

03,09,12

Зависимость продольно-поперечного расщепления экситона в квантовой яме от внешнего однородного электрического поля

© Д.К. Логинов, А.В. Донец

Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: loginov999@gmail.com

Поступила в Редакцию 25 сентября 2019 г.

В окончательной редакции 25 сентября 2019 г.

Принята к публикации 2 октября 2019 г.

Проведено теоретическое рассмотрение уменьшения продольно-поперечного расщепления экситона в широкой квантовой яме GaAs/AlGaAs под действием однородного электрического поля. Определены зависимости его величины от приложенного поля. Рассчитаны экситонные спектры отражения широкой квантовой ямы для конфигурации, в которой поле направлено поперек слоя ямы. Продемонстрировано уменьшение амплитуды спектральных осцилляций, обусловленных вкладом экситона, из-за уменьшения светоэкситонного взаимодействия.

Ключевые слова: экситон, электрическое поле, спектры отражения, квантовая яма.

DOI: 10.21883/FTT.2020.02.48869.599

1. Введение

Наиболее распространенным и эффективным средством исследования экситонов в полупроводниковых материалах и различных структур на их основе является оптическая спектроскопия [1,2]. Этот метод успешно применялся с середины прошлого века для изучения покоящегося экситона в электрическом поле в объемных кристаллах, см., например [3–5]. В последние годы был так же выполнен ряд электрооптических исследований в объемных материалах. Так, авторами работы [6] развита теория, позволяющая описать спектры электроотражения объемного кристалла GaN, обусловленные основным состоянием покоящегося экситона. В работе [7] для этого же материала показано, что огибающая волновой функции покоящегося V -экситона деформирована вдоль направления электрического поля. В работах [8–10] были экспериментально и теоретически исследованы оптические спектры основного и первых нескольких возбужденных экситонных состояний в объемном Cu_2O .

Так же ранее широко исследовалось влияние электрического поля на спектры узких квантовых ям (КЯ). Например, в работе [11] были теоретически рассчитаны спектры пропускания КЯ на основе GaAs/AlGaAs и вычислен штарковский сдвиг для КЯ шириной 7 nm. В работе [12] экспериментально исследован штарковский сдвиг в $p-i-n$ -диоде на основе сверхрешетки Ge/Ge_xSi_{1-x} из квантовых ям. Построена экспериментальная зависимость штарковского сдвига от поля. Влияние размерного квантования на штарковский сдвиг в цепочках квантовых ям на основе GaAs/AlGaAs для основного и возбужденных состояний было теоретически исследовано в работах [13,14]. Расчеты показали, что размерное квантование уменьшает штарковский эффект для экситонных состояний.

Однако все вышеперечисленные и некоторые другие работы рассматривали либо состояния покоящегося объемного экситона, либо покоящегося двумерного экситона в узкой квантовой яме. Влияние электрического поля на спектры экситона, движущегося как целое, ранее почти не проводилось. В качестве исключения можно привести работу [15]. Ее авторами была теоретически проанализирована электро-оптическая функция P -экситона в режиме осцилляций Франца–Келдыша в плоскопараллельной пластинке.

Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию влияния внешнего однородного электрического поля на поляритонные спектры широкой КЯ. Квантовая яма считается широкой при условии, что ее размеры превосходят на порядок боровский радиус экситона. В спектрах таких КЯ наблюдаются особенности, обусловленные движением экситона. Приложив к структурам с такими КЯ внешнее однородное электрическое поле, можно изучать его влияние на состояния движения экситона. Ниже мы проанализировали влияние такого поля на продольно-поперечное расщепление экситона в широкой КЯ.

2. Теория

Мы рассматриваем экситон в кристалле с симметрией цинковой обманки, движущийся вдоль оси z , направление которой совпадает с кристаллографической осью [001]. Вдоль этого же направления действует внешнее однородное электрическое поле F . Оси x и y выбраны вдоль осей четвертого порядка [100] и [010].

