

04

Нелинейная теория обратных и боковых ионно-звуковых волн в плазме с однонаправленно движущимися ионами

© А.Е. Дубинов, И.Н. Китаев

Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,

607188 Саров, Россия

Национальный исследовательский ядерный университет — Московский инженерно-физический институт, 115409 Москва, Россия

Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ,

607186 Саров, Россия

e-mail: rmtmkitaeva@yandex.ru

Поступило в Редакцию 31 марта 2019 г.

В окончательной редакции 31 марта 2019 г.

Принято к публикации 3 июля 2019 г.

Рассмотрены наклонные ионно-звуковые волны в плазме, в которой ионы движутся однонаправленно. В рамках линейной теории выведено двумерное дисперсионное соотношение и показано, что в системе возможны обратные и боковые волны. Развита в работе нелинейная теория обратных и боковых волн базируется на выводе и анализе псевдопотенциала Сагдеева. Вычислены нелинейные профили обратной и боковой ионно-звуковых волн. Найдено, что профили обратной и боковой волн неотличимы от профиля обычной прямой ионно-звуковой волны.

Ключевые слова: плазма, ионно-звуковая волна, обратная волна, боковая волна, псевдопотенциал Сагдеева.

DOI: 10.21883/JTF.2020.01.48660.134-18

Введение

Обратными волнами называются волны, в которых фазовая и групповая скорости параллельны, но направлены в разные стороны. Прямыми волнами называются волны с сонаправленными фазовой и групповой скоростями. И, наконец, боковыми волнами называются волны, в которых фазовая и групповая скорости не параллельны друг другу. При этом угол между фазовой и групповой скоростью в боковой волне называется углом сноса.

В работе [1] в рамках одномерной теории было показано, что в незамагниченной плазме, в которой ионы движутся однонаправленно, ионно-звуковые волны могут принимать форму обратных волн. Аналогично в [2] показано, что пылеакустические волны в запыленной плазме также могут быть обратными, если пылевой поток движется сквозь плазму.

В работе [3] в рамках двумерной теории показано, что ионно-звуковые волны, распространяющиеся в плазме под углом ионному потоку, могут быть не только прямыми или обратными, но и боковыми.

В [1–3] рассмотрения проводились в рамках линейного приближения, когда выводились и анализировались дисперсионные соотношения для волн. Нелинейная теория обратных и боковых волн не рассматривалась.

Отметим, что линейные и нелинейные ионно-звуковые волны в плазме с ионным потоком рассматривались ранее в работах [4–8], однако вопросы существования обратных и боковых волн там не затрагивались.

В связи с этим целью настоящей работы является рассмотрение боковых нелинейных ионно-звуковых волн в плазме с однонаправленно движущимися ионами.

Линейная теория

Рассмотрим идеальную бесстолкновительную незамагниченную электрон-ионную плазму, в которой электронную компоненту вследствие малой массы частиц будем считать безынерционной и подчиняющейся распределению Больцмана

$$n_e(\varphi) = n_{0e} \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T_e}\right), \quad (1)$$

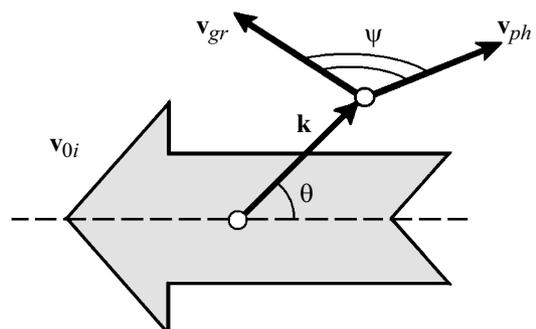


Рис. 1. Геометрия задачи.

а ионную компоненту — подчиняющейся уравнению состояния идеального газа

$$p_i = n_i k_B T_i, \quad (2)$$

причем для простоты остановимся на рассмотрении изотермического случая $V_{Ti} \neq 0$, $T_i = \text{const}$. Кроме того, допустим, что ионы однократно заряжены, и что они однонаправленно движутся со скоростью v_{0i} . В (1) и (2) обозначено: $n_{e,i}$ — концентрации электронов и ионов в волне, $T_{e,i}$ — их температуры, n_{0e} — невозмущенная концентрация электронов, φ — электростатический потенциал, k_B — постоянная Больцмана, p_i — давление ионного газа. Геометрия задачи показана на рис. 1.

