

03  
**Ударные волны в термоупругой среде с точечными дефектами**

© В.И. Ерофеев,<sup>1,2</sup> А.В. Леонтьева,<sup>2</sup> А.В. Шекоян<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, 603950 Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup> Институт проблем машиностроения РАН — филиал Федерального исследовательского центра „Институт прикладной физики РАН“, 603024 Нижний Новгород, Россия

<sup>3</sup> Институт механики НАН Республики Армения, 0019 Ереван, Армения  
e-mail: erof.vi@yandex.ru

Поступило в Редакцию 15 мая 2018 г.

В окончательной редакции 12 апреля 2019 г.

Принято к публикации 14 мая 2019 г.

Изучено распространение плоских продольных волн в безграничной среде с точечными дефектами, находящейся в нестационарном неоднородном температурном поле. Рассмотрена самосогласованная задача, учитывающая как влияние акустической волны на образование и перемещение дефектов, так и влияние дефектов на особенности распространения акустической волны. Показано, что в случае отсутствия диффузии тепла система уравнений сводится к нелинейному эволюционному уравнению относительно смещений частиц среды. Уравнение можно считать формальным обобщением уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса. Методом усеченных разложений найдено точное решение эволюционного уравнения в виде стационарной ударной волны с монотонным убыванием. Отмечено, что диссипативные эффекты, обусловленные наличием дефектов, преобладают над дисперсией, связанной с миграцией дефектов в среде.

**Ключевые слова:** термоупругая волна, стационарная ударная волна, точечные дефекты, эволюционное уравнение.

DOI: 10.21883/JTF.2020.01.48656.190-19

## Введение

При воздействии на материал лазерного излучения или потока частиц (например, при ионной имплантации) в нем создаются точечные дефекты (вакансии, межузлия) [1]. Прохождение интенсивной продольной акустической волны способствует изменению в областях растяжения и сжатия энергии активации образования точечных дефектов, приводя к их пространственному перераспределению. Дефекты, мигрирующие по материалу, рекомбинируют на различного рода центрах. Роль таких центров могут играть дислокации, примеси внедрения и др.

Волновые эффекты в ансамблях дислокаций изучались в работах [2–9]. Также в [6] рассматривались задачи распространения упругой волны в вязкотермоупругом композите с шариковыми неоднородностями.

В [10] показано, что задачу о распространении акустической волны в материале с точечными дефектами следует рассматривать как самосогласованную, включающую в себя, наряду с динамическим уравнением теории упругости, кинетическое уравнение для плотности дефектов.

В [11] исследовано взаимодействие нелинейной волны деформации с полем концентрации точечных дефектов (вакансий, межузлий), приводящее как к рассеянию вол-

ны, так и к изменению энергии активации образования дефектов и их пространственному перераспределению.

При этом предполагалось, что основными процессами, определяющими поведение дефектов, являются процессы генерации, рекомбинации и диффузии. Объемная взаимная рекомбинация разноименных дефектов не учитывалась.

Распространение нелинейных продольных волн в пластине при учете взаимодействия продольной компоненты смещений среды с полями температуры и концентрации неравновесных атомных точечных дефектов исследованы в [12].

В [13] исследовано воздействие дислокаций и точечных дефектов на пространственную локализацию нелинейных акустических волн, распространяющихся в материалах. Влияние дефектов на пространственную локализацию нелинейных волн с учетом взаимной рекомбинации разноименных дефектов изучалось в [14]. В работах показано, что вакансии и межузлия способствуют формированию пространственно локализованных нелинейных волн.

В настоящей работе мы рассматриваем распространение плоской продольной волны в безграничной среде с точечными дефектами, при образовании которых меняется температура среды. Объемную взаимную рекомбинацию разноименных дефектов не учитываем. Считаем,

что в среде возникают дефекты только одного типа либо вакансии, либо межузлия.

### Постановка задачи

Для получения самосогласованной динамической задачи для термоупругой среды с точечными дефектами к уравнениям теории упругости

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

и теплопроводности

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = \kappa \Delta \Theta, \quad (2)$$

где  $u_i$  — компоненты вектора перемещений,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $\Theta = T - T_0$ ,  $T_0$  — начальная температура среды,  $T$  — текущая температура,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $\rho$  — плотность материала,  $S$  — энтропия единицы объема среды, следует добавить кинетические уравнения, описывающие изменение числа точечных дефектов в единице объема [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} = & q_{01} + q_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + D_1 \Delta n_1 \\ & - \beta_{11} n_1 - \beta_{12} n_2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_2}{\partial t} = & q_{02} + q_2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + D_2 \Delta n_2 \\ & - \beta_{22} n_2 - \beta_{21} n_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $n_1, n_2$  — объемные концентрации вакансий и межузельных атомов в единице объема среды соответственно,  $q_{01}, q_{02}$  — темпы генерации точечных дефектов при отсутствии деформации,  $D_1, D_2$  — коэффициенты диффузии вакансий и межузельных атомов соответственно,  $\beta_{12}, \beta_{21}$  — скорости взаимной рекомбинации дефектов типа „межузельные атомы–вакансия“ и „вакансия–межузельные атомы“ соответственно,  $\beta_1, \beta_2$  — скорости рекомбинации дефектов на стоках,  $q_1, q_2$  — коэффициенты взаимодействия деформации с дефектами.

