

01

Стационарные и самоподобные волны в стержне с разномодульной нелинейностью, диссипацией и дисперсией

© В.Е. Назаров, С.Б. Кияшко

Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, Россия
e-mail: v.e.nazarov@appl.sci-nnov.ru

Поступило в Редакцию 5 марта 2019 г.

В окончательной редакции 6 мая 2019 г.

Принято к публикации 29 июня 2019 г.

Исследовано распространение продольных упругих волн в стержне с разномодульной нелинейностью, линейной диссипацией и геометрической дисперсией фазовой скорости. Получены аналитические и численные решения для профилей стационарных волн и самоподобных периодических волн и импульсных возмущений, распространяющихся в таком стержне без изменения формы; проведен их графический анализ.

Ключевые слова: разномодульная нелинейность, диссипация, дисперсия, упругие волны.

DOI: 10.21883/JTF.2020.01.48654.82-19

Введение

Существует довольно широкий класс твердотельных сред, обладающих разномодульными упругими свойствами, т.е. различными модулями упругости при сжатии и растяжении [1]. К таким средам относятся некоторые полимеры, композиционные и конструкционные материалы, грунты, а также материалы, содержащие трещины. Изучению нелинейного распространения продольных упругих волн в разномодульных (или бимодульных) средах посвящено большое число работ [1–12]. В этих работах рассматривалось как распространение волн в идеальной разномодульной среде, так и влияние диссипации и релаксации на эволюцию волн в таких средах. В разномодульных средах нелинейный режим распространения имеет место только для разнополярных волн, однополярные же возмущения распространяются линейно, с постоянными, но различными скоростями, зависящими от их полярности. Нелинейное искажение первоначально гармонической (разнополярной) волны в идеальной разномодульной среде происходит таким образом, что на каждом периоде в ее профиле, уже на сколь угодно малом расстоянии от излучателя, образуется „перехлест“ (неоднозначность), устраняемый введением искусственного разрыва — ударного фронта [5]. В результате такого искажения амплитуды высших гармоник нелинейной волны пропорциональны первой степени амплитуды первичной волны, при этом волна затухает до нуля на конечном расстоянии [5]. Линейные диссипация и дисперсия — всегда [7–12], а релаксация — только для относительно низкочастотных волн [8–10], предотвращают образование неоднозначностей в профиле волны в разномодульной среде и ее быстрое затухание (до нуля), однако амплитудные закономерности для высших гармоник волны сохраняются.

Изучение нелинейных волновых процессов (НВП) в разномодульных средах представляет научный и практический интерес. Научный интерес связан с выявлением закономерностей НВП в средах с неаналитической нелинейностью, а практический — с созданием эффективных методов диагностики их структуры. В частности, интерес к задачам о распространении продольных упругих волн в разномодульных средах во многом связан с линейной зависимостью разномодульной нелинейности от амплитуды деформации, что позволяет получать точные аналитические решения нелинейных волновых уравнений для таких сред.

В настоящей работе проводится теоретическое исследование распространения продольных упругих волн в стержне с разномодульной нелинейностью с учетом линейной диссипации и геометрической дисперсии фазовой скорости. Рассматривается распространение стационарных и автомодельных (самоподобных) разнополярных периодических волн и импульсных возмущений, распространяющихся в таком стержне без изменения формы.

1. Основные уравнения

Уравнение состояния разномодульного твердого тела имеет вид [1,5,7]:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E_1\varepsilon, & \varepsilon \geq 0 \\ E_2\varepsilon, & \varepsilon \leq 0 \end{cases} = E[\varepsilon - \gamma|\varepsilon|], \quad (1)$$

где σ, ε — продольные напряжение и деформация, $E_{1,2}$ — модули упругости среды при ее растяжении и сжатии (для стержня это модули Юнга),

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad \gamma = \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2}, \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad |\gamma| \ll 1.$$

Для твердых тел с трещинами $E_2 > E_1$, но для других материалов может быть и наоборот, $E_2 < E_1$. Заметим, что нелинейность уравнения состояния (1) описывается неаналитической функцией $f(\varepsilon) = \gamma|\varepsilon|$ — непрерывной, но негладкой и недифференцируемой в точке $\varepsilon = 0$. Из уравнения (1) следует, что одиночные положительные ($\varepsilon \geq 0$) и отрицательные ($\varepsilon \leq 0$) волновые возмущения в такой среде распространяются со скоростями C_+ и C_- соответственно, причем

$$C_{\pm} = (E_{1,2}/\rho)^{1/2} = \sqrt{(E/\rho)(1 \mp \gamma)},$$

ρ — плотность среды. Мы не будем учитывать геометрическую нелинейность уравнений движения (по сравнению с нелинейностью уравнения состояния), полагая, что $|\varepsilon| \ll |\gamma|$ [5]. В этом приближении $\rho = \text{const}$, при этом уравнения теории упругости в лагранжевых и эйлеровых координатах совпадают [5].