Гамильтониан экситона строится из гамильтониана для свободного электрона и гамильтониана Латтинжера для дырки [16], их кулоновского взаимодействия и энер-

гии, обусловленной действием внешнего электрического поля.

Мы рассматриваем экситонные состояния с большим волновым вектором, $K \gg 1/a_B$, где a_B — боровский радиус экситона в объемном кристалле. В этом случае можно ограничиться рассмотрением только состояний экситонов с тяжелой дыркой [17], которые наиболее ярко проявляются в оптических спектрах [18]. Это позволяет пренебречь в экситонном гамильтониане членами, связанными с гофрировкой валентной зоны. Также для упрощения вычислений, будем считать приведенную массу электрона и дырки в экситоне сферически-симметричной. Это приведет к погрешности в энергии связи экситона, которая, как показывает анализ, не превышает 10% и непосредственно не влияет на обсуждаемый эффект. Поэтому, такое приближение для рассматриваемой задачи вполне допустимо.

При рассмотрении экситона удобно перейти от координат свободных электрона x_e, y_e, z_e и дырки x_h, y_h, z_h к координатам центра масс экситона вдоль оси z : $Z = (z_e m_e + m_h z_h)/M$ и координатам относительного движения электрона и дырки $x = x_e - x_h, y = y_e - y_h, z = z_e - z_h$. Здесь $M = m_e + m_h$ — масса экситон, где m_e и m_h — эффективные массы электрона и дырки соответственно.

Гамильтониан экситона во внешнем однородном электрическом поле может быть представлен в виде трех независимых слагаемых

$$\hat{H} = E_g + \hat{H}_K + \hat{H}_p. \quad (1)$$

В этом выражении E_g — ширина запрещенной зоны. Второй оператор описывает движение экситона по кристаллу как целого и может быть представлен в виде

$$\hat{H}_K = \frac{\hbar^2 K^2}{2M}. \quad (2)$$

Здесь K — величина волнового вектора движения экситона как целого. Третье слагаемое в гамильтониане (1) описывает относительное движение электрона и дырки и имеет вид

$$\hat{H}_p = -\frac{\hat{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{\epsilon_0 r} + eFz. \quad (3)$$

Здесь $\hat{p}^2 = \hbar^2 \partial_x^2 + \hbar^2 \partial_y^2 + \hbar^2 \partial_z^2$ — оператор квадрата импульса относительного движения электрона и дырки, e — заряд электрона, ϵ_0 — фоновая диэлектрическая проницаемость, r — расстояние между электроном и дыркой. Величина $\mu = m_e m_h / (m_e + m_h)$ — приведенная масса.

Для вычисления волновой функции и энергии основного состояния экситона в однородном электрическом поле используем стандартный метод разделения переменных в параболических координатах [19,20]. Для этого перейдем от декартовых к параболическим координатам согласно формулам

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z, \quad \varphi = \arctan(x/y). \quad (4)$$

В параболических координатах выражение для волновой функции принимает вид

$$\phi = A f_v(\eta) g_{v'}(\xi) e^{\pm i m \varphi}, \quad v' = v + \mu e^2 / (\epsilon_0 \hbar^2), \quad (5)$$

где A — нормировочный коэффициент, а функции $f_v(\eta)$ и $g_{v'}(\xi)$ являются решениями двух одномерных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{df_v(\eta)}{d\eta} \right) + \left(-\frac{m}{4\eta^2} - \frac{v}{\eta} + \frac{\mu R}{2\hbar^2} - \frac{\mu e F \eta}{4\hbar^2} \right) f_v(\eta) = 0, \\ & \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\eta \frac{dg_{v'}(\xi)}{d\xi} \right) + \left(-\frac{m}{4\xi^2} + \frac{v'}{\xi} + \frac{\mu R}{2\hbar^2} - \frac{\mu e F \xi}{4\hbar^2} \right) g_{v'}(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнениях R — энергия относительного движения электрона и дырки, а v — параметр разделения переменных. Со светом взаимодействуют только s -образные состояния, для которых проекция орбитального момента на выделенную ось $m = 0$. Поэтому, в дальнейшем, в уравнении (6) опускаем слагаемые, содержащие m .