Свободная энергия единицы объема среды имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} F = & F_0 + \frac{\lambda}{2} u_{ii}^2 + \mu \left( u_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} u_{ll} \right)^2 - d_1 u_{ll} n_1 - d_2 u_{ll} n_2 \\ & - \gamma \Theta u_{ll} + m_1 n_1 \Theta + m_2 n_2 \Theta - \frac{c_p}{T_0^2} \Theta^2 + \frac{A}{2} u_{ik} u_{il} u_{kl} \\ & + B u_{ik}^2 u_{ll} + \frac{C}{3} u_{ii}^3 + \frac{q_3}{2} u_{ii}^2 n_1 + q_4 u_{ll} n_1^2 \\ & + \frac{q_5}{2} u_{ii}^2 n_2 + q_6 u_{ll} n_2^2. \end{aligned} \quad (5)$$

где  $F_0$  — свободная энергия единицы объема среды до возмущения,  $\lambda$  и  $\mu$  — константы Ламе,  $d_1, d_2$  — коэффициенты, характеризующие взаимодействие упругой волны с дефектами,  $\gamma$  — термический коэффициент,  $m_1, m_2$  — коэффициенты, характеризующие взаимодействие „дефект–изменение температуры“,  $c_p$  — удельная теплоемкость материала,  $A, B, C$  — константы Ландау третьего порядка,  $q_3, q_4, q_5$  (как и ранее введенные  $q_1, q_2$ ) — коэффициенты, характеризующие взаимодействие деформации с дефектами.

Компоненты тензора деформаций  $u_{ik}$  и перемещения  $u_i$  связаны соотношениями, учитывающими геометрическую нелинейность [15]:

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (6)$$

Входящие в (1), (2) напряжения и энтропия определяются из соотношения (5):

$$\sigma_{ik} = - \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)}, \quad (7)$$

$$S = \frac{\partial F}{\partial T}. \quad (8)$$

При описании распространения вдоль координаты  $x_3$  плоской волны система (1)–(8) преобразуется к виду

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \beta_N \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = -\gamma \frac{\partial \Theta}{\partial x_3} - d_j \frac{\partial n_j}{\partial x_3}, \quad (9)$$

$$c_\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial t} - \chi \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_3^2} = -\gamma T_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} - T_0 p_j \frac{\partial n_j}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} = q_\varepsilon \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + D_j \frac{\partial^2 n_j}{\partial x_3^2} - \beta_j n_j, \quad (11)$$

где  $u_3(x_3, t)$  — смещение частиц среды вдоль координаты  $x_3$ ,  $\theta(x_3, t)$  — перепад температуры ( $\theta = T - T_0$ ),  $T_0$  — температура естественного состояния,  $n_j(x_3, t)$  — объемная концентрация точечных дефектов  $j$ -го типа ( $j = V$  — для вакансий,  $j = i$  — для межузлий),  $\rho$  — плотность,  $a = \lambda + 2\mu$ ,  $\lambda, \mu$  — постоянные Ламе,  $c_l = \sqrt{a/\rho}$  — скорость распространения продольной волны в отсутствие дефектов,  $\beta_N$  — коэффициент нелинейности ( $\beta_N = 3\lambda + 6\mu + 2A + 6B + 2C$ ),  $A, B, C$  — модули Ландау третьего порядка,  $\gamma$  — термический коэффициент,  $d_j = (\lambda + (2/3)\mu)\Omega_j$ ,  $\Omega_j$  — дилатационный параметр, характеризующий изменение объема среды при образовании в нем одного точечного дефекта ( $\Omega_V < 0$ ,  $\Omega_i > 0$ ),  $c_\varepsilon$  — теплопроводность при постоянной деформации,  $\chi$  — коэффициент теплопроводности,  $p_j$  — теплоемкость дефекта типа  $j$ ,  $q_\varepsilon$  — темп генерации точечных дефектов при наличии деформации,  $D_j$  — коэффициент диффузии дефекта типа  $j$ ,  $\beta_j$  — скорость рекомбинации на стоках дефекта  $j$ -го типа.