Получим волновое уравнение для продольной деформации стержня, обладающего разномодульной нелинейностью, с учетом его линейной диссипации и геометрической дисперсии. Подставляя уравнение состояния (1) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$ [13], и, учитывая линейную диссипацию [13] и геометрическую дисперсию фазовой скорости продольных (вдоль оси x) упругих волн в стержне конечного диаметра [14,15], получим одномерное квазилинейное волновое уравнение для смещения и деформации

$$U_{tt} - C_0^2 \varepsilon_x = -\gamma C_0^2 [|\varepsilon|]_x + \alpha \varepsilon_{tx} + v^2 r_0^2 [U_{tt} - C_{sh}^2 U_{xx}]_{xx}, \quad (2)$$

где $U(x, t)$ и $\varepsilon(x, t) = \partial U(x, t)/\partial x$ — продольные смещение и деформация, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$, $C_{sh} = (\mu/\rho)^{1/2} = [E/2(1+\nu)\rho]^{1/2} = C_0/[2(1+\nu)]^{1/2}$ — скорость сдвиговой волны, $\mu = E/2(1+\nu)$ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент диссипации, $r_0 = R/\sqrt{2}$, R — радиус стержня, $R < \Lambda/2$, Λ — длина волны. Дифференцируя уравнение (2) по x , получим волновое уравнение для деформации ε :

$$\varepsilon_{tt} - C_0^2 \varepsilon_{xx} = -\gamma C_0^2 [|\varepsilon|]_{xx} + \alpha \varepsilon_{txx} + v^2 r_0^2 [\varepsilon_{tt} - C_{sh}^2 \varepsilon_{xx}]_{xx}. \quad (3)$$

Это уравнение аналогично уравнению с двумя дисперсиями [15]; отличие заключается в замене нелинейного квадратичного слагаемого на нелинейное разномодульное ($-\gamma C_0^2 [|\varepsilon|]_{xx}$) и наличии слагаемого $\alpha \varepsilon_{txx}$, учитывающего линейную диссипацию волны.

Полагая нелинейное, диссипативное и дисперсионное слагаемые в правой части уравнения (3) малыми, упростим это уравнение, используя метод медленноменяющегося профиля [14,16]. Переходя в уравнении (3) к сопровождающей системе координат $\tau = t - x/C_0$, $x' = x \geq 0$ и полагая в левой части уравнения (2)

$$\partial^2 \varepsilon / \partial t^2 = \partial^2 \varepsilon / \partial \tau^2,$$

$$\partial^2 \varepsilon / \partial x^2 \approx (1/C_0^2) \partial^2 \varepsilon / \partial \tau^2 - (2/C_0) \partial^2 \varepsilon / \partial x \partial \tau,$$

а в правой —

$$\partial^2 |\varepsilon| / \partial x^2 \approx (1/C_0^2) \partial^2 |\varepsilon| / \partial \tau^2,$$

$$\partial^3 \varepsilon / \partial t \partial x^2 \approx (1/C_0^2) \partial^3 \varepsilon / \partial \tau^3,$$

$$\partial^4 \varepsilon / \partial x^4 \approx (1/C_0^4) \partial^4 \varepsilon / \partial \tau^4,$$

$$\partial^4 \varepsilon / \partial x^2 \partial t^2 \approx (1/C_0^2) \partial^4 \varepsilon / \partial \tau^4,$$

получим эволюционное уравнение для волны деформации, бегущей в положительном направлении оси x :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\gamma}{2C_0} \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{2C_0^3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} + \frac{v^2 R^2 (1+2\nu)}{8C_0^3 (1+\nu)} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \tau^3}. \quad (4)$$

Отметим, что для бегущей волны имеет место соотношение $\varepsilon(x, \tau) = -V(x, \tau)/C_0$, где $V(x, \tau) = \partial U(x, \tau)/\partial \tau$ — скорость частиц среды.

Для получения и анализа решений уравнения (4) приведем его к безразмерному виду

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\partial |e|}{\partial \theta} + \mu \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} + \delta \frac{\partial^3 e}{\partial \theta^3}, \quad (5)$$

где $e = \varepsilon/\varepsilon_0$, $\theta = \omega\tau$, $z = \gamma\omega x/2C_0$, ε_0 и ω — характерные амплитуда и частота волны, $\mu = \alpha\omega/\gamma C_0^2$, $\delta = v^2 R^2 (1+2\nu)\omega^2/4\gamma(1+\nu)C_0^2$. Коэффициент μ — это коэффициент, обратный акустическому числу Рэйнольдса, а коэффициент $\delta = Ur^{-1}$ — это обратный параметр Урселла $Ur = 4\gamma(1+\nu)C_0^2/v^2 R^2 (1+2\nu)\omega^2$ [14,16]. Для разномодульной среды число Рэйнольдса и параметр Урселла не зависят от амплитуды волны $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$, поэтому и решения уравнения (4) также не зависят от этой амплитуды, т.е. если функция $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$ является решением уравнения (4), то и функция $\varepsilon = C\varepsilon(x, \tau)$, где $C = \text{const} > 0$, также является решением этого уравнения.

Волновое уравнение (5) — это аналог уравнения Кортевега-де Вриза–Бюргерса [14,16] для среды с разномодульной нелинейностью. Квазилинейное уравнение (5) — это, по существу, два линейных дифференциальных уравнения третьего порядка: одно — для положительной части $[e_+(z, \theta) \geq 0]$ волны $e = e(z, \theta)$, другое — для отрицательной $[e_-(z, \theta) \leq 0]$. Положительная и отрицательная части волны непрерывно (вместе с производными $\partial e_{\pm}(z, \theta)/\partial \theta$ и $\partial^2 e_{\pm}(z, \theta)/\partial \theta^2$) переходят друг в друга при $e_{\pm}(z, \theta) = 0$.