Будем исходить из следующих уравнений ионной динамики:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla(n_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = -\frac{e}{m_i} \nabla \varphi - \frac{1}{m_i n_i} \nabla p_i, \quad (4)$$

$$\Delta \varphi = 4\pi e(n_e - n_i), \quad (5)$$

где e — элементарный заряд (считается, что ионы — однозарядные), m_i — масса иона, \mathbf{v}_i — скорость ионов.

В двумерной геометрии уравнения (3)–(5) можно записать в скалярной форме, выбирая систему координат так, чтобы ионный поток был направлен вдоль оси $0x$:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial(n_i v_{xi})}{\partial x} + \frac{\partial(n_i v_{yi})}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_{ix}}{\partial t} + v_{ix} \frac{\partial v_{ix}}{\partial x} + v_{iy} \frac{\partial v_{ix}}{\partial y} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{k_B T_i}{m_i} \frac{1}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_{iy}}{\partial t} + v_{ix} \frac{\partial v_{iy}}{\partial x} + v_{iy} \frac{\partial v_{iy}}{\partial y} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{k_B T_i}{m_i} \frac{1}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial y}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 4\pi e(n_e - n_i). \quad (9)$$

Придадим плазме малое волновое возмущение с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} :

$$n_i = n_{0i} + \tilde{n}_i \exp[I(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{0i} + \tilde{\mathbf{v}}_i \exp[I(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (11)$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} \exp[I(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \quad (12)$$

Здесь I — мнимая единица. Затем перепишем возмущение в координатном представлении

$$n_i = n_{0i} + \tilde{n}_i \exp[I(k_x x + k_y y - \omega t)], \quad (13)$$

$$v_{xi} = v_{0i} + \tilde{v}_{xi} \exp[I(k_x x + k_y y - \omega t)], \quad (14)$$

$$v_{iy} = \tilde{v}_{iy} \exp[I(k_x x + k_y y - \omega t)], \quad (15)$$

$$\varphi = \tilde{\varphi} \exp[I(k_x x + k_y y - \omega t)]. \quad (16)$$

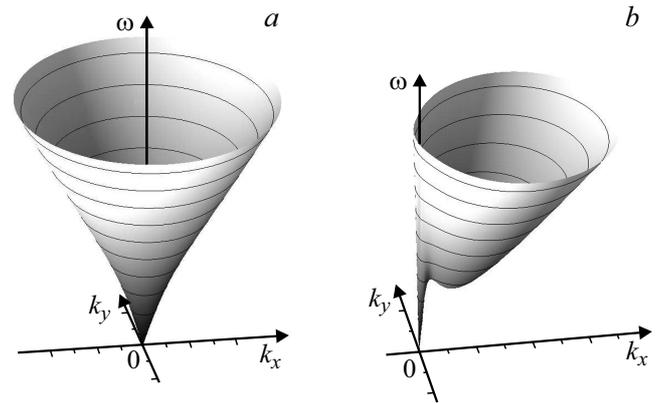


Рис. 2. Дисперсионные поверхности в декартовых координатах $\{k_x, k_y, \omega\}$: а — при $v_{0i} = 0$; б — при $v_{0i} \neq 0$.

Подставляя (13)–(16) в систему уравнений (6)–(9), после стандартной процедуры линеаризации приходим к дисперсионному соотношению для ионно-звуковых волн

$$\frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - kv_{0i})^2} = \frac{k_x^2 + k_y^2 + \lambda_{De}^{-2}}{(k_x^2 + k_y^2)[1 + \lambda_{Di}^2(k_x^2 + k_y^2 + \lambda_{De}^2)]}, \quad (17)$$

в записи которого использованы обозначения:

$\omega_{pi}^2 = \frac{4\pi e^2 n_{0i}}{m_i}$ — ионной плазменной частоты и $\lambda_{Di,e}^2 = \frac{k_B T_{i,e}}{4\pi e^2 n_{0i,0e}}$ — ионной и электронной длины Дебая. Соотношение (18) удобно анализировать, переписав его в явной форме:

$$\omega(k_x, k_y) = \omega_{pi} \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + \lambda_{De}^{-2}} + \lambda_{Di}^2 (k_x^2 + k_y^2) + v_{0i} k_x}. \quad (18)$$

Соотношение (18) задает в декартовых координатах дисперсионную поверхность (рис. 2). При $v_{0i} = 0$ она имеет вид поверхности вращения вокруг оси 0ω (рис. 2, а).