Системой уравнений (9)–(11) описывается распространение плоской продольной волны в среде как с

дефектами типа „вакансия“, так и с дефектами типа „межузлие“. Системы отличаются между собой знаками перед последним слагаемым первого уравнения системы. При дальнейшем анализе рассматриваются оба случая.

Пусть коэффициент теплопроводности является малой величиной ( $\chi = 0$ ), тогда из второго уравнения системы получаем выражение для температуры

$$\theta(x_3, t) = -\frac{T_0}{c_\varepsilon} \left( \gamma \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + p_j n_j \right). \quad (12)$$

С учетом (12) систему (9), (11) сводим к одному уравнению относительно смещений частиц среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \left( \left( \frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} \right) + \frac{q_\varepsilon}{\rho \beta_j} \left( \frac{\gamma T_0 p_j}{c_\varepsilon} - d_j \right) \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \\ + \frac{1}{\beta_j} \left( \frac{\partial}{\partial t} - D_j \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \left( \frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) \\ - \frac{\beta_N}{\rho} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \frac{1}{\beta_j} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial t} \right) \right) \\ + \frac{\beta_N D_j}{\rho \beta_j} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнении (13) введем безразмерные величины для продольного перемещения, координаты и времени соответственно  $U = u_3/u_0$ ,  $z = x_3/X$ ,  $\tau = t/T$ . Уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - a_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \times \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - a_3 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau} \right) \right) \\ + a_2 a_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $a_i$  — безразмерные комплексы параметров, имеющие вид

$$\begin{aligned} a_1 &= \left( \frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} \right) \left( \frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} + \frac{q_\varepsilon}{\rho \beta_j} \left( \frac{\gamma T_0 p_j}{c_\varepsilon} - d_j \right) \right)^{-1}, \\ a_2 &= D_j \beta_j \left( \frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} + \frac{q_\varepsilon}{\rho \beta_j} \left( \frac{\gamma T_0 p_j}{c_\varepsilon} - d_j \right) \right)^{-1}, \\ a_3 &= \frac{\beta_j \beta_N u_0}{\rho} \left( \frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} + \frac{q_\varepsilon}{\rho \beta_j} \left( \frac{\gamma T_0 p_j}{c_\varepsilon} - d_j \right) \right)^{-3/2}. \end{aligned}$$

В качестве характерных величин длины и времени приняты соответственно

$$X = \frac{1}{\beta_j} \sqrt{\frac{a}{\rho} + \frac{\gamma^2 T_0}{\rho c_\varepsilon} + \frac{q_\varepsilon}{\rho \beta_j} \left( \frac{\gamma T_0 p_j}{c_\varepsilon} - d_j \right)}, \quad T = \frac{1}{\beta}.$$

В уравнении (14) диссипативные слагаемые (производные третьего порядка) обусловлены наличием дефектов в среде, дисперсионные (производные четвертого порядка) — диффузионными процессами, протекающими в среде. Полагаем, что диффузионные процессы протекают медленнее, чем процессы взаимодействия дефектов с акустической волной.

## Эволюционное уравнение

Перейдем в уравнении (14) в движущуюся систему координат  $\xi = z - c\tau$ ,  $\eta = \varepsilon\tau$ , где  $c$  — скорость волны, заранее не известная,  $\varepsilon$  — малый параметр ( $\varepsilon \ll 1$ ). Выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью  $c$  вдоль оси  $z$ , медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности, дисперсии и диссипации. Считая, что в уравнении (14) все нелинейные и диссипативные слагаемые — малые величины порядка  $\varepsilon$ , получаем в первом приближении по  $\varepsilon$  эволюционное уравнение относительно функции продольной деформации  $W = \partial U / \partial \xi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{(1 - a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{a_2(1 - a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} \\ + \frac{a_3}{2\varepsilon} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из нулевого приближения найдена скорость волны  $c = 1$  (измеряется в относительных единицах), которая учтена в (15). Полученное уравнение можно классифицировать как уравнение Кортевега—де Вриза—Бюргерса (далее — „КдВ—Бюргерса“) с дополнительным нелинейным слагаемым. Поскольку в уравнении (15) содержатся диссипативные и нелинейные слагаемые, возможно, оно имеет решение в виде ударных волн.