Из уравнения (5) следует, что эволюция волны в разномодульном стержне зависит от двух коэффициентов μ и δ , причем в случае $\mu \ll 1$ и $|\delta| \ll 1$ получим сильнонелинейную волну, а в случае $\mu \gg 1$ или $|\delta| \gg 1$ — практически ее линейное распространение. Далее для определенности мы будем полагать, что $\gamma > 0$ и, следовательно, $\delta > 0$, $\mu > 0$ и $z \geq 0$.

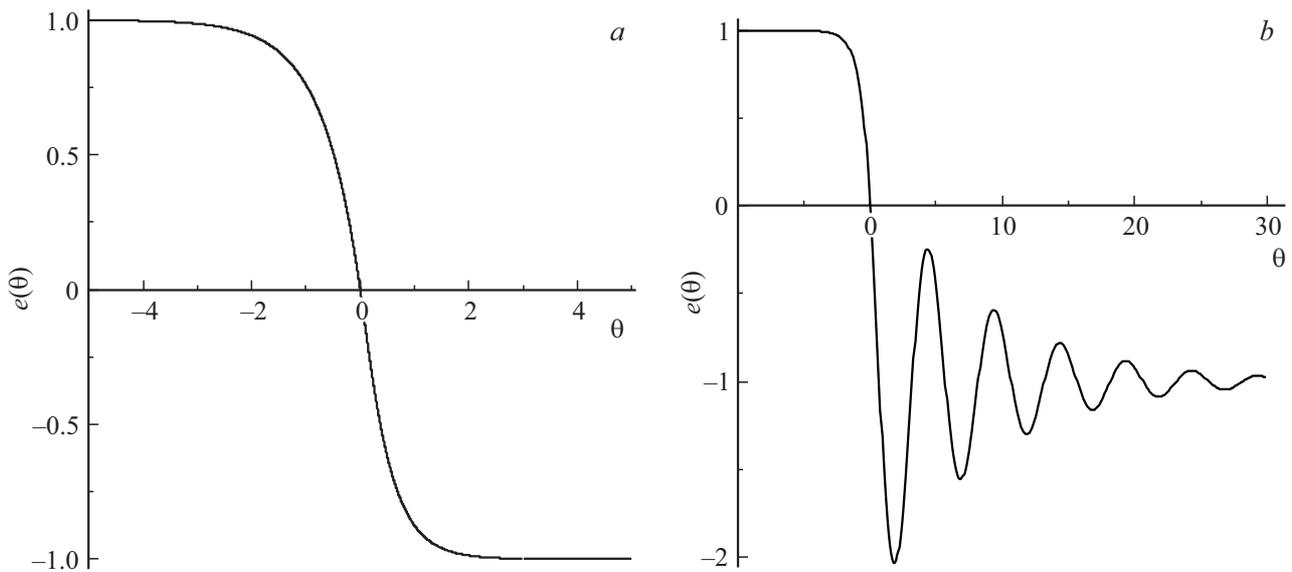


Рис. 1. Форма стационарной волны при $\delta = 0.07, \mu = 0.6, \mu^2 > 4\delta$ (a); при $\delta = 0.4, \mu = 0.1, \mu^2 < 4\delta$ (b).

2. Стационарные волны

Как и уравнения Бюргерса и Кортевега-де Вриза [14,16], нелинейное уравнение (5) имеет частные точные решения, описывающие стационарные волны, не зависящие от координаты z , и распространяющиеся без изменения формы. Полагая в уравнении (5) $\partial e(z, \theta)/\partial z = 0$, получаем уравнение для стационарной волны типа скачка-перехода (при $\gamma > 0$) из состояния $e_-(\theta \rightarrow \infty) = -1$ в состояние $e_+(\theta \rightarrow -\infty) = 1$:

$$\delta \frac{d^2 e}{d\theta^2} + \mu \frac{de}{d\theta} - |e| = -1. \quad (6)$$

(При $\gamma < 0$ устойчивым будет обратный переход: из $e_+(\theta \rightarrow -\infty) = 1$ в $e_-(\theta \rightarrow \infty) = -1$.) При $\mu^2 > 4\delta$ решение уравнения (5) имеет вид плавного перехода — ступеньки (рис. 1, a)

$$\begin{aligned} e_+(\theta \leq 0) &= 1 - \exp(\lambda_1^+ \theta) \geq 0, \\ e_-(\theta \geq 0) &= -1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\delta}}{\sqrt{\mu^2 - 4\delta}} \right) \exp(\lambda_3^- \theta) \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\delta}}{\sqrt{\mu^2 - 4\delta}} \right) \exp(\lambda_4^- \theta) \leq 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^+ &= [-\mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4\delta}]/2\delta, \quad \lambda_1^+ \geq 0, \quad \lambda_2^+ < 0, \\ \lambda_{3,4}^- &= [-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4\delta}]/2\delta \leq 0, \quad \lambda_3^- \leq 0, \quad \lambda_4^- < 0. \end{aligned}$$

При $\mu^2 < 4\delta$ и выполнении условия

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{2\sqrt{2\delta}}{\mu + \sqrt{4\delta + \mu^2}} \right) &\leq \frac{\mu}{\sqrt{4\delta - \mu^2}} \\ &\times \left(2\pi - \arctg \frac{\sqrt{4\delta - \mu^2}}{\mu + \sqrt{4\delta + \mu^2}} \right), \end{aligned}$$