Для дальнейшего вычисления введем безразмерную энергию

$$\beta = R/\hbar\theta = (E - E_g)/\hbar\theta. \quad (7)$$

Здесь $\hbar\theta = (\hbar^2 e^2 F^2 / 2\mu)^{1/3}$ — электрооптическая энергия.

Параметры разделения и заменим на безразмерные величины

$$\kappa = (4\hbar^2 / \mu e F)^{1/3} v, \quad \kappa' = \kappa + 2(F_1/F)^{1/3}. \quad (8)$$

Здесь

$$F_1 = R_b / e a_B = (\mu/m_0)^2 \epsilon_0^{-3} \times 2.59 \cdot 10^9 \text{ V/cm} \quad (9)$$

— поле ионизации экситона, где $R_b = \mu e^4 / 2\hbar^2 \epsilon_0^2$ — экситонный ридберг. В соответствии с [19,20] вводятся безразмерные координаты

$$\begin{aligned} \chi_f &= (F/F_1)^{1/3} (\eta/2a_B), \\ \chi_g &= (F/F_1)^{1/3} (\xi/2B). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $a_B = \hbar^2 \epsilon_0 / \mu e^2$ — боровский радиус экситона.

При такой замене переменных два уравнения (6) примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\chi_j} \frac{d}{d\chi_j} \left(\chi_j \frac{df_v}{d\chi_j} \right) + \left(-\frac{\kappa}{\chi_f} + \beta_j - \chi_j \right) f_v = 0, \\ & \frac{1}{\chi_g} \frac{d}{d\chi_g} \left(\chi_g \frac{dg_{v'}}{d\chi_g} \right) + \left(\frac{\kappa'}{\chi_g} + \beta_g + \chi_g \right) g_{v'} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где параметр κ должен быть таким, чтобы выполнялось условие $\beta_j = \beta_g = \beta$. Для краткости в дальнейшем у

функции f и g будем опускать индексы ν и ν' . Точное аналитическое решение этих уравнений к настоящему времени не получено в общем виде, но собственные функции относительного движения можно определить путем численного решения. Для этого, дифференциальные уравнения (11) записываются в виде разностных схем, благодаря чему они сводятся к системе линейных уравнений, которые решаются трехдиагональным методом [21].

Получаемые в результате численного решения системы уравнений (11) функции f и g необходимо нормировать. Анализ показывает, что функция f экспоненциально спадает с ростом переменной χ_f . Поэтому при достаточно большом значении $\chi_f = \chi_f^{\max}$ эта функция практически равна нулю. Для функции g эти простые рассуждения не работают, поскольку она содержит осциллирующие хвосты, описывающие взаимное разбегание электрона и дырки в электрическом поле (аналог функции Эйри для свободных носителей) [19]. В свободном пространстве амплитуда этой функции не обращается в ноль при любых конечных значениях χ_g . Однако, для случая КЯ с толщиной слоя L_{QW} и электрического поля, направленного перпендикулярно гетерограницам, функция g не может выйти за пределы КЯ. Поэтому, существует максимальное значение переменной χ_g

$$\chi_g^{\max} = 2(F/F_1)^{1/3}(L_{QW}/a_B) + \chi_f^{\max}. \quad (12)$$

Таким образом, граничные условия для обеих функций имеют вид

$$f(\chi_f \geq \chi_f^{\max}) = 0, \quad g(\chi_g \geq \chi_g^{\max}) = 0. \quad (13)$$

Граничные условия (12), (13) описывают обнуление волновой функции на границе некоторого эллипсоида, а не КЯ. Чтобы оно соответствовало границам КЯ, необходимо, чтобы при $\chi_f > 2(F/F_1)^{1/3}(L_{QW}/a_B)$ выполнялось условие: $\chi_g = \chi_f - 2(F/F_1)^{1/3}(L_{QW}/a_B)$. Однако, анализ показывает, что результаты вычисления энергии и продольно-поперечного расщепления, которые получаются для условий (12), (13), приближенно соответствуют результатам для КЯ. Поэтому, чтобы упростить расчеты вместо точных граничных условий ниже мы используем условия (12), (13).