## Стационарная ударная волна

Среди возможных решений уравнения (15) существенный интерес представляют решения из класса стационарных волн. Такие волны распространяются с постоянной скоростью и не меняют своей формы в процессе распространения. Уравнение стационарных волн имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \chi} - \frac{(1 - a_1)}{2\varepsilon v} \frac{d^2 W}{d\chi^2} - \frac{a_2(1 - a_1)}{2\varepsilon v} \frac{d^3 W}{d\chi^3} \\ - \frac{a_3}{2\varepsilon v} \left( W \frac{\partial W}{\partial \chi} - \frac{d}{d\chi} \left( W \frac{dW}{d\chi} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

или после интегрирования

$$W - \frac{(1 - a_1)}{2\varepsilon v} \frac{dW}{d\chi} - \frac{a_2(1 - a_1)}{2\varepsilon v} \frac{d^2W}{d\chi^2} - \frac{a_3}{2\varepsilon v} \left( \frac{W^2}{2} - W \frac{dW}{d\chi} \right) = 0. \quad (17)$$

где  $W = W(\chi)$ ,  $\chi$  — бегущая координата,  $\chi = \xi - v\eta$ ,  $v$  — скорость стационарной волны, бегущей в положительном направлении координатной оси. Константу интегрирования положили равной нулю.

Решение уравнения (17) ищем методом усеченных разложений, подробно описанным в [16,17]. Метод используется для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Поскольку порядок полюса общего решения равен единице, решение уравнения (17) можно искать в виде

$$W(\chi) = b_0 Y(\chi) + b_1, \quad (18)$$

где  $Y(\chi) = \sqrt{B_0} \operatorname{th}(\sqrt{B_0}\chi)$  — решение уравнения Риккати  $Y'(\chi) = -Y^2(\chi) + B_0$ . Подставляя решение (18) в уравнение (17) и учитывая уравнение Риккати, получаем полином третьей степени относительно  $Y(\chi)$ . Приравнивая коэффициенты полинома нулю, находим неизвестные коэффициенты

$$b_0 = -\frac{2a_2}{a_3} (1 - a_1), \quad b_1 = \frac{1}{a_3} (1 - a_1)(1 + a_2),$$

$$B_0 = \frac{1}{4a_2^2} (1 + a_2)^2.$$

Одновременно с коэффициентами  $b_0, b_1, B_0$  находим выражение для скорости стационарной волны

$$v = \frac{1}{2\varepsilon} (1 - a_1)(1 + a_2). \quad (19)$$

Только при этом значении скорости удастся найти решение уравнения (17) аналитическим методом. Решение (18) принимает вид

$$W(\chi) = \frac{1}{a_3} (1 - a_1)(1 + a_2) \left( 1 - \operatorname{th} \left( \frac{1 + a_2}{2a_2} \chi \right) \right). \quad (20)$$

График зависимости (20) представлен на рис. 1. Анализ функций первой и второй производных ( $W'(\chi)$  и  $W''(\chi)$ ) показывает их четность и нечетность соответственно, что говорит о симметрии графиков функций относительно оси ординат и начала координат. График зависимости  $W(\chi)$  имеет вид монотонного симметричного относительно точки перегиба кинка. Точка симметрии кинка лежит на оси ординат. Амплитуда  $A$  и ширина  $\Delta$  кинка равны

$$A = \frac{2}{a_3} (1 - a_1)(1 + a_2), \quad \Delta = \frac{2a_2}{1 + a_2}.$$

Фазовый портрет уравнения (17) представлен на рис. 2. Решение уравнения (20) на рисунке отмечено

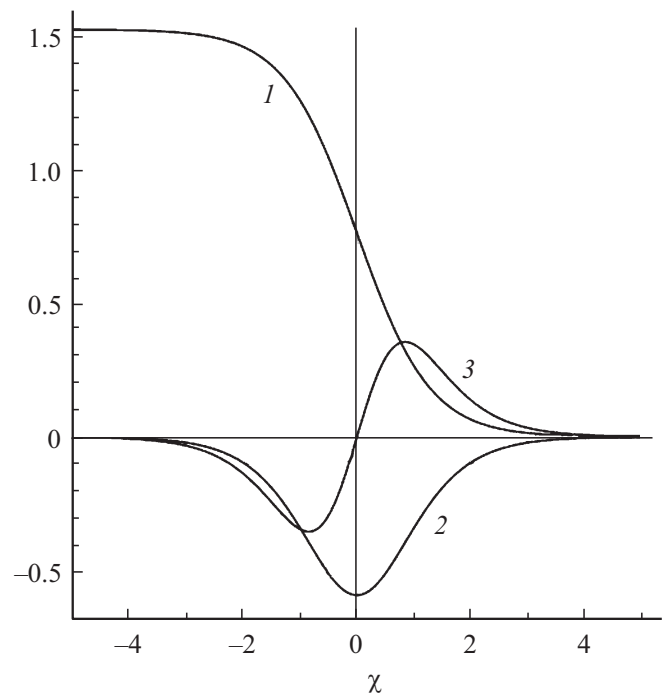


Рис. 1. Зависимости  $W(\chi)$  (1),  $W'(\chi)$  (2),  $W''(\chi)$  (3) при фиксированных значениях параметров.