т.е. при $\frac{1}{4} < \frac{\delta}{\mu^2} < 88.81$, решение уравнения (6) имеет вид (рис. 1, b)

$$\begin{aligned} e_+(\theta \leq 0) &= 1 - \exp(\lambda_1^+ \theta) \geq 0, \\ e_-(\theta \geq 0) &= -1 + \frac{2\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\delta}}{\sqrt{|\mu^2 - 4\delta|}} \exp\left(-\frac{\mu\theta}{2\delta}\right) \\ &\times \sin\left(\frac{\sqrt{|\mu^2 - 4\delta|}}{2\delta} \theta\right) + \exp\left(-\frac{\mu\theta}{2\delta}\right) \\ &\times \cos\left(\frac{\sqrt{|\mu^2 - 4\delta|}}{2\delta} \theta\right) \leq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь отрицательная часть волны $e = e(\theta)$ содержит затухающие колебания с частотой $p = \sqrt{|\mu^2 - 4\delta|}/2\delta$.

При $\mu^2 = 4\delta$ решение (8) имеет вид

$$\begin{aligned} e_+(\theta \leq 0) &= 1 - \exp\left(\frac{2(\sqrt{2} - 1)\theta}{\mu}\right) \geq 0, \\ e_-(\theta \geq 0) &= -1 + \left(1 + \frac{2(2 - \sqrt{2})\theta}{\mu} \right) \exp\left(-\frac{2\theta}{\mu}\right) \leq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Форма такой волны подобна изображенной на рис. 1, a.

Из-за неаналитичности разномодульной нелинейности уравнения (5), его решения для стационарных волн получились также неаналитическими: положительная и отрицательная части волны $e = e(\theta)$ описываются разными функциями $e_{\pm}(\theta)$, при этом в точке $\theta_0 = 0$ терпит разрыв третья производная $d^3 e_{\pm}(\theta_0)/d\theta^3$. Здесь, как и в среде с квадратичной упругой нелинейностью [14,16], устойчивость стационарных волн (7)–(9) обеспечивается балансом эффектов нелинейности, диссипации и дисперсии: разномодульная нелинейность увеличивает крутизну фронта, а диссипация и дисперсия стремятся ее уменьшить.

3. Самоподобные периодические волны и импульсные возмущения

Для нахождения автомодельных (или самоподобных) решений [7–10,16] уравнения (5) воспользуемся методом разделения переменных, полагая, что

$$e(z, \theta) = Z(z)\Psi(\theta), \quad Z(z=0) = 1, \quad Z(z) > 0. \quad (10)$$

Решение (10) описывает затухающую самоподобную волну, не меняющую своей формы $\Psi = \Psi(\theta)$ при распространении [7–10]. Примерами самоподобных волн являются рассмотренные выше стационарные волны и солитоны [14–16] в средах с квадратичной нелинейностью, линейной диссипацией и дисперсией соответственно и гармонические волны в линейных средах.

Подставляя (10) в (5), получаем

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{dZ(z)}{dz} = \frac{1}{\Psi(\theta)} \left(\delta \frac{d^3\Psi(\theta)}{d\theta^3} + \mu \frac{d^2\Psi(\theta)}{d\theta^2} - \frac{d|\Psi(\theta)|}{d\theta} \right) = -m, \quad (11)$$

где $m = \text{const}$. Из физических соображений — волна не должна быть нарастающей по координате $z > 0$, следует, что $m \geq 0$, при этом $Z(z) = \exp(-mz)$. Значение параметра зависит от δ и μ и определяется граничным условием для излучаемой самоподобной волны $e(z=0, \theta) = \Psi(\theta)$, удовлетворяющей линейным уравнениям для положительной $\Psi_+(\theta) \geq 0$ и отрицательной $\Psi_-(\theta) \leq 0$ частям функции $\Psi(\theta)$:

$$\delta \frac{d^3\Psi_{\pm}(\theta)}{d\theta^3} + \mu \frac{d^2\Psi_{\pm}(\theta)}{d\theta^2} \mp \frac{d\Psi_{\pm}(\theta)}{d\theta} + m\Psi_{\pm}(\theta) = 0. \quad (12)$$

Из уравнений (12) получаем характеристическое уравнение

$$\delta(\lambda^{\pm})^3 + \mu(\lambda^{\pm})^2 \mp (\lambda^{\pm}) + m = 0, \quad (13)$$

где характеристические числа λ^{\pm} соответствуют положительным $\Psi_+(\theta) \geq 0$ и отрицательным $\Psi_-(\theta) \leq 0$ частям функции $\Psi(\theta)$.

