

03

Точные решения для локальных параметров поляризационных мод в намотанных на катушку spun-световодах с сильным невозмущенным линейным двулучепреломлением.

I. Нерезонансная линейная трансформация

© Г.Б. Малыкин¹, В.И. Позднякова²

¹ Федеральное исследовательское учреждение Институт прикладной физики РАН, 603155 Нижний Новгород, Россия

² Институт физики микроструктур РАН, Федеральное исследовательское учреждение Институт прикладной физики РАН, 603950 Нижний Новгород, Россия

e-mail: malykin@ufp.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 31.05.2019 г.

В окончательной редакции 31.05.2019 г.

Принята к публикации 12.08.2019 г.

Рассмотрено распространение монохроматического излучения в намотанных на катушку spun-световодах. Показано, что локальные параметры собственных эллиптических поляризационных мод, эллиптическое двулучепреломление и угол эллиптичности представляют собой сумму постоянной и переменной составляющих, причем последняя измеряется практически по гармоническому закону в зависимости от длины световода. При этом величины постоянных составляющих существенно больше амплитуд переменных составляющих. Показано также, что зависимость локального азимута большой оси эллипса собственных поляризационных мод возрастает практически по линейному закону.

Ключевые слова: spun-световоды, поляризационные моды, эллиптическое двулучепреломление.

DOI: 10.21883/OS.2019.12.48689.210-19

Введение

В наших работах [1–3] методом численного моделирования параметров матриц Джонса были проведены расчеты линейной трансформации интегральных характеристик собственных взаимно-ортогональных поляризационных мод для типичных параметров намотанных на катушку spun-световодов. Как показано в [1–3], численное моделирование осложняется тем, что локальные значения линейного двулучепреломления и кручения осей spun-световода непрерывно меняются вдоль световода. Локальными мы называем параметры собственных поляризационных мод в бесконечно коротком отрезке световода. Целью настоящей работы является исследование зависимости локальных параметров (величины эллиптического двулучепреломления, азимута большой оси эллипса и угла эллиптичности [4]) собственных взаимно-ортогональных поляризационных мод в намотанных на катушку spun-световодах с сильным невозмущенным линейным двулучепреломлением от длины световода. Это даст возможность интерпретировать довольно сложное поведение соответствующих интегральных параметров такого световода.

Для получения точных значений интегральных параметров намотанных на катушку spun-световодов требуется решить дифференциальное уравнение Риккати [1–3], которое в общем случае не имеет решения в квадратурах [5]. Для получения точных значений локальных

параметров намотанных на катушку spun-световодов решения дифференциальных уравнений не требуется.

В настоящей работе, так же, как и в [1–3], мы рассмотрим распространение монохроматического излучения в намотанных на катушку spun-световодах, поскольку при распространении немонахроматического излучения локальные параметры одномодовых волоконных световодов (ОВС) произвольного типа зависят от длины волны света [6].

В работах [1,3] мы рассмотрели нерезонансную, а в работе [2] резонансную линейную трансформацию интегральных параметров намотанных на катушку spun-световодов. Здесь мы рассмотрим нерезонансную линейную трансформацию локальных параметров намотанных на катушку spun-световодов.

Зависимости локальных параметров намотанных на катушку spun-световодов от длины световода

В работе [1] были получены выражения для зависимостей от длины намотанного на катушку spun-световода z локальных линейного двулучепреломления β_{lin} , угла φ , который определяет направление линейного двулучепреломления¹, а также погонного кручения волокна Θ

¹ φ – угол между векторами \mathfrak{B}_{lin} и \mathfrak{B}_{coil} (см. рис. 1 работы [1]).