При дисперсионная поверхность не имеет осевой симметрии и наклонена в сторону, противоположную направлению движения ионов. Например, если $v_{0i} < 0$, поверхность наклонена в положительном направлении оси $0k_x$ (рис. 2, б). При достаточном угле наклона на поверхности возникает локальная впадина, в окрестности которой ионно-звуковая волна может принимать форму обратной или боковой волны.

Найдем области на плоскости $\{k_x, k_y\}$, в которых угол сноса ψ волны ионного звука является тупым.

Известны общие выражения для фазовой и групповой скоростей волны [9,10]:

$$\mathbf{v}_{ph} = \frac{\omega}{\mathbf{k}} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_{gr} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = \text{grad}_{\mathbf{k}} \omega. \quad (19)$$

Угол сноса ψ между векторами \mathbf{v}_{ph} и \mathbf{v}_{gr} можно найти из векторного произведения следующим образом:

$$\cos \psi = \frac{(\mathbf{v}_{ph} \mathbf{v}_{gr})}{v_{ph} v_{gr}}. \quad (20)$$

Приведем выражения для \mathbf{v}_{ph} и \mathbf{v}_{gr} , полученные в результате простых алгебраических вычислений:

$$\mathbf{v}_{ph} = \frac{1}{k_x^2 + k_y^2} \times \left[\omega_{pi} \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + \lambda_{De}^{-2}} + \lambda_{Di}^2 (k_x^2 + k_y^2)} + v_{0i} k_x \right] (k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j}), \quad (21)$$

$$\mathbf{v}_{gr} = \left\{ \frac{\omega_{pi} \left[\frac{k_x \lambda_{De}^{-2}}{(k_x^2 + k_y^2 + \lambda_{De}^{-2})^2} + k_x \lambda_{Di}^2 \right]}{\sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + \lambda_{De}^{-2}} + \lambda_{Di}^2 (k_x^2 + k_y^2)}} + v_{0i} \right\} \mathbf{i} + \frac{\omega_{pi} \left[\frac{k_x \lambda_{De}^{-2}}{(k_x^2 + k_y^2 + \lambda_{De}^{-2})^2} + k_x \lambda_{Di}^2 \right]}{\sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + \lambda_{De}^{-2}} + \lambda_{Di}^2 (k_x^2 + k_y^2)}} \mathbf{j}, \quad (22)$$

где \mathbf{i} и \mathbf{j} — единичные векторы в плоскости $\{k_x, k_y\}$.

Полезно привести значение линейной скорости ионного звука, определяемой как

$$c_s = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\omega}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{d\omega}{dk}. \quad (23)$$

Оно также будет зависеть от направления. Приведем значение c_s в зависимости от угла θ между вектором \mathbf{k} и направлением дрейфа ионов

$$c_s = \omega_{pi} \sqrt{\lambda_{Di}^2 + \lambda_{De}^{-2}} + v_{0i} \cos \theta. \quad (24)$$

На рис. 3 представлен график $c_s(\theta)$ в полярных координатах.

Были проведены вычисления угла сноса по формулам (20)–(22). Результаты вычислений удобно показать

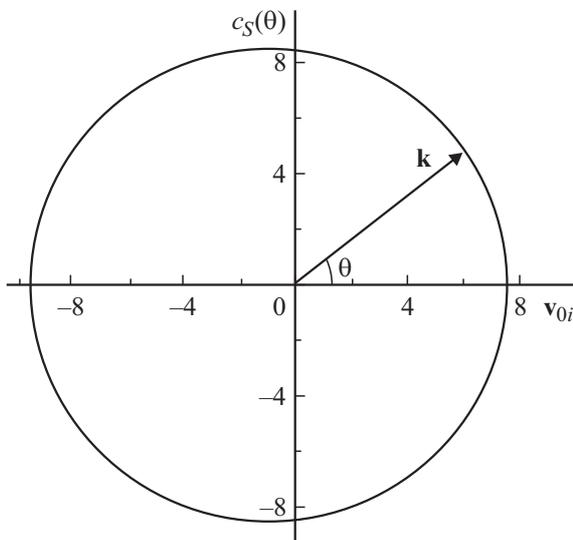


Рис. 3. График в полярных координатах.