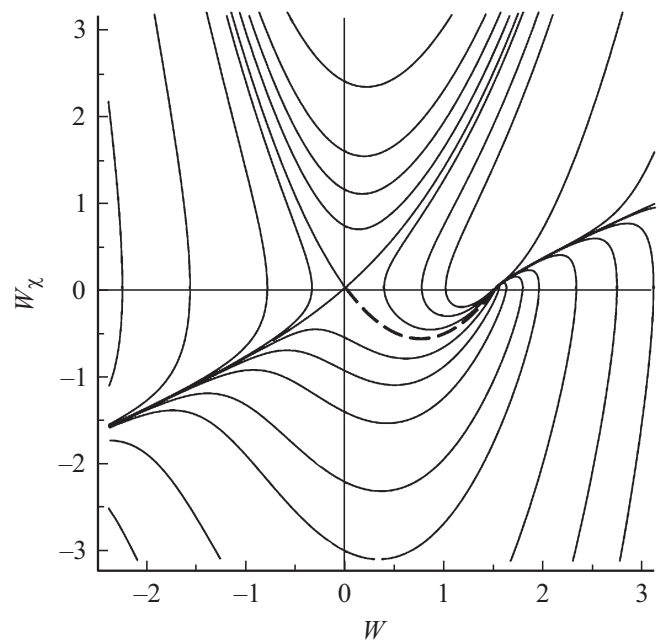


Рис. 2. Фазовый портрет в плоскости  $(W, W')$ .

штрихом. Из рисунка видно, что на фазовом портрете есть два состояния равновесия. Исследование на устойчивость состояний равновесия показывает, что одно из состояний равновесия „узел“, другое — „седло“. Движение происходит из неустойчивого состояния равновесия „узел“ (при  $\chi \rightarrow -\infty$ ) в седловую точку (при

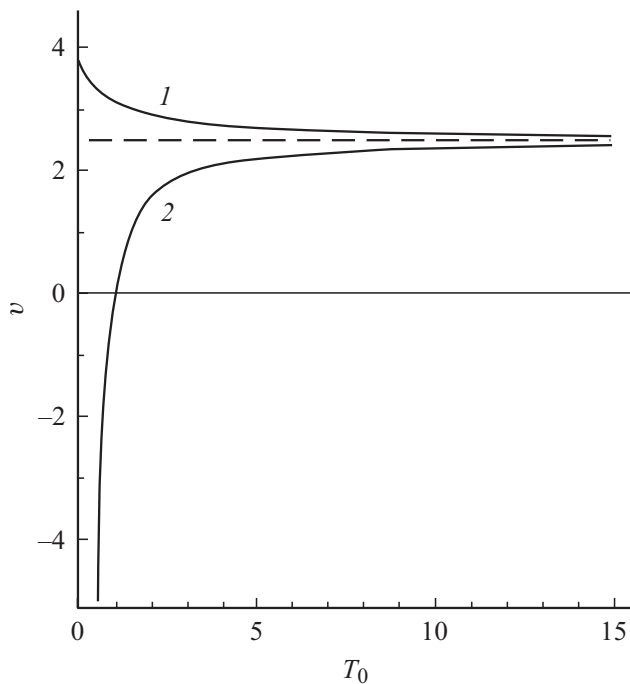


Рис. 3. Зависимости  $v(T_0)$  при  $d_j < 0$  (1) и  $d_j > 0$  (2).

$\chi \rightarrow +\infty$ ). Решение представляет собой ударную волну аналогичную стационарной ударной волне уравнения КдВ–Бюргерса [18].

Присутствие в уравнении (16) дополнительного нелинейного слагаемого не приводит к появлению принципиально новых решений. Нелинейные эффекты уравновешиваются диссипативными эффектами и дисперсией в рассматриваемой среде. Наличие дополнительной нелинейности не дает качественных изменений.

Зависимости скорости стационарной волны от начальной температуры изображены на рис. 3 для сред с дефектами типов „вакансия“ 1 и „межузлие“ 2.

Для сред с вакансиями стационарная волна, распространяющаяся с найденной фиксированной скоростью (19), существует при любых положительных температурах. Для сред с межузлиями стационарная волна существует только при  $T_0 > T_0^*$ , где  $T_0^*$  — значение температуры, при котором скорость волны равна нулю.