(размерность rad/m):

$$\begin{aligned}\beta_{\text{lin}}(z) &= \beta_0 \sqrt{1 + b^2 + 2b \cos \beta_{\text{tw}} z}, \\ \varphi(z) &= \arctan \frac{\sin \beta_{\text{tw}} z}{\cos \beta_{\text{tw}} z + b}, \\ \Theta(z) &= \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\beta_{\text{tw}} (1 + b \cos \beta_{\text{tw}} z)}{1 + b^2 + 2b \cos \beta_{\text{tw}} z}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь β_0 — невозмущенное линейное двулучепреломление, $b = \beta_{\text{coil}}/\beta_0$, β_{coil} — линейное двулучепреломление, обусловленное изгибным напряжением вследствие намотки световода на катушку, $\beta_{\text{tw}} = 2\pi/L_{\text{tw}}$, L_{tw} — длина, на которой *srpn*-световод закручивается на 360° .

Напомним здесь, что поскольку величины β_0 и β_{coil} являются скалярными, то для избежания неоднозначности в обозначениях в [1] было предложено ввести векторы \mathfrak{B}_0 и $\mathfrak{B}_{\text{coil}}$ так, что $|\mathfrak{B}_0| = \beta_0$, $|\mathfrak{B}_{\text{coil}}| = \beta_{\text{coil}}$. Соответственно вектор $\mathfrak{B}_{\text{lin}}$ является суммой векторов $\mathfrak{B}_{\text{coil}}$ и \mathfrak{B}_0 [1].

Используя выражения (1), а также запись матрицы Джонса эллиптической фазовой пластинки в неподвижной системе координат [4], можно получить зависимости локальных значений азимута большой оси эллипса $\alpha(z)$ [1], эллиптического двулучепреломления $\beta^e(z)$ [1] и угла эллиптичности $\chi^e(z)$ [3]:

$$\begin{aligned}\beta^e(z) &= \sqrt{\beta_{\text{lin}}^2(z) + 4\Theta^2(z)} \\ &= \frac{\sqrt{\beta_0^2 (1 + b^2 + 2b \cos \beta_{\text{tw}} z)^3 + 4\beta_{\text{tw}}^2 (1 + b \cos \beta_{\text{tw}} z)^2}}{1 + b^2 + 2b \cos \beta_{\text{tw}} z},\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\chi^e(z) &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2\Theta(z)}{\beta_{\text{lin}}(z)} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{\beta_{\text{tw}} (1 + b \cos \beta_{\text{tw}} z)}{\beta_0 (1 + b^2 + 2b \cos \beta_{\text{tw}} z)^{3/2}},\end{aligned}\quad (3)$$

$$\alpha(z) = \varphi(z) = \arctan \frac{\sin \beta_{\text{tw}} z}{\cos \beta_{\text{tw}} z + b}.\quad (4)$$

Здесь следует отметить, что только для локальных собственных взаимно-ортогональных поляризационных мод намотанных на катушку *srpn*-световодов имеет место равенство $\alpha(z) = \varphi(z)$. Для интегральных мод, т.е. для протяженного отрезка световода, $\alpha_\Sigma(z) \neq \varphi(z)$, и значение азимута главной оси собственного эллипса поляризации $\alpha_\Sigma(z)$ вычисляется методом математического моделирования [1].

В настоящей работе мы рассматриваем *srpn*-световоды с радиусом намотки на катушку $R_{\text{coil}} = 36$ mm. Соответственно обусловленное намоткой линейное двулучепреломление $\beta_{\text{coil}} = 1.64$ rad/m, разность показателей линейного преломления в медленной и быстрой осях световода $\Delta n_{\text{coil}} = 4.05 \cdot 10^{-7}$, а пространственный период кручения световода $L_{\text{coil}} = 3.83$ m. Как и в [1], длина волны света $\lambda = 1.55$ μm , а внешний диаметр световода (без учета толщины защитного жакета)

Таблица 1

№	L_b , mm	L_{tw} , mm	β_0 , rad/m	β_{tw} , rad/m	Δn_0	Δn_{tw}
1	15	7.5	418.879	837.76	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$
2	15	2.5	418.879	2513.3	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$
3	5	7.5	1256.64	837.76	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-4}$
4	5	2.5	1256.64	2513.3	$3.10 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$