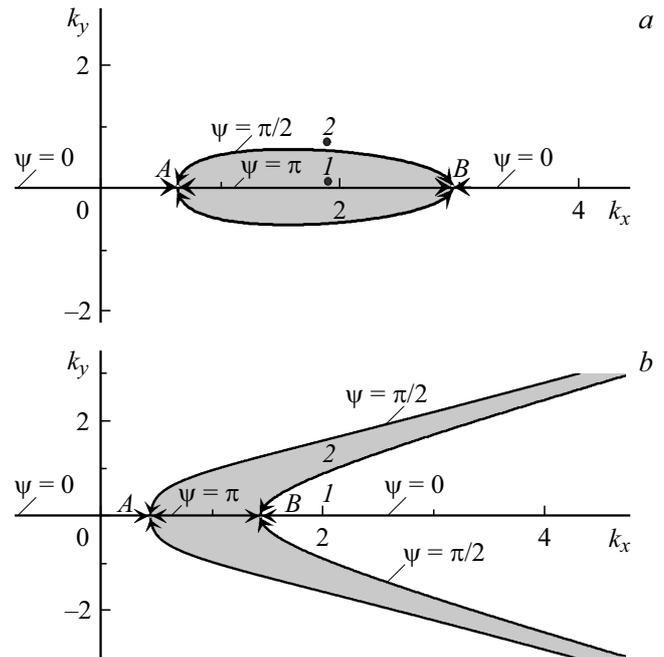


Рис. 4. Области в плоскости $\{k_x, k_y\}$, в которой угол ψ является тупым: *a* — при $v_{0i} = -0.95$; *b* — при $v_{0i} = -1.2$.

графически. На рис. 4 показаны области в плоскости $\{k_x, k_y\}$, в которой угол ψ является тупым. При различных значениях скорости v_{0i} форма области тупых углов ψ может иметь различный вид. Так, при

$$v_{0i} < V_1 = 4\omega_{pi}\lambda_{Di} \sqrt{\frac{\delta(\delta\sqrt{4\delta+3}+2\delta+1)}{(\sqrt{4\delta+3}+2\delta)^3}}, \quad (25)$$

где $\delta = \frac{\lambda_{Di}}{\lambda_{De}}$, такой области нет вообще, при

$$V_1 < v_{0i} < V_2 = \omega_{pi}\lambda_{Di} \quad (26)$$

граница существует, она замкнута и ограничивает конечную яйцеобразную область (рис. 4, *a*), приходящуюся на ионно-плазменные колебания, однако при $v_{0i} > V_2$ граница разомкнута, она ограничивает бесконечную область в форме бумеранга (рис. 4, *b*). Значения критических скоростей V_1 и V_2 ранее получены в [3]. Границы областей отделяются кривыми, для которых значение угла сноса $\psi = \pm\pi/2$. Выколотые точки *A* и *B* дают неопределенность в значениях угла сноса, так значения групповой скорости в них обращаются в нуль.

Нелинейная теория

В нелинейной теории будем исходить из тех же уравнений ионной динамики в плазме, что и предыдущем разделе. Далее перейдем к новой переменной: $\xi = l_{x,x} + l_{y,y} - Vt$, где $l_x^2 + l_y^2 = 1$, $l_{x,y}$ — направляющие косинусы вектора \mathbf{k} . Тогда уравнения в частных произ-