Увеличение температуры  $T_0$  приводит к увеличению скорости стационарной волны, если дефектами являются межузлия, и уменьшению, если дефектами являются вакансии. В среде с вакансиями волна распространяется быстрее, чем в среде с межузлиями. При больших температурах волны в обеих средах распространяются с почти одинаковыми скоростями

$$v = \frac{1}{2\varepsilon \left(1 + \frac{\gamma\beta_1}{q_c p_j}\right)}.$$

## Частные случаи эволюционного уравнения

Если в уравнении (15) диссипативное слагаемое мало по сравнению со всеми остальными слагаемыми уравнения (случай 1), то им можно пренебречь, и получим уравнение Кортевега–де Вриза с дополнительным нелинейным слагаемым

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{a_2(1-a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^3 W}{\partial \xi^3} + \frac{a_3}{2\varepsilon} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right) = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) имеет аналитическое решение в виде стационарной волны

$$W(\chi) = \frac{a_2}{a_3} (1-a_1) \left( 1 - \operatorname{th} \left( \frac{\chi}{2} \right) \right), \quad (22)$$

где  $\chi$ , как и прежде, бегущая координата,  $\chi = \xi - v\eta$ ,  $v$  — скорость стационарной волны, равная  $v = a_2(1-a_1)/2\varepsilon$ . Решение (22) найдено тем же методом, что и ранее полученное решение (20). Профиль волны имеет вид, аналогичный изображенному на рис. 1 — плавного скачка (кинк) между двумя значениями функции продольной деформации  $W(\chi)$ . Кинк имеет монотонное убывание и симметрию относительно точки перегиба.

Исследуя состояния равновесия  $W_0 = 0$ ,  $W_0 = 2a_2(1-a_1)/a_3$  на устойчивость, получаем, что в одном случае характеристическое уравнение имеет действительные корни разных знаков, что соответствует состоянию равновесия „седло“, в другом случае решением характеристического уравнения являются действительные равные положительные корни, что соответствует состоянию равновесия „неустойчивый вырожденный узел“. Решением уравнения (21) является стационарная ударная волна.

Известно, что решением уравнения Кортевега–де Вриза является стационарная волна типа „солитон“. Движение на фазовой плоскости происходит из „седла“ в „седло“. В этом случае стационарная волна является результатом взаимодействия двух механизмов: нелинейности и дисперсии. Нелинейность дает укрупнение профиля волны с последующим опрокидыванием (волна Римана), а дисперсия дает расплывание профиля, поскольку разные гармоники волны (частоты) распространяются с разными скоростями.

Решением уравнения (21) является стационарная ударная волна, которая является результатом взаимодействия эффектов нелинейности и диссипации, несмотря на то, что уравнение содержит только дисперсионное и нелинейные слагаемые, а диссипативное слагаемое в уравнении отсутствует.

Из линеаризованного уравнения относительно малых возмущений ( $W(\chi) = W_0 + \tilde{W}(\chi)$ )

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \eta} + \frac{a_2(1-a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^3 \tilde{W}}{\partial \xi^3} + \frac{a_3 W_0}{2\varepsilon} \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi^2} \right) = 0 \quad (23)$$

видно, что диссипация в уравнении (21) присутствует неявно. Последнее слагаемое в уравнении (23) является диссипативным.

Таким образом, дополнительное слагаемое в (21) является диссипативно-нелинейным. Наличие этого слагаемого в уравнении и делает возможным существование решений в виде стационарных ударных волн.

Если в уравнении (15) дисперсионное слагаемое мало по сравнению со всеми остальными слагаемыми (случай 2), то получаем уравнение Бюргерса с дополнительным нелинейным слагаемым

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{(1 - a_1)}{2\varepsilon} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{a_3}{2\varepsilon} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right) = 0. \quad (24)$$

Это возможно, когда  $a_2 \rightarrow 0$ , т.е. диффузия очень мала ( $D_j \rightarrow 0$ ).

Уравнение (24) можно отнести к обобщенным невозмущенным уравнениям Бюргерса. В отличие от уравнения Бюргерса [18], здесь присутствует еще один тип нелинейности, причем обе нелинейности проявляются в равной степени. Уравнение (24) имеет стационарное решение в виде ударной волны. Учитывая граничные условия (функция на бесконечностях имеет разные значения)

$$W(\chi) = \begin{cases} W_1, & \chi \rightarrow +\infty \\ W_2, & \chi \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (W_2 > W_1),$$

находим решение уравнения стационарных волн

$$\chi = \frac{2(1 - a_1 - a_3 W_1)}{a_3(W_2 - W_1)} \ln(W - W_1) - \frac{2(1 - a_1 - a_3 W_2)}{a_3(W_2 - W_1)} \times \ln(W_2 - W),$$

где  $W = W(\chi)$ ,  $\chi$  — бегущая координата,  $\chi = \xi - v\eta$ , скорость нелинейной волны определяется выражением  $v = a_3(W_1 + W_2)/4\varepsilon$ . Профиль стационарной ударной волны  $W(\chi)$  и график производной изображены на рис. 4. График производной отображен в верхнюю полуплоскость и смещен по оси ординат на  $W_1$ .