Корни $\lambda_{1,2,3}^{\pm}$ кубического уравнения (13) определяются формулой Кардано [17]:

$$\lambda_1^{\pm} = A_{\pm} + B_{\pm} - \frac{\mu}{3\delta},$$

$$\lambda_{2,3}^{\pm} = -\frac{A_{\pm} + B_{\pm}}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}(A_{\pm} - B_{\pm})}{2} - \frac{\mu}{3\delta},$$

где

$$A_{\pm} = \left(-\frac{q_{\pm}}{2} + \sqrt{Q_{\pm}} \right)^{1/3}, \quad B_{\pm} = \left(-\frac{q_{\pm}}{2} - \sqrt{Q_{\pm}} \right)^{1/3},$$

$$Q_{\pm} = \left(\frac{p_{\pm}}{3} \right)^3 + \left(\frac{p_{\pm}}{2} \right)^2,$$

$$p_{\pm} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\mu}{\delta} \right)^2 \mp \frac{1}{\delta}, \quad q_{\pm} = 2 \left(\frac{\mu}{3\delta} \right)^3 \pm \frac{\mu}{3\delta^2} + \frac{m}{\delta}. \quad (14)$$

В зависимости от параметров δ, μ и m , возможны различные варианты решений (14). В первом варианте: λ_1^+ — действительное число, а $\lambda_{1,2}^+$ — комплексно-сопряженные числа, и втором: все $\lambda_{1,2,3}^+$ — действительные числа. Такие же варианты имеют место и для корней $\lambda_{1,2,3}^-$. Таким образом, здесь возможны различные решения уравнения (12) как в виде периодических волн, так и импульсных возмущений. Эти решения определяются следующими выражениями:

$$\Psi_+(\theta) = A_1^+ \exp(\lambda_1^+ \theta) + A_2^+ \exp(\lambda_2^+ \theta) + A_3^+ \exp(\lambda_3^+ \theta) + c.c.,$$

$$\Psi_-(\theta) = A_1^- \exp(\lambda_1^- \theta) + A_2^- \exp(\lambda_2^- \theta) + A_3^- \exp(\lambda_3^- \theta) + c.c., \quad (15)$$

где коэффициенты $A_{1,2,3}^{\pm}$ и параметр m зависят от вида волны (периодической или импульсной); они находятся из условий непрерывности функций $\Psi_+(\theta) \geq 0$, $\Psi_-(\theta) \leq 0$ и их производных $d\Psi_{\pm}(\theta)/d\theta$, $d^2\Psi_{\pm}(\theta)/d\theta^2$ в точках $\theta = \theta_n$, в которых $\Psi_{\pm}(\theta_n) = 0$:

$$\Psi_+[n(\theta_1 + \theta_2)] = \Psi_-[n(\theta_1 + \theta_2)] = 0,$$

$$\Psi_+[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2] = \Psi_-[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2] = 0,$$

$$\frac{d\Psi_+[n(\theta_1 + \theta_2)]}{d\theta} = \frac{d\Psi_-[n(\theta_1 + \theta_2)]}{d\theta},$$

$$\frac{d\Psi_+[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]}{d\theta} = \frac{d\Psi_-[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]}{d\theta},$$

$$\frac{d^2\Psi_+[n(\theta_1 + \theta_2)]}{d\theta^2} = \frac{d^2\Psi_-[n(\theta_1 + \theta_2)]}{d\theta^2},$$

$$\frac{d^2\Psi_+[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]}{d\theta^2} = \frac{d^2\Psi_-[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]}{d\theta^2}, \quad (16)$$

где $\theta_{1,2}$ — длительности функций $\Psi_{\pm}(\theta)$, $\theta_1 + \theta_2$ — период функции $\Psi(\theta)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Уравнения (16) представляют собой систему из восьми уравнений с восемью неизвестными (один из коэффициентов $A_{1,2,3}^{\pm}$ для определенности, например A_1^+ , можно положить равным единице), так что коэффициенты $A_{2,3}^+$, $A_{1,2,3}^-$, $\theta_{1,2}$ и параметр m (при заданных δ и μ) определяются однозначно. В общем виде, однако, получить аналитические выражения для $A_{2,3}^+$, $A_{1,2,3}^-$, $\theta_{1,2}$ и m довольно сложно, поэтому далее мы рассмотрим несколько характерных частных случаев.

Если λ_1^{\pm} — действительные числа, а $\lambda_{2,3}^{\pm}$ — комплексно-сопряженные, то получим периодическую волну, при этом из (15) получаем выражения для $\Psi_{\pm}(\theta)$ в более удобном виде (для одного периода волны):

$$\Psi_+(\theta) = -\exp(\lambda_1^+ \theta) \sin \theta^+ + \exp(\text{Re } \lambda_2^+ \theta)$$

$$\times \sin(\text{Im } \lambda_2^+ \theta + \theta^+) \geq 0,$$

$$\Psi_-(\theta) = -C^- \exp(\lambda_1^- \theta) \sin \theta^- + C^- \exp(\text{Re } \lambda_2^- \theta)$$

$$\times \sin(\text{Im } \lambda_2^- \theta + \theta^-) \leq 0, \quad (17)$$

где C^- , θ^+ , θ^- и m определяются из условий (16).