Решение уравнения (11) с учетом нулевых граничных условий (13), дает значения функций f и g в каждой точке пространства, определяемой координатами χ_f и χ_g . Требуемое для уравнений (11) условие $\beta_f = \beta_g = \beta$, зависит не только от величины параметра k , но и от максимальных значений безразмерных координат χ_f^{\max} , χ_g^{\max} , в пределах которых ищется решение. Мы установили, что разница энергий $\delta\xi = \beta_f - \beta_g$ при монотонном увеличении χ_f^{\max} и χ_g^{\max} периодически меняется от нуля, до некоторого максимального значения. Поэтому значения этих величин подбирались таким образом, чтобы минимизировать величину $\delta\beta$. Полученные функции f и g позволяют найти искомую волновую функцию относи-

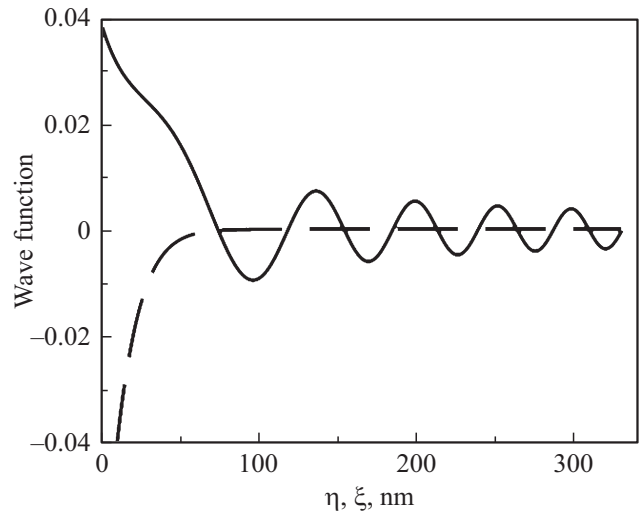


Рис. 1. Графики функций $f(\eta)$ (прерывистая кривая) и $g(\xi)$ (сплошная кривая), составляющих волновую функцию относительного движения электрона и дырки для экситона в электрическом поле $F = 4 \text{ kV/cm}$.

тельного движения в соответствии с (5). Нормировочный коэффициент A определяется условием

$$A^2 \sum_{l_f}^N \sum_{l_g}^N f^2(l_f) g^2(l_g) \frac{1}{4} (\chi_f(l_f) + \chi_g(l_g)) = 1, \quad (14)$$

в котором интегрирование заменено суммированием, и $\chi_f(l_f) = h \cdot l_f$, $\chi_g(l_g) = h \cdot l_g$. Здесь индексы l_f и l_g — целые числа, нумерующие дискретные значения безразмерных координат. Для вычисления функций f и g , нами были использованы следующие материальные параметры GaAs: $\epsilon_0 = 12.56$ [22], $m_e = 0.067m_0$ [22], $m_h = 0.45m_0$ [23]. Для примера на рис. 1 мы построили графики зависимости функций f и g от размерных координат η и ξ для поля 4 V/cm .

3. Результаты и обсуждения

Рассмотрим теперь, как внешнее электрическое поле влияет на экситонные спектры отражения КЯ. Чтобы максимально упростить задачу будем считать, что экситон рождается в структуре, состоящей из барьерного слоя $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$ толщиной 100 nm , слоя ямы GaAs толщиной 120 nm , и полубесконечного слоя $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$. Считаем, что осью роста КЯ является кристаллографическое направление $[001]$, совпадающее с направлением внешнего поля и осью z декартовых координат. Свет падает нормально на границу образца вдоль оси z .