Параметры ударной волны, возникающей в результате взаимной компенсации эффектов нелинейности и диссипации, связаны соотношением

$$\frac{a_3 A}{1 - a_1} \left( \frac{\Delta}{2} - 1 \right) = \text{const},$$

где  $A = W_2 - W_1$  — амплитуда ударной волны,  $\Delta$  — характерная ширина фронта ударной волны. Скорость нелинейной волны зависит от амплитуды и ширины фронта волны.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (15) параметр  $a_1 = 1$  (случай 3). Это возможно, если дефектами являются межузлия ( $d_i > 0$ ). Для вакансий  $0 < a_1 < 1$ . Для межузлий  $a_1 > 0$ , причем, если влияние температур мало, то  $a_1 \gg 1$ .

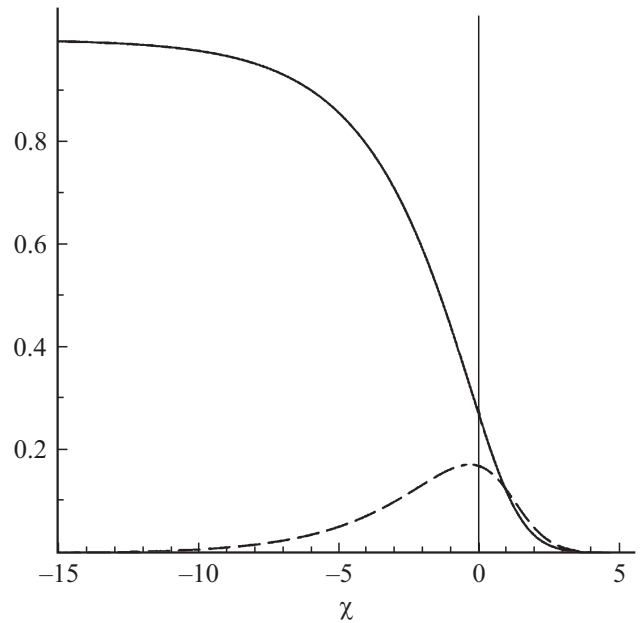


Рис. 4. Зависимости  $W(\chi)$  (сплошная линия),  $W'(\chi)$  (штриховая линия).

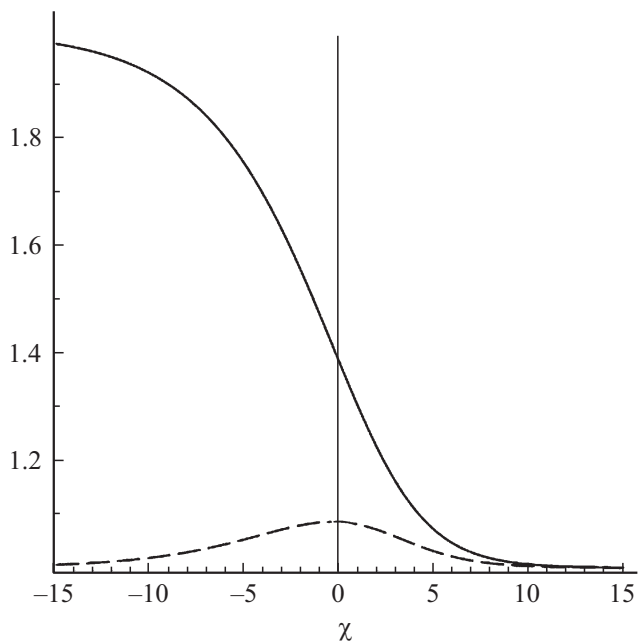


Рис. 5. Зависимости  $W(\chi)$  (сплошная линия),  $W'(\chi)$  (штриховая линия).

Если  $a_1 = 1$ , то получаем уравнение, в котором отсутствуют диссипативное и дисперсионное слагаемые, но сохраняются нелинейные слагаемые

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{a_3}{2\varepsilon} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( W \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \right) = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) имеет дополнительное нелинейное слагаемое относительно уравнения Римана. Нелинейности

в уравнение входят с одинаковыми коэффициентами и разными знаками.

Уравнение (25) имеет решение

$$\chi = \frac{2}{(W_2 - W_1)} [W_2 \ln(W_2 - W) - W_1 \ln(W - W_1)]$$

в виде стационарной ударной волны, распространяющейся со скоростью  $v = (a_3/4\epsilon)(W_1 + W_2)$  вдоль координаты  $\chi = \xi - v\eta$ . Профиль волны изображен на рис. 5.