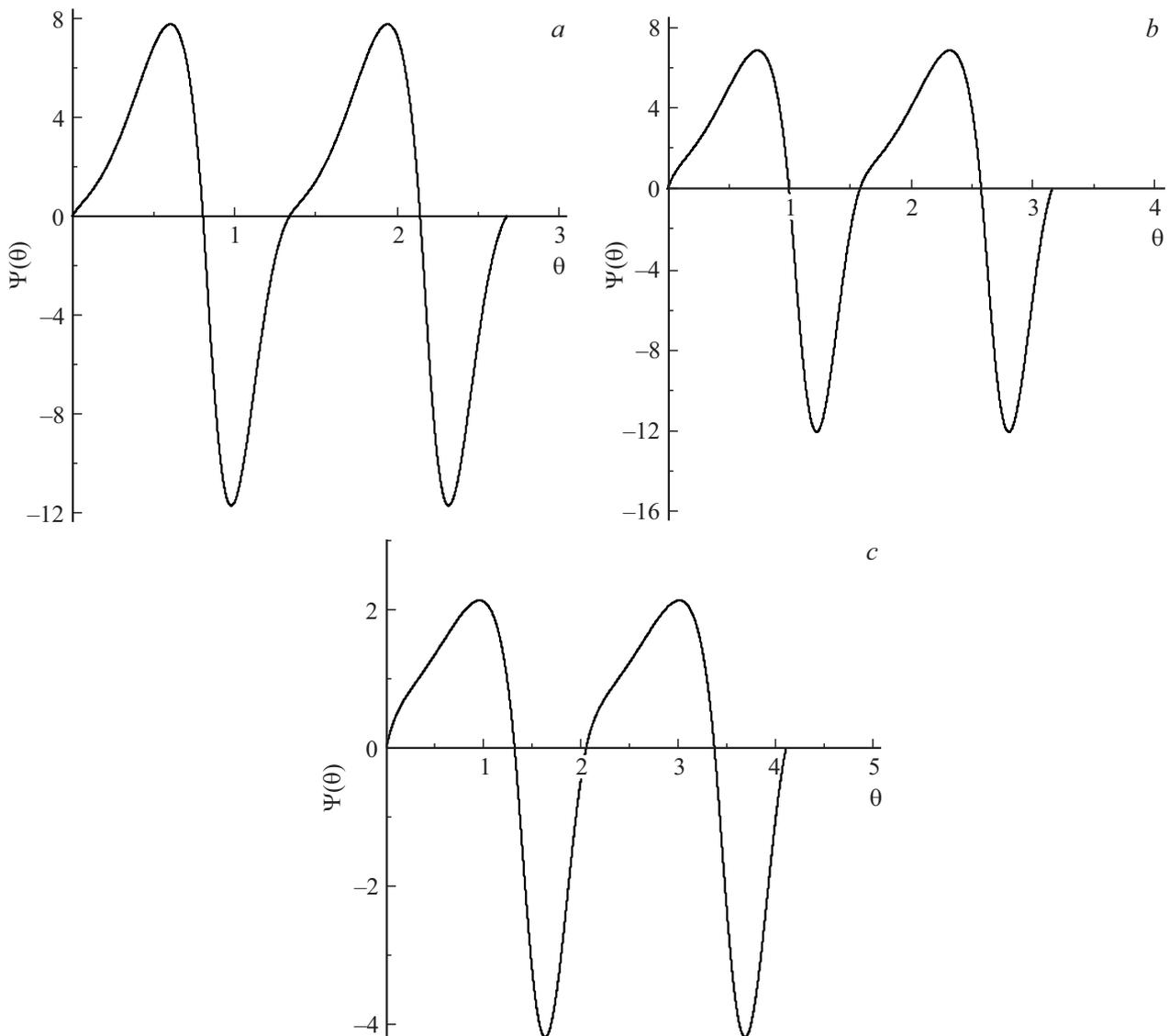


Рис. 2. Форма самоподобной периодической волны при $\delta = 0.005$, $\mu = 0.1$, $m = 4.168$, $\lambda_1^+ = -28.155$, $\lambda_{2,3}^+ = 4.078 \pm 3.603i$, $\lambda_1^- = -8.024$, $\lambda_{2,3}^- = -5.988 \pm 8.249i$, $C^- = -1.327$, $\eta^+ = 0.244$, $\eta^- = 3.425$, $\eta_1 = 0.804$, $\eta_2 = 0.533$ (a); при $\delta = 0.01$, $\mu = 0.1$, $m = 2.831$, $\lambda_1^+ = -16.906$, $\lambda_{2,3}^+ = 3.453 \pm 2.197i$, $\lambda_1^- = -3.691$, $\lambda_{2,3}^- = -3.154 \pm 8.171i$, $C^- = -2.611$, $\eta^+ = 0.952$, $\eta^- = 3.789$, $\eta_1 = 0.996$, $\eta_2 = 0.582$ (b); при $\delta = 0.02$, $\mu = 0.1$, $m = 1.627$, $\lambda_1^+ = -10.5$, $\lambda_{2,3}^+ = 2.75 \pm 0.431i$, $\lambda_1^- = -1.841$, $\lambda_{2,3}^- = -1.579 \pm 6.457i$, $C^- = -1.328$, $\theta^+ = 2.574$, $\theta^- = 3.846$, $\theta_1 = 1.316$, $\theta_2 = 0.736$ (c).

На рис. 2 приведены некоторые характерные формы самоподобных периодических волн, построенных при различных параметрах δ и μ .

