B. Lian, M. Mühlbauer, C. Brüne, Y.-T. Cui, K. Lai, W. Kundhikanjana, Y. Yang, M. Baenninger, M. König, C. Ames, H. Buhmann, P. Leubner, L.W. Molenkamp, S.-C. Zhang, D. Goldhaber-Gordon, M. A. Kelly, Z.-X. Shen. *Nature Commun.* **6**, 7252 (2015).
- [7] S.U. Piatrusha, E.S. Tikhonov, Z.D. Kvon, N.N. Mikhailov, S.A. Dvoretzky, V.S. Khrapai. *Phys. Rev. Lett.* **123**, 056801 (2019).
- [8] Y. Tanaka, A. Furusaki, K.A. Matveev. *Phys. Rev. Lett.* **106**, 236402 (2011).
- [9] A.M. Lunde, G. Platero. *Phys. Rev. B* **86**, 035112 (2012).
- [10] B.L. Altshuler, I.L. Aleiner, V.I. Yudson. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 086401 (2013).
- [11] J.I. Väyrynen, M. Goldstein, Y. Gefen, L. I. Glazman. *Phys. Rev. B* **90**, 115309 (2014).
- [12] M.V. Entin, L.I. Magarill. *JETP Lett.* **100**, 566 (2015).
- [13] P.D. Kurilovich, V.D. Kurilovich, I.S. Burmistrov, M. Goldstein. *JETP Lett.* **106**, 593 (2017).
- [14] K.E. Nagaev. *Phys. Status Solidi (RRL)* — *Rap. Res. Lett.* **12**, 1700422 (2018).
- [15] K.-M. Dantscher, D.A. Kozlov, M.T. Scherr, S. Gebert, J. Bärenfänger, M.V. Durnev, S.A. Tarasenko, V.V. Bel'kov, N.N. Mikhailov, S.A. Dvoretzky, Z.D. Kvon, J. Ziegler, D. Weiss, S.D. Ganichev. *Phys. Rev. B* **95**, 201103 (2017).
- [16] M.V. Durnev, S.A. Tarasenko. *Ann. Phys.* 1800418 (2019).
- [17] Z. Fei, T. Palomaki, S. Wu, W. Zhao, X. Cai, B. Sun, P. Nguyen, J. Finney, X. Xu, D.H. Cobden. *Nature Phys.* **13**, 677 EP (2017).
- [18] X.-L. Qi, S.-C. Zhang. *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).
- [19] M. König, H. Buhmann, L.W. Molenkamp, T. Hughes, C.-X. Liu, X.-L. Qi, S.-C. Zhang. *J. Phys. Soc.* **77**, 031007 (2008).
- [20] B. Zhou, H.-Z. Lu, R.-L. Chu, S.-Q. Shen, Q. Niu. *Phys. Rev. Lett.* **101**, 246807 (2008).
- [21] E.B. Sonin. *Phys. Rev. B* **82**, 113307 (2010).
- [22] P.C. Klipstein. *Phys. Rev. B* **91**, 035310 (2015).
- [23] V.V. Enaldiev, I.V. Zagorodnev, V.A. Volkov. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **101**, 94 (2015).
- [24] V. Kaladzhyan, P.P. Aseev, S.N. Artemenko. *Phys. Rev. B* **92**, 155424 (2015).
- [25] M.V. Entin, M.M. Mahmoodian, L.I. Magarill. *EPL (Europhys. Lett.)* **118**, 57002 (2017).
- [26] X. Dai, T.L. Hughes, X.-L. Qi, Z. Fang, S.-C. Zhang. *Phys. Rev. B* **77**, 125319 (2008).
- [27] S.A. Tarasenko, M.V. Durnev, M.O. Nestoklon, E.L. Ivchenko, J.-W. Luo, A. Zunger. *Phys. Rev. B* **91**, 081302 (2015).
- [28] R. Winkler, L. Wang, Y. Lin, C. Chu. *Solid State Commun.* **152**, 2096 (2012).
- [29] M.V. Durnev, S.A. Tarasenko. *Phys. Rev. B* **93**, 075434 (2016).
- [30] G.M. Minkov, A.V. Germanenko, O.E. Rut, A.A. Sherstobitov, M.O. Nestoklon, S.A. Dvoretzki, N.N. Mikhailov. *Phys. Rev. B* **93**, 155304 (2016).
- [31] M.V. Durnev, S.A. Tarasenko. *J. Phys.: Condens. Matter* **31**, 035301 (2019).
- [32] M. Entin, L. Magarill. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **103**, 804 (2016).
- [33] X. Marie, T. Amand, P. Le Jeune, M. Paillard, P. Renucci, L.E. Golub, V.D. Dymnikov, E.L. Ivchenko. *Phys. Rev. B* **60**, 5811 (1999).
- [34] R. Jackiw, C. Rebbi. *Phys. Rev. D* **13**, 3398 (1976).
- [35] B.A. Volkov, O.A. Pankratov. *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **42**, 145 (1985).

*Редактор Т.Н. Василевская*