Ширина фронта ударной волны является постоянной величиной ( $\Delta = \text{const}$ ), т.е. не зависит от амплитуды волны и исходных параметров системы. В этом случае к появлению ударной волны приводит взаимодействие разнородных нелинейностей. Линеаризация уравнения (25) относительно малых возмущений

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \theta} + b_3 \left( \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \xi^2} \right) W_0 = 0$$

показывает, что второе нелинейное слагаемое приводит к затуханию. Это затухание способствует появлению стационарной ударной волны в системе. Уравнение (25) обладает свойством уравнения Бюргера, несмотря на то, что явно диссипативные слагаемые в этом уравнении отсутствуют.

## Заключение

На основе анализа точного аналитического решения эволюционного уравнения относительно смещений частиц среды показано, что вакансии и межузлия способствуют формированию стационарных ударных волн в среде. Показано, что ударные волны могут быть симметричного и несимметричного профиля.

## Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации (договор № 14.Y26.31.0031).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Мирзоев Ф.Х., Панченко В.Я., Шелепин Л.А. // УФН. 1996. Т. 166. № 1. С. 3–32. DOI: 10.3367/UFNR.0166.199601a.0003 [Mirzoev F.Kh., Panchenko V.Ya., Shelepin L.A. // Phys. Usp. 1996. Vol. 39. N 1. P. 1–29. DOI: 10.1070/PU1996v039n01ABEH000125]
- [2] Бурлак Г.Н., Островский И.В. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 18. С. 69–74 [Burlak G.N., Ostrovskii I.V. // Tech. Phys. Lett. 1997. Vol. 23. N 9. P. 725–726. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1261669>]
- [3] Ерофеев В.И., Ромашов В.П. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 6. С. 6–11. [Erofeev V.I., Romashov V.P. // Tech. Phys. Lett. 2002. Vol. 28. N 3. P. 218–220. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1467280>]
- [4] Ерофеев В.И. // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 4. С. 32–36. [Erofeev V.I. // Tech. Phys. Lett. 2008. Vol. 34. N 2. P. 150–152. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785008020193>]
- [5] Шекоян А.В. // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. № 7. С. 93–97. [Shekoan A.V. // Tech. Phys. Lett. 2009. Vol. 35. N 4. P. 337–339. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063785009040142>]
- [6] Бадоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 320 с. [Bagdov A., Erofeev V., Shekoan A. Wave Dynamics of Generalized Continua. Springer: Berlin, Heidelberg, 2016. 274 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-37267-4>]
- [7] Ерофеев В.И., Кажеев В.В. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 4. С. 149–151. [Erofeev V.I., Kazhaev V.V. // Tech. Phys. 2010. Vol. 55. N 4. P. 580–583. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1063784210040262>]
- [8] Сарафанов Г.Ф. Коллективные и волновые эффекты в ансамбле дислокаций при пластической деформации металлов. Н. Новгород: Изд-во Литера, 2010. 359 с.
- [9] Ерофеев В.И., Мальханов А.О. // Физическая мезомеханика. 2017. Т. 20. № 4. С. 69–76. [Erofeev V.I., Malkhanov A.O. // Phys. Mesomech. 2019. Vol. 22. N 3. P. 173–180. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959919030019>]
- [10] Мирзоев Ф.Х., Шелепин Л.А. // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 8. С. 23–26 [Mirzoev F., Shelepin L.A. // Tech. Phys. 2001. Vol. 46. N 8. P. 952–955. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1395114>]
- [11] Ерофеев В.И., Артамонова О.А. // Труды XXII Сессии Российского акустического общества и Научного совета по акустике РАН. М.: ГЕОС, 2010. Т. 1. С. 159–159.
- [12] Мирзаде Ф.Х., Шелепин Л.А. // Акустический журнал. 2007. Т. 53. № 6. С. 766–773. [Mirzade F.Kh., Shelepin L.A. // Acoustical Phys. 2007. Vol. 53. N 6. P. 676–682. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1395114>]
- [13] Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O. // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 208. N 012017. P. 1–8.
- [14] Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О. // Известия РАН. Серия физическая. 2018. Т. 82. № 5. С. 591–596. [Erofeev V.I., Leonteva A.V., Malkhanov A.O. // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Phys. 2018. Vol. 82. N 5. P. 520–525. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1062873818050088>]
- [15] Порубов А.В. Локализация нелинейных волн деформации. М.: Физматлит, 2009. 208 с.
- [16] Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 360 с.
- [17] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Интеллект, 2010. 368 с.
- [18] Кадомцев Б.Б., Карпман В.И. // УФН. 1971. Т. 103. № 2. С. 193–232. DOI: 10.3367/UFNR.0103.197102a.0193 [Kadomtsev B.B., Karpman V.I. // Sov. Phys. Usp. 1971. Vol. 14. N 1. P. 40–60. DOI: 10.1070/PU1971v01ABEH004441]