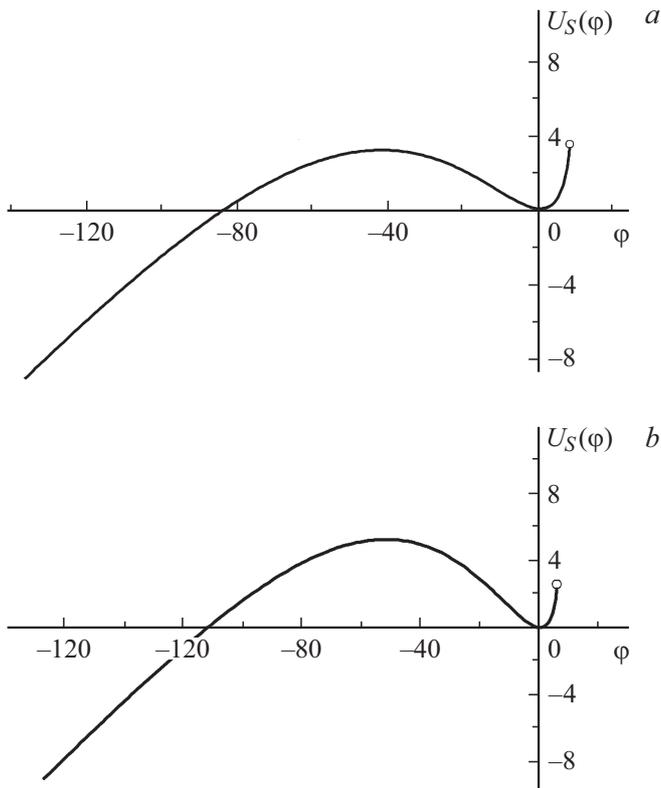


Рис. 5. Графики псевдопотенциала (44) для ионно-звуковой волны, распространяющихся под углами: а — $\theta = 1.75^\circ$; б — $\theta = 24^\circ$.

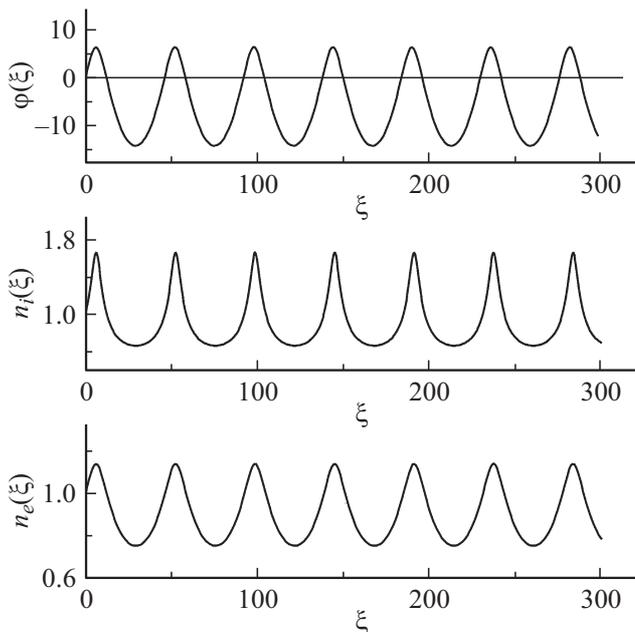


Рис. 6. Профили ионно-звуковой волны, распространяющейся под углом $\theta = 1.75^\circ$.

водных (6)–(9) переписутся в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\xi} [n_i(-V + l_x v_{ix} + l_y v_{iy})] = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} -V \frac{dv_{ix}}{d\xi} + l_x v_{ix} \frac{dv_{ix}}{d\xi} + l_y v_{iy} \frac{dv_{ix}}{d\xi} \\ = -\frac{e}{m_i} l_x \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{k_B T_i}{m_i} l_x \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{d\xi}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} -V \frac{dv_{iy}}{d\xi} + l_x v_{ix} \frac{dv_{iy}}{d\xi} + l_y v_{iy} \frac{dv_{iy}}{d\xi} \\ = -\frac{e}{m_i} l_y \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{k_B T_i}{m_i} l_y \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{d\xi}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = 4\pi e [n_e(\varphi) - n_i]. \quad (30)$$

Эти уравнения совместно с начальными условиями $n_i(0) = n_{0i}$, $v_{ix}(0) = v_{0i}$, $v_{iy}(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ образуют нелинейную задачу Коши.

Проведем нормировку задачи следующим образом: ξ нормируем на $\lambda_{Di} \sqrt{\frac{k_B T_i}{4\pi e^2 n_{0i}}}$, все скорости — на $\omega_i \lambda_{Di}$, все концентрации — на n_{0i} , а электростатический потенциал φ — на $\frac{k_B T_i}{e}$. Тогда задача Коши примет вид

$$\frac{d}{d\xi} [n_i(-V + l_x v_{ix} + l_y v_{iy})] = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} -V \frac{dv_{ix}}{d\xi} + l_x v_{ix} \frac{dv_{ix}}{d\xi} + l_y v_{iy} \frac{dv_{ix}}{d\xi} = -l_x \frac{d\varphi}{d\xi} - l_x \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{d\xi}, \\ (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -V \frac{dv_{iy}}{d\xi} + l_x v_{ix} \frac{dv_{iy}}{d\xi} + l_y v_{iy} \frac{dv_{iy}}{d\xi} = -l_y \frac{d\varphi}{d\xi} - l_y \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{d\xi}, \\ (33) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = n_{en}(\varphi) - n_i, \quad (34)$$

$$n_i(0) = 1; \quad v_{ix}(0) = v_{0i}; \quad v_{iy}(0) = 0; \quad \varphi(0) = 0, \quad (35)$$

где $n_e(\varphi) = \exp(\tau\varphi)$, $\tau = T_i/T_e$.