$D_f = 125$ μm . В табл. 1 приводятся остальные параметры *srpn*-световодов: длина поляризационных биений L_b , длина L_{tw} , на которой кручение световода составляет 2π , соответствующие значениям L_b величины невозмущенного линейного двулучепреломления β_0 и разности показателей невозмущенного (исходного) линейного преломления в медленной и быстрой осях *srpn*-световодов Δn_0 , а также соответствующие значениям L_{tw} величины обусловленного кручением циркулярного двулучепреломления β_{tw} и разности показателей циркулярного преломления Δn_{tw} . Отметим, что в работе [1] проводилось вычисление интегральных зависимостей эллиптического двулучепреломления $\beta_\Sigma^e(z)$, угла эллиптичности $\chi_\Sigma^e(z)$ и азимута главной оси эллипса поляризации $\alpha_\Sigma(z)$ собственных поляризационных мод протяженного отрезка намотанного на катушку *srpn*-световода с различными параметрами L_b , L_{tw} и R_{coil} , которые были экспериментально исследованы в работе [7]. В настоящей работе мы рассматриваем те же параметры L_b и L_{tw} , что и в [1], но для R_{coil} рассматривается только одно значение: $R_{\text{coil}} = 36$ mm.

На рисунке приводятся зависимости локальных значений эллиптического двулучепреломления $\beta^e(z)$, азимута большой оси эллипса $\alpha(z)$ и угла эллиптичности $\chi^e(z)$ для *srpn*-световода с параметрами из первой строки табл. 1 (для других параметров *srpn*-световода зависимости имеют качественно похожий вид). Из выражений (2), (3) и рисунка, a, b видно, что зависимости локальных параметров $\beta^e(z)$ и $\chi^e(z)$ от длины световода z представляют собой сумму постоянной и переменной составляющих, причем последняя изменяется в зависимости от z практически по гармоническому закону с пространственной частотой β_{tw} . При этом величины постоянных составляющих существенно больше амплитуд переменных составляющих. Что касается зависимости $\alpha(z)$ (рисунок, c), то она линейно возрастающая, однако методика ее расчета в соответствии с выражением (4) позволяет рассчитывать ее с точностью до 2π . Отметим, что при других параметрах β_0 и β_{coil} , существенно отличных от приведенных в табл. 1, переменные составляющие локальных параметров $\beta^e(z)$ и $\chi^e(z)$ могут меняться по закону, заметно отличному от гармонического, а $\alpha(z)$ — по закону, заметно отличному от линейного.

Как показано в [3], интегральная зависимость угла эллиптичности собственных поляризационных мод $\chi_\Sigma^e(z)$

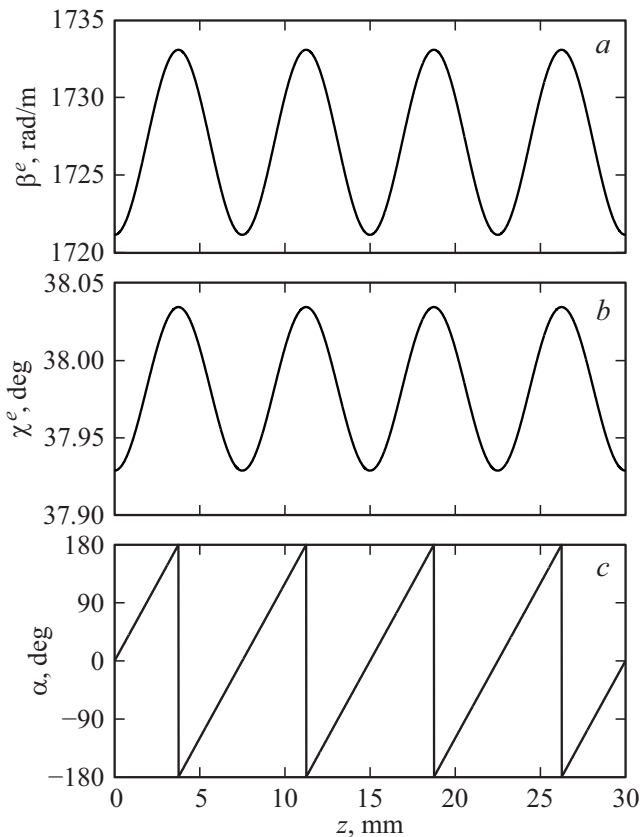
имеет периодическую структуру с двумя периодами, коротким $L_{short}^x \approx 0.5L_{tw}$ и длинным $L_{long}^x \approx 4L_b^2/L_{tw}$. Из выражения (3) становится ясно, почему короткий пространственный период зависимости $\chi_\Sigma^e(z)$ зависит только от β_{tw} : он связан с пространственным периодом изменения локальной величины $\chi^e(z)$. Однако отсюда нельзя получить информацию о величине длинного пространственного периода.