Для вычисления спектров важно, что свето-экситонное взаимодействие, определяемое величиной продольно-поперечного расщепления $\hbar\omega_{LT}$, зависит от приложенного электрического поля. Эта зависимость обусловлена тем, что поле влияет на волновую функцию относительного движения электрона и дырки в экситоне.

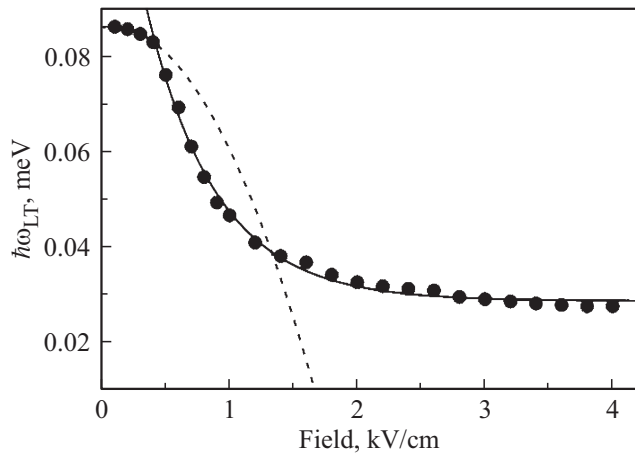


Рис. 2. Зависимость продольно-поперечного расщепления экситона в КЯ от величины внешнего электрического поля, направленного вдоль оси распространения света. Точки — результат численного расчета. Пунктирная и сплошная кривые — аппроксимации формулами (16) и (17) соответственно.

Волновая функция входит в выражение для продольно-поперечного расщепления следующим образом [1]:

$$\hbar\omega_{LT} = \left(\frac{2eP_1}{E_g}\right)^2 \frac{\pi}{\varepsilon_0} |\phi(0)|^2. \quad (15)$$

Здесь $\phi(0)$ — волновая функция относительно движения (5) при $r = 0$; материальная константа $P_1 = \hbar p_{cv}/m_0$, где p_{cv} — межзонный матричный элемент импульса. Для GaAs величина $P_1 = 10.3 \cdot 10^{-5} \text{ meV} \cdot \text{cm}$ [24].

Используя полученные выше значения $\phi(0)$, вычисляем $\hbar\omega_{LT}$. Вид зависимости $\hbar\omega_{LT}(F)$ представлен на рис. 2. Анализ показывает, что в полях $F \leq 0.4 \text{ kV/cm}$ эта зависимость может быть аппроксимирована функцией вида

$$\hbar\omega_{LT}(F) = \hbar\omega_{LT}(0)(1 + 0.051|F| - 0.33F^2), \quad (16)$$

где $\hbar\omega_{LT}(0) = 0.087 \text{ meV}$ — продольно-поперечное расщепление в отсутствии поля. Это значение хорошо согласуется с результатами экспериментального исследования продольно-поперечного расщепления экситона в GaAs методом рамановского рассеяния: $\hbar\omega_{LT}(0) = 0.085 \text{ meV}$ [25].

В поле $F \geq 0.4 \text{ kV/cm}$ зависимость продольно-поперечного расщепления можно аппроксимировать выражением

$$\hbar\omega_{LT}(F) = \hbar\omega_{LT}(0)(1.34 \exp(-1.82F) + 0.33). \quad (17)$$

Как видно из рис. 2, при увеличении внешнего поля продольно-поперечное расщепление быстро уменьшается. Это связано с тем, что под действием поля у волновой функции относительного движения электрона

и дырки появляются разбегающиеся хвосты, как это демонстрирует рис. 1. Это значит, что электрон и дырка проводят часть времени вдали от начала координат относительного движения. Поскольку волновая функция (5) нормирована на единицу, появление хвостов приводит к уменьшению значения $|\phi(0)|$, а вместе с ней и величины продольно-поперечного расщепления (15). С другой стороны, когда внешнее поле превышает 2.5 kV/cm величина $\hbar\omega_{LT}(F)$ выходит на постоянное значение и слабо зависит от поля. Это связано с тем, что волновая функция относительного движения электрона и дырки ограничена барьерами КЯ. Даже при достаточно сильном поле волновая функция не может выйти за пределы ограниченного пространства и поэтому значение $|\phi(0)|$ остается конечной величиной.