Проинтегрируем уравнение непрерывности (31) с учетом (35) и выразим из получившегося уравнения v_{iy} :

$$v_{iy} = \frac{1}{l_y} \left(V - l_x v_{ix} + \frac{l_x v_{0i} - V}{n_i} \right). \quad (36)$$

Далее подставим (36) в уравнения (32) и (33):

$$\begin{aligned} -v_{iy} \frac{dv_{ix}}{d\xi} + l_x v_{ix} \frac{dv_{ix}}{d\xi} + \left(V - l_x v_{ix} + \frac{l_x v_{0i} - V}{n_i} \right) \frac{dv_{ix}}{d\xi} \\ = -l_x \frac{d\varphi}{d\xi} - l_x \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{d\xi}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\frac{1}{l_y} \frac{l_x v_{0i} - V}{n_i} \frac{d \left(\frac{l_x v_{0i} - V}{n_i} - l_x v_{ix} \right)}{d\xi} = -l_y \frac{d\varphi}{d\xi} - l_y \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{d\xi}. \quad (38)$$

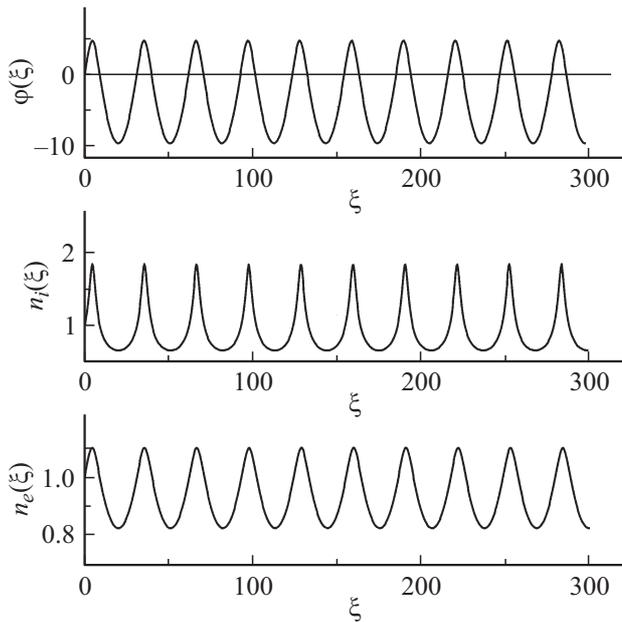


Рис. 7. Профили ионно-звуковой волны, распространяющейся под углом $\theta = 24^\circ$.

Выразим из (37) $\frac{dv_{ix}}{d\xi}$

$$\frac{dv_{ix}}{d\xi} = -\frac{l_x n_i}{l_x v_{0i} - V} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{d\xi} \right) \quad (39)$$

и подставим затем (39) в уравнение (38)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l_y} \frac{l_x v_{0i} - V}{n_i} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{l_x v_{0i} - V}{n_i} \right) + \frac{l_x^2}{l_y} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{d\xi} \right) \\ & = -l_y \frac{d\varphi}{d\xi} - l_y \frac{1}{n_i} \frac{dn_i}{d\xi}. \end{aligned} \quad (40)$$

В результате интегрирования (40) получим

$$\xi = \ln \left(\frac{1}{n_i} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l_x v_{0i} - V}{2} \right)^2 - \left(\frac{l_x v_{0i} - V}{n_i} \right)^2 \right]. \quad (41)$$

Далее необходимо выразить $n_i(\varphi)$ из уравнения (41), решив при этом трансцендентное уравнение. Сделать это можно с помощью специальной функции — W -функции Ламберта [11]:

$$n_i(\varphi) = \sqrt{-\frac{(l_x v_{0i} - V)^2}{W_{0,-1} \left\{ -(l_x v_{0i} - V)^2 \exp \left[-\frac{(l_x v_{0i} - V)}{2} + 2\varphi \right] \right\}}}. \quad (42)$$

Подставим (1) и (42) в уравнение Пуассона, домножим его на $\frac{d\varphi}{d\xi}$ и проинтегрируем. Тогда получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 = E - U_S(\varphi), \quad (43)$$