Высшие гармоники пространственной частоты изменения локальных параметров поляризационных мод намотанных на катушку srip-световодов

Сделаем оценку значений высших гармоник пространственной частоты β_{tw} зависимостей локальных параметров поляризационных мод намотанных на катушку srip-световодов, поскольку наличие таких гармоник играет важную роль в процессе линейной трансформации соответствующих интегральных параметров. Для этого перепишем выражения (2), (3), введя обозначение

Таблица 2

n	a_n^β	a_n^x	a_n^β/a_0^β	a_n^x/a_0^x
$L_b = 15 \text{ mm}, L_{tw} = 7.5 \text{ mm}$				
0	1727.08	37.98	1	1
1	-5.97	$-5.28 \cdot 10^{-2}$	$-3.46 \cdot 10^{-3}$	$-1.39 \cdot 10^{-3}$
2	$2.60 \cdot 10^{-2}$	$3.80 \cdot 10^{-5}$	$1.51 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-6}$
3	$8.17 \cdot 10^{-5}$	$3.61 \cdot 10^{-7}$	$4.73 \cdot 10^{-8}$	$9.50 \cdot 10^{-9}$
$L_b = 15 \text{ mm}, L_{tw} = 2.5 \text{ mm}$				
0	5043.97	42.62	1	1
1	-19.49	$-1.86 \cdot 10^{-2}$	$-3.86 \cdot 10^{-3}$	$-4.36 \cdot 10^{-4}$
2	$7.73 \cdot 10^{-2}$	$9.61 \cdot 10^{-6}$	$1.53 \cdot 10^{-5}$	$2.25 \cdot 10^{-7}$
3	$2.62 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-7}$	$5.20 \cdot 10^{-8}$	$2.68 \cdot 10^{-9}$
$L_b = 5 \text{ mm}, L_{tw} = 7.5 \text{ mm}$				
0	2094.40	26.56	1	1
1	$-7.66 \cdot 10^{-1}$	$-3.59 \cdot 10^{-2}$	$-3.66 \cdot 10^{-4}$	$-1.35 \cdot 10^{-3}$
2	$2.79 \cdot 10^{-3}$	$2.28 \cdot 10^{-5}$	$1.33 \cdot 10^{-6}$	$8.57 \cdot 10^{-7}$
3	$1.63 \cdot 10^{-6}$	$5.14 \cdot 10^{-8}$	$7.78 \cdot 10^{-10}$	$1.93 \cdot 10^{-9}$
$L_b = 5 \text{ mm}, L_{tw} = 2.5 \text{ mm}$				
0	5181.25	37.98	1	1
1	-5.97	$-1.76 \cdot 10^{-2}$	$-1.15 \cdot 10^{-3}$	$-4.64 \cdot 10^{-4}$
2	$8.68 \cdot 10^{-3}$	$4.23 \cdot 10^{-6}$	$1.68 \cdot 10^{-6}$	$1.11 \cdot 10^{-7}$
3	$9.08 \cdot 10^{-6}$	$1.34 \cdot 10^{-8}$	$1.75 \cdot 10^{-9}$	$3.52 \cdot 10^{-10}$