При условии $\Psi_{\pm}(\theta \rightarrow \mp\infty) \rightarrow \pm 0$ получим самоподобные импульсные возмущения. В этом случае, если $\lambda_{1,2,3}^{\pm}$ действительные числа и $0 < \lambda_1^+ < \lambda_2^+$, то из выражений (15) имеем

$$\Psi^+(\theta \leq 0) = \exp(\lambda_1^+\theta) - \exp(\lambda_2^+\theta) \geq 0,$$

$$\Psi^-(\theta \geq 0) = C_1 \exp(\lambda_1^-\theta) + C_2 \exp(\lambda_2^-\theta) + C_3 \exp(\lambda_3^-\theta) \leq 0, \quad (18)$$

где

$$C_1 = \frac{(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+ - \lambda_3^- - \lambda_2^-)}{(\lambda_1^- - \lambda_2^-)(\lambda_1^- - \lambda_3^-)},$$

$$C_2 = \frac{(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+ - \lambda_3^- - \lambda_1^-)}{(\lambda_2^- - \lambda_1^-)(\lambda_2^- - \lambda_3^-)},$$

$$C_3 = \frac{(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)(\lambda_1^+ + \lambda_2^+ - \lambda_2^- - \lambda_1^-)}{(\lambda_3^- - \lambda_1^-)(\lambda_3^- - \lambda_2^-)}.$$

Форма импульсов (18) приведена на рис. 3, а.

Если же $\lambda_{1,2}^+ > 0$, $\lambda_1^- < 0$ — действительные числа, а $\lambda_{2,3}^-$ — комплексно-сопряженные, $\lambda_2^+ > \lambda_1^+$,