Полученные результаты мы использовали для вычисления спектров отражения. Нами была использована модель интерференции объемных поляритонных волн, описанная, например, в работах [1,2,18,26].

Диэлектрическая функция, учитывающая светоекситонное взаимодействие, находится стандартным образом. В итоге получается следующее выражение:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0 \hbar\omega_{LT}(F)}{E_g + R + \frac{\hbar^2 K^2}{2M} - \hbar\omega + i\hbar\Gamma}. \quad (18)$$

Здесь ω — частота света, $\hbar\Gamma$ — параметр уширения спектральной линии из-за конечного времени жизни экситона. Конечное время жизни связано с двумя типами физических процессов (см., например, [1]). Первый из них обусловлен рассеянием экситона на дефектах кристаллической решетки и фононах. Для этого типа уширения можно ввести параметр неоднородного уширения Γ_1 . Второй тип процессов, ограничивающий время жизни экситона — это его взаимодействие со светом, характеризующееся продольно-поперечным расщеплением: $\Gamma_0 \propto \hbar\omega_{LT}$. Такой процесс приводит к однородному уширению. Величина полного уширения в (18) может приближенно описываться суммой двух этих вкладов: $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_0$ [1]. Из выражений (16) и (17) следует, что $\hbar\omega_{LT}$ уменьшается с ростом приложенного поля. Как следствие, в экспериментальных спектрах можно ожидать уменьшение полной ширины спектральных линий линии из-за уменьшения $\Gamma_0 \propto \hbar\omega_{LT}$. Однако, поскольку нам неизвестно точное значение Γ , в дальнейших вычислениях мы будем считать величину полного параметра уширения постоянным.

Для нахождения дисперсионных соотношений для поляритонных мод необходимо решить дисперсионное уравнение для нормальных волн [1,2]:

$$\varepsilon(\omega, K) = \frac{c^2 K^2}{\omega^2}, \quad (19)$$

где c — скорость света.

Подстановка $\varepsilon(\omega, K)$ из выражения (18), дает полином четвертой степени по волновому вектору K . Корни этого

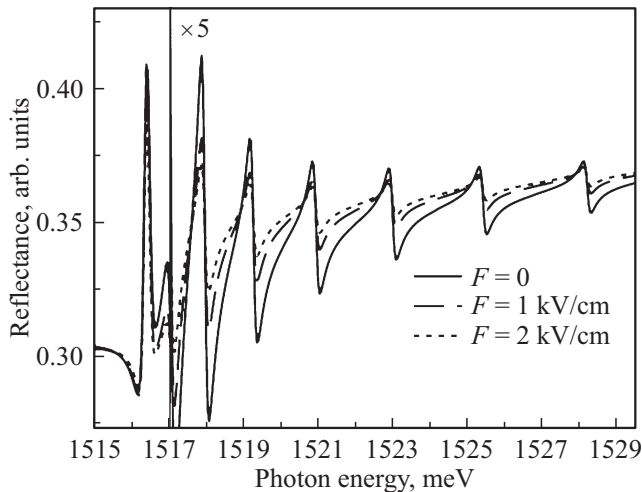


Рис. 3. Спектры экситонного отражения КЯ, вычисленные для трех значений внешнего электрического поля.

полинома, найденные при различных значениях частоты световой волны ω , определяют дисперсионные зависимости для поляритонных мод $K_j(\omega)$. Из них одна будет экситоноподобной модой, а вторая — фотоноподобной модой. Каждой из мод соответствует распространение волны в прямом ($E_j^{(+)}$) и обратном ($E_j^{(-)}$) направлениях вдоль оси роста структуры.