Зависимости локальных значений эллиптического двулучепреломления β^e (a), угла эллиптичности χ^e (b) и азимута большой оси эллипса поляризации α (c) от длины srip-световода z .

$$x = b \cos \beta_{tw}z:$$

$$\beta^e(x) = \frac{\sqrt{\beta_0^2(1+b^2+2x)^3 + 4\beta_{tw}^2(1+x)^2}}{1+b^2+2x}, \quad (2')$$

$$\chi^e(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{\beta_{tw}(1+x)}{\beta_0(1+b^2+2x)^{3/2}}. \quad (3')$$

Поскольку $b = \beta_{coil}/\beta_0 \ll 1$, а следовательно и $x \ll 1$, выражения (2'), (3') можно разложить в степенной ряд по малому параметру x . Тогда, подразумевая под $f(x)$ любую из функций $\beta^e(x)$, $\chi^e(x)$,

$$f(x) \approx f(0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} x + \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=0} \frac{x^2}{2} + \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=0} \frac{x^3}{6}.$$

Теперь, учитывая, что $x = b \cos \beta_{tw}z$, можно получить разложение $f(z)$ в гармонический ряд:

$$f(z) \approx a_0 + a_1 \cos \beta_{tw}z + a_2 \cos 2\beta_{tw}z + a_3 \cos 3\beta_{tw}z,$$

где

$$a_0 = f(0) + \frac{b^2}{4} \cdot \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=0},$$

$$a_1 = b \cdot \frac{df}{dx} \Big|_{x=0} + \frac{b^3}{8} \cdot \frac{d^3f}{dx^3} \Big|_{x=0},$$

$$a_2 = \frac{b^2}{4} \cdot \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x=0}, \quad a_3 = \frac{b^3}{24} \cdot \frac{d^3f}{dx^3} \Big|_{x=0}. \quad (5)$$

Формулы для производных функций $\beta^e(x)$ и $\chi^e(x)$ приводятся в Приложении А, а в табл. 2 собраны численные значения коэффициентов a_n^β и a_n^χ для четырех различных наборов параметров srip-световодов (табл. 1). Из табл. 2 видно, что по сравнению с первой гармоникой пространственной частоты β_{tw} зависимостей локальных параметров $\beta^e(z)$ и $\chi^e(z)$ величины второй и третьей гармоник весьма малы. Тем не менее, их присутствие, по-видимому, влияет на сложное поведение интегральной зависимости угла эллиптичности собственных поляризованных мод $\chi_\Sigma^e(z)$ [1] и небольшие отличия ее соседних коротких пространственных полупериодов [1,3]. Здесь следует отметить, что, как следует из табл. 2, первая гармоника пространственной частоты β_{tw} во всех четырех случаях имеет отрицательный знак. Это означает, что первая гармоника находится в противофазе по отношению к более высоким гармоникам. В принципе можно было бы в табл. 2 записать первую гармонику пространственной частоты β_{tw} с положительным знаком, а в соответствующем выражении в аргумент $\cos \beta_{tw}z$ добавить фазу π .

Заключение

Сформулируем основные результаты работы.

Показано, что для набора параметров β_0 и β_{coil} , соответствующего реально применяемому намотанному на катушку srip-световодом с сильным невозмущенным линейным двулучепреломлением, зависимости локальных параметров $\beta^e(z)$ и $\chi^e(z)$ от длины световода z представляют собой сумму постоянной и переменной составляющих, причем последняя зависит от z практически по гармоническому закону с пространственной частотой β_{tw} . При этом величины постоянных составляющих существенно больше амплитуд переменных составляющих.