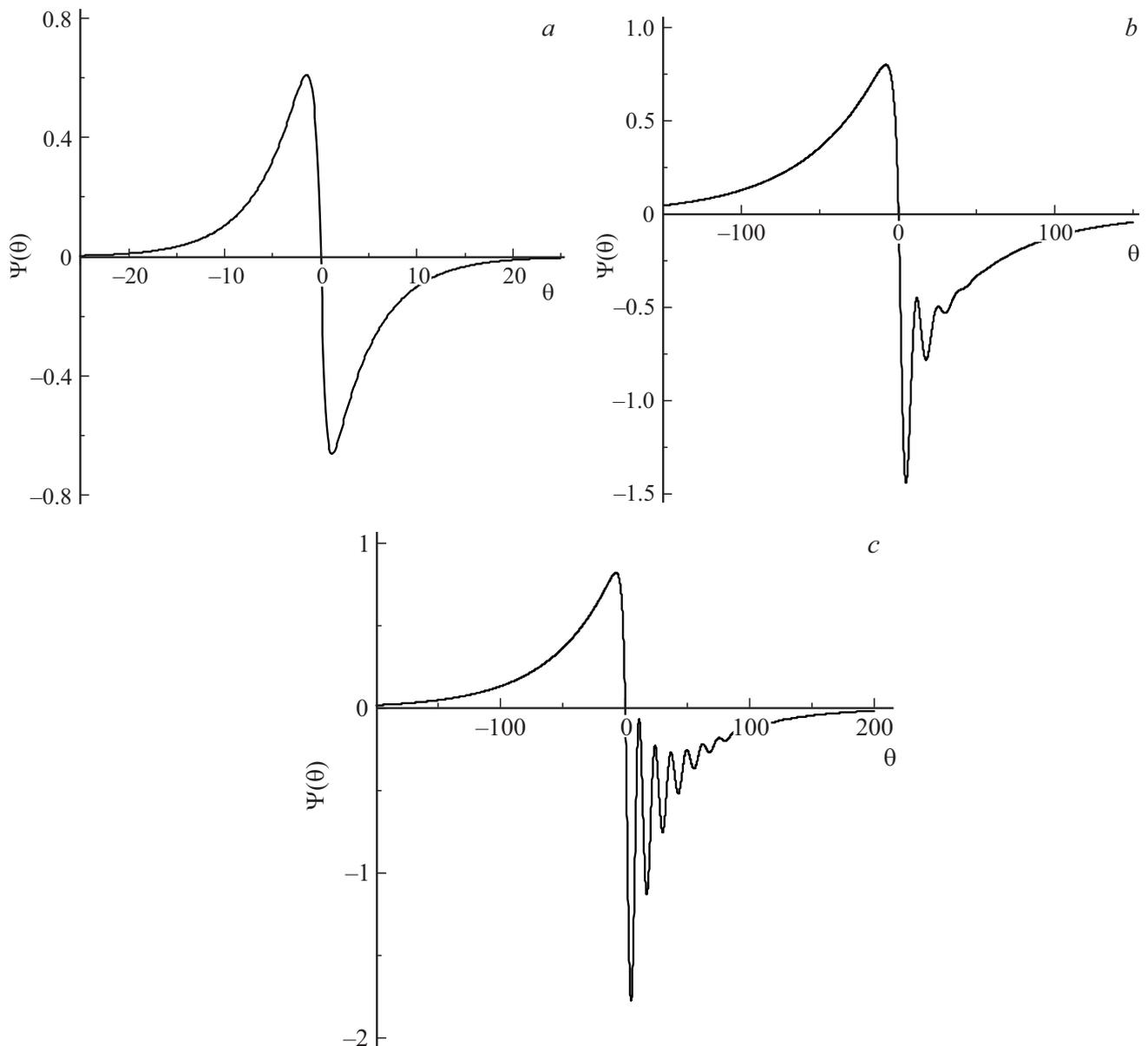


Рис. 3. Форма самоподобного импульса при $\delta = 0.05$, $\mu = 0.5$, $m = 0.2$, $\lambda_1^+ = 0.226$, $\lambda_2^+ = 1.507$, $\lambda_1^- = -0.225$, $\lambda_2^- = -2.421$, $\lambda_3^- = -7.355$, $C_1^- = -0.942$, $C_2^- = 1.101$, $C_3^- = -0.159$ (a); при $\delta = 4$, $\mu = 1$, $m = 0.02$, $\lambda_1^+ = 0.020$, $\lambda_2^+ = 0.377$, $\lambda_1^- = -0.020$, $\lambda_2^- = -0.115 + 0.482i$, $\lambda_3^- = -0.115 - 0.482i$, $C_1^- = -1.084$, $\theta^- = -1.029$ (b); при $\delta = 4$, $\mu = 0.5$, $m = 0.02$, $\lambda_1^+ = 0.020$, $\lambda_2^+ = 0.430$, $\lambda_1^- = -0.020$, $\lambda_2^- = -0.052 + 0.495i$, $\lambda_3^- = -0.052 - 0.495i$, $C_1^- = -1.200$, $\theta^- = -0.877$ (c).

$\text{Re } \lambda_2^- < \lambda_1^- < 0$, то из выражений (15) имеем

$$\Psi_+(\theta \leq 0) = \exp(\lambda_1^+ \theta) - \exp(\lambda_2^+ \theta) \geq 0,$$

$$\Psi_-(\theta \geq 0) = -C_1^- \exp(\lambda_1^- \theta) \sin(\theta^-) + C_1^- \exp(\text{Re } \lambda_2^- \theta) \times \sin(\text{Im } \lambda_2^- \theta + \theta^-) \leq 0, \quad (19)$$

где C_1^- и θ^- также находятся из условий непрерывности функций $\Psi_+(\theta) \geq 0$ и $\Psi_-(\theta) \leq 0$ и их производных $d\Psi_{\pm}(\theta)/d\theta$, $d^2\Psi_{\pm}(\theta)/d\theta^2$ в точке $\theta = 0$, в которой $\Psi_{\pm}(\theta = 0) = 0$.

Форма таких импульсов показана на рис. 3. Здесь, как и в стационарной волне, отрицательная часть $\Psi_-(\theta) \leq 0$

импульсных возмущений содержит затухающие колебания.

Из рис. 2 и 3 видно, что в зависимости от параметров δ , μ , и m формы самоподобных периодических волн и импульсных возмущений довольно разнообразны, при этом профили, амплитуды и длительности положительной и отрицательной частей для каждой такой волны различны. Отметим, что при возбуждении и распространении в разномодульной среде с диссипацией (или дисперсией) первоначально гармонической волны или одиночных разнополярных импульсов, их формы (по мере распространения) будут асимптотически приближаться

к формам описанных в настоящей работе самоподобных периодических волн и импульсных возмущений [7–10].

Заключение

Исследовано распространение продольных упругих волн в стержне с разномодульной нелинейностью, линейной диссипацией и геометрической дисперсией фазовой скорости. Показано, что волны в таком стержне описываются уравнением, аналогичным уравнению Кортевега-де Вриза–Бюргерса, для среды с квадратичной нелинейностью [14,16]. Получены точные аналитические и численные решения для профилей разнополярных стационарных волн и самоподобных периодических волн и импульсных возмущений, распространяющихся с затуханием, но без изменения формы. Результаты проведенных исследований представляют интерес для развития теории волновых процессов в средах с неаналитической нелинейностью; они также могут быть использованы и для создания нелинейных методов акустической диагностики структурно-неоднородных сред и конструкционных материалов, содержащих трещины. Основой таких методов является выявление закономерностей нелинейных процессов распространения и взаимодействия первичных гармонических волн и эффектов генерации вторичных волн на комбинационных частотах, отсутствующих в спектре первичных волн.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПФ РАН по теме № 0035-2019-0009.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 359 с.
- [2] Николаев А.В. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979. № 1. С. 72–77.
- [3] Benveniste Y. // Intern. J. Engineer. Sci. 1980. Vol. 18. N 6. P. 815–827.
- [4] Маслов В.П., Мосолов П.П. // ПМТФ. 1985. Т. 49. № 3. С. 419–437.
- [5] Назаров В.Е., Островский Л.А. // Акуст. журн. 1990. Т. 36. № 1. С. 106–110.
- [6] Gavrilov S.N., Herman G.C. // J. Sound and Vibration. 2012. Vol. 331. P. 4464–4480.
- [7] Radostin A.V., Nazarov V.E., Kiyashko S.B. // Wave Motion. 2013. Vol. 50. N 2. P. 191–196.
- [8] Назаров В.Е., Кияшко С.В., Радостин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58. № 2. С. 134–141.
- [9] Назаров В.Е., Кияшко С.В., Радостин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2015. Т. 58. № 10. С. 811–820.
- [10] Назаров В.Е., Кияшко С.В., Радостин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. № 3. С. 275–285.
- [11] Rudenko O.V. // Modular Solitons. Doklady Mathematics. 2016. Vol. 94. P. 708–711.
- [12] Nazarov V.E., Kiyashko S.B., Radostin A.V. // Wave Motion. 2017. Vol. 75. P. 72–76.
- [13] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
- [14] Наугольных К.А., Островский Л.А. Нелинейные процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 240 с.
- [15] Порубов А.В. Локализация нелинейных волн деформации. М.: Физматлит, 2009. 208 с.
- [16] Руденко О.В., Согуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
- [17] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.