Дисперсионные зависимости входят в выражение для экситонного вклада в поляризуемость среды $\chi(\omega, K_j)$, которая связана с полной диэлектрической функцией (18) следующим соотношением:

$$\varepsilon(\omega, K_j) = \varepsilon_0 + 4\pi\chi(\omega, K_j). \quad (20)$$

Полученное из (20) выражение для $\chi(\omega, K_j)$ позволяет задать дополнительные граничные условия (ДГУ) Пекара на интерфейсах КЯ. Эти условия состоят в обращении в ноль суммарного экситонного вклада в поляризацию на границе КЯ [1,2,18,26]. Кроме того, на электрическую и магнитную компоненты световой волны на границе КЯ накладываются условия Максвелла. Они состоят в непрерывности тангенциальных составляющих электрического поля и магнитной индукции световых волн.

Граничные условия Максвелла и ДГУ Пекара связывают амплитуды падающей, отраженной и прошедшей световых волн во внешней среде с амплитудами поляритонных волн внутри КЯ в систему линейных уравнений. Решение этой системы дает отношение амплитуд падающей на КЯ и отраженных световых волн. Квадрат модуля этого отношения является коэффициентом отражения:

$$R(\omega, K) = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2}, \quad (21)$$

где E_i и E_r — амплитуды падающей на структуру и отраженной от нее волн.

Результаты вычислений спектров отражения во внешнем электрическом поле F от 0 до 2 V/cm представлены на рис. 3. Как можно видеть, внешнее электрическое поле приводит в спектрах отражения к уменьшению амплитуды всех осцилляций, обусловленных экситонным вкладом. Это связано с тем, что, как следует из результатов вычисления $\hbar\omega_{LT}(F)$, светоэкситонное взаимодействие уменьшается с ростом поля до значений в четыре раза меньших своего значения при $F = 0$. Поскольку, как следует из рис. 2, продольно-поперечное расщепление в полях $F > 2.5$ kV/cm меняется очень слабо, спектры, вычисленные при этих полях, почти не отличаются друг от друга и мало отличаются от спектра, рассчитанного для поля 2 kV/cm. Поэтому они не представлены на рисунке.

4. Заключение

Численные расчеты выполнены для экситона в квантовой яме во внешнем электрическом поле, совпадающем с осью роста структуры. В такой конфигурации на волновую функцию относительного движения электрона и дырки могут быть наложены однозначные граничные условия. Это позволяет вычислить волновую функцию и энергию связи экситона в квантовой яме во внешнем поле. Значение волновой функции относительного движения в начале координат позволяет вычислить продольно-поперечное расщепление экситона и его зависимость от величины внешнего поля. Численные расчеты показали, что продольно-поперечное расщепление уменьшается при увеличении поля, а при $F > 3$ kV/cm становится практически постоянным. Это связано с тем, что электрон и дырка не могут разойтись в направлении действия поля на неограниченное расстояние из-за ограничения волновой функции относительного движения границами ямы. Вычисленные зависимости продольно-поперечного расщепления от внешнего поля использованы для вычисления экситонных спектров отражения квантовой ямы. Расчеты показывают, что амплитуда особенностей отражения, обусловленных экситонным вкладом, должны уменьшаться при увеличении электрического поля. Уменьшение амплитуды спектральных особенностей обусловлено уменьшением продольно-поперечного расщепления экситона.