Показано, что высшие гармоники пространственной частоты β_{tw} для локальных параметров $\beta^e(z)$ и $\chi^e(z)$ относительно невелики по сравнению с первой гармоникой.

Показано, что для рассмотренного набора параметров β_0 и β_{coil} намотанных на катушку srip-световодов зависимость локального азимута большой оси эллипса $\alpha(z)$ возрастает практически по линейному закону.

Благодарности

Авторы выражают благодарность Вл.В. Кочаровскому за обсуждение рассматриваемой задачи, В.М. Геликонову за ряд полезных замечаний, позволивших существенно улучшить изложение результатов работы.

Финансирование работы

Работа поддержана проектами по Государственному заданию № 0035-2019-0013 и № 0035-2018-0202.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Приложение А

$$\frac{d\beta^e}{dx} = \frac{1}{\beta^e(x)} \left(\beta_0^2 - 4\beta_{tw}^2(1-b^2) \frac{1+x}{(1+b^2+2x)^3} \right),$$

$$\frac{d^2\beta^e}{dx^2} = -\frac{1}{\beta^e(x)} \left(\left(\frac{d\beta^e}{dx} \right)^2 + 4\beta_{tw}^2(1-b^2) \frac{-5+b^2-4x}{(1+b^2+2x)^4} \right),$$

$$\frac{d^3\beta^e}{dx^3} = \frac{3}{\beta^e(x)} \left(-\frac{d\beta^e}{dx} \frac{d^2\beta^e}{dx^2} + 4\beta_{tw}^2(1-b^2) \frac{3-b^2+2x}{(1+b^2+2x)^5} \right).$$

$$\frac{d\chi^e}{dx} = \frac{\beta_{tw}\beta_0}{C} (b^2 - 2 - x) \sqrt{1+b^2+2x},$$

$$\frac{d^2\chi^e}{dx^2} = \frac{\beta_{tw}\beta_0}{C} \left(\frac{b^2-2-x}{\sqrt{1+b^2+2x}} - \frac{(b^2-2-x)C'}{C} - 1 \right),$$

$$\frac{d^3\chi^e}{dx^3} = \frac{\beta_{tw}\beta_0}{C} \left(\frac{C'}{C} \left(2 - \frac{b^2-2-x}{\sqrt{1+b^2+2x}} \right) + (b^2-2-x) \frac{C''C - 2(C')^2}{C^2} - \frac{b^2-2-x}{(1+b^2+2x)^{3/2}} \right).$$

Здесь

$$C = \beta_0^2(1+b^2+2x)^3 + 4\beta_{tw}^2(1+x)^2,$$

$$C' = 2 \left(3\beta_0^2(1+b^2+2x)^2 + 4\beta_{tw}^2(1+x) \right),$$

$$C'' = 8 \left(3\beta_0^2(1+b^2+2x) + \beta_{tw}^2 \right).$$

Список литературы

- [1] Малыкин Г.Б., Позднякова В.И. // Опт. и спектр. 2018. Т. 124. № 3. С. 359.
- [2] Малыкин Г.Б., Позднякова В.И. // Опт. и спектр. 2018. Т. 125. № 4. С. 522.
- [3] Малыкин Г.Б., Позднякова В.И. // Опт. и спектр. 2020. Т. 128. № 1. С. 68-75.
- [4] Shurklyff W.A. Polarized light. Harvard Univ. Press. Cambridge, Massachusetts, 1962. 207 p. (Шерклифф У. // Поляризованный свет. М.: Мир, 1965. 264 с.)

- [5] *Kamke E.* // Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Leipzig: 1959. Перевод: Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
- [6] *Малькин Г.Б., Позднякова В.И., Шерешевский И.А.* // Опт. и спектр. 1997. Т. 83. №5. С. 843.
- [7] *Моринев С.К., Губин В.П., Воробьев И.Л., Старостин Н.И., Сазонов А.И., Чаморовский Ю.К., Коротков Н.М.* // Квант. электрон. 2009. Т. 39. №3. С. 287.