где E — постоянная интегрирования, а $U_S(\varphi)$ — псевдопотенциал Сагдеева, имеющий следующий вид:

$$\begin{aligned} U_S(\varphi) & = |l_x v_{0i} - V| \\ & \times \frac{W_{0,-1} \left\{ -(l_x v_{0i} - V)^2 \exp \left[-\frac{(l_x v_{0i} - V)}{2} + 2\varphi \right] \right\} - 1}{\sqrt{-W_{0,-1} \left\{ -(l_x v_{0i} - V)^2 \exp \left[-\frac{(l_x v_{0i} - V)}{2} + 2\varphi \right] \right\}}} \\ & - \frac{\exp(\tau\varphi)}{\tau} + C, \end{aligned} \quad (44)$$

в котором постоянную интегрирования удобно выбирать из условия $U_S(0) = 0$, а номер действительной ветви W -функции Ламберта — из условия квазинейтральности невозмущенной плазмы [12]. В нашем случае для периодической волны следует выбирать — 1-ую ветвь.

Графики псевдопотенциала (44) для двух случаев ионно-звуковой волны, распространяющихся под углами 24° и $\theta = 1.75^\circ$ для следующих параметров $\tau = 0.2$, $v_{0i} = -0.95$, $V = 3.5$ и $C = 66.2$, представлены на рис. 5. Для угла $\theta = 175^\circ$ угол сноса $\psi \approx 176.5^\circ$, т.е. ионно-звуковая волна является почти обратной, а для угла $\theta = 24^\circ$ в волне \mathbf{v}_{ph} и \mathbf{v}_{gr} почти перпендикулярны друг другу. Эти два случая помечены кружочками 1 и 2 на рис. 4, а.

Оба псевдопотенциала на рис. 5 имеют глобальные минимумы в начале координат. Профили ионно-звуковой волны для этих случаев были вычислены и представлены на рис. 6 и 7. Эти профили ничем не отличаются от профилей обычных прямых ионно-звуковых волн, показанных, например, в [13].

Заключение

Рассмотрены наклонные ионно-звуковые волны и плазме, в которой ионы движутся однонаправлено. В рамках линейной теории выведено двумерное дисперсионное соотношение и показано, что в системе возможны обратные и боковые волны.

Развитая нелинейная теория обратных и боковых волн базируется на выводе и анализе псевдопотенциала Сагдеева. Вычислялись нелинейные профили обратной и боковой ионно-звуковой волны. Найдено, что профили обратной и боковой волн неотличимы от профиля обычной прямой ионно-звуковой волны. Указанные волны можно различить только по кинематическим характеристикам.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Dubinov A.E., Kitayev I.N. // Phys. Wave Phenomena. 2017. Vol. 25. P. 137.
- [2] Dubinov A.E., Kitayev I.N. // Phys. Plasmas. 2016. Vol. 23. P. 104503.

- [3] *Dubinov A.E., Kitayev I.N.* // *Contrib. Plasma Phys.* 2017. Vol. 57. P. 373.
- [4] *Gil'man O.L., Ostrovsky L.A., Feinstein S.M.* // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1981. Vol. 9. P. 286.
- [5] *Yashvir Tiwari R.S., Sharma S.R.* // *Can. J. Phys.* 1988. Vol. 66. P. 824.
- [6] *Nakamura Y., Ohtani K.* // *J. Plasma Phys.* 1995. Vol. 53. P. 235.
- [7] *El-Labany S.K.* // *J. Plasma Phys.* 1995. Vol. 54. P. 285.
- [8] *Dubin E., Sauer K., McKenzie J.F.* // *J. Geophys. Res.* 2004. Vol. 109. P. A02208.
- [9] *Ginzburg V.L.* *The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas.* Pergamon, London: Addison-Wesley, Reading, Mass, 1964.
- [10] *Agranovich V.M., Ginzburg V.L.* *Crystal Optics with Spatial Dispersion and Excitons.* Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [11] *Dubinov A.E., Dubinova I.D.* // *J. Plasma Phys.* 2005. Vol. 71. P. 715.
- [12] *Gordienko V.A., Dubinova I.D., Dubinov A.E.* // *Plasma Phys. Rep.* 2006. Vol. 32. P. 910.
- [13] *Dubinov A.E.* // *J. Appl. Mech. Techn. Phys.* 2007. Vol. 48. P. 621.