Финансирование работы

Российский фонд фундаментальных исследований (РФФИ грант № 19-02-00576). Авторы благодарят СПбГУ за финансовую поддержку в рамках гранта № 40847559.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] E.L. Ivchenko. Optical Spectroscopy of Semiconductor Nanostructures. Alpha Science, Harrow (2005).
- [2] A.V. Kavokin, J.J. Baumberg, G. Malpuech, F.P. Laussy. Microcavities. Oxford University, N.Y. (2007).
- [3] Е.Ф. Гросс. УФН **76**, 433 (1962). [E.F. Gross. Usp. Fiz. Nauk **76**, 433 (1962).]
- [4] A. Fropa, P. Handler, F.A. Germano, D.E. Aspnes. Phys. Rev. **145**, 575 (1966).
- [5] D.F. Blossey. Phys. Rev. B **2**, 3976 (1970).
- [6] A.T. Winzer, G. Gobsch, R. Goldhahn, D. Fuhrmann, A. Hangleiter, A. Dadgar, A. Krost. Phys. Rev. B **74**, 125207 (2006).
- [7] S. Lenk, E. Runge. J. Phys.: Conf. Ser. **210**, 012047 (2010).
- [8] S. Zielinska-Raczynska, D. Ziemkiewicz, G. Czajkowski. Phys. Rev. B **94**, 045205 (2016).
- [9] J. Heckotter, M. Freitag, D. Frohlich, M. Abmann, M. Bayer, M.A. Semina, M.M. Glazov. Phys. Rev. B **95**, 035210 (2017).
- [10] J. Heckotter, M. Freitag, D. Frohlich, M. Abmann, M. Bayer, M.A. Semina, M.M. Glazov. Phys. Rev. B **98**, 035150 (2018).
- [11] F. Bassani, G. Czajkowski, M. Dressler, L. Silvestri. Phys. Status Solidi B **178**, 51 (2000).
- [12] Yu-Hsuan Kuo, Yong Kyu Lee, Yangsi Ge, Shen Ren, J.E. Roth, T.I. Kamins, D.A.B. Miller, J.S. Harris. Nature **437**, 1334 (2005).
- [13] E. Kasapoglu, H. Saria, M. Bursala I. Sökmen. Physica E **16**, 237 (2003).
- [14] Liang Zhang, Hui-Zeng Duan, Xue-Feng Wang. Phys. Lett. A **373**, 2969 (2009).
- [15] S. Zielinska-Raczynska, D. Ziemkiewicz, G. Czajkowski. Phys. Rev. B **97**, 165205 (2018).
- [16] E.L. Ivchenko, G. Pikus. Superlattices and Other Microstructures. Springer-Verlag, Berlin (1995).
- [17] E.O. Kane. Phys. Rev. B **11**, 3850 (1975).
- [18] Д.К. Логинов, Е.В. Убийвовк, Ю.П. Ефимов, В.В. Петров, С.А. Елисеев, Ю.К. Долгих, И.В. Игнатъев, В.П. Кочерешко, А.В. Селькин. ФТТ **48**, 1979 (2006). [Phys. Solid State **48**, 2100 (2006)].
- [19] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Наука, М. (1989). Гл. 10. С. 344.
- [20] D.F. Blossey. Phys. Rev. B **3**, 1382 (1971).
- [21] А.А. Самарский. Теория разностных схем. Наука, М. (1977). [A.A. Samarskii. The Theory of Difference Schemes. Pure and Applied Mathematics. A Ser. Monographs Textbooks. CRC Press (2001)].
- [22] G.E. Stillman, D.M. Larsen, C.M. Wolfe, R.C. Brandt. Solid State Commun. **9**, 2245 (1971).
- [23] S. Adachi. GaAs and Related Materials. World Scientific Publishing, Singapore (1994).
- [24] Г.Е. Пикус, В.А. Марушак, А.Н. Титков. ФТП **22**, 185 (1988). [Sov. Phys. Semicond. **22**, 185 (1988)].
- [25] G. Rainer Ulbrich, C. Weisbuch. Resonant Brillouin scattering of excitonic polaritons in gallium arsenide. Phys. Rev. Lett. **38**, 865 (1977).
- [26] N. Tomassini, A. D'Andrea, R. Del Sole, H. Tuffigo-Ulmer, R.T. Cox. Phys. Rev. B **51**, 5005 (1995).

Редактор Т.Н. Василевская