01

Динамический хаос в нелинейной системе с $1/f$-спектром

© *В.П. Коверда, В.Н. Скоков*

Институт теплофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
E-mail: koverda@itp.uran.ru

Поступило в Редакцию 19 июня 2019 г.
В окончательной редакции 5 августа 2019 г.
Принято к публикации 7 августа 2019 г.

В системе двух нелинейных дифференциальных уравнений, предложенной для объяснения физической природы $1/f$-спектров, обнаружена хаотизация траекторий при периодическом внешнем воздействии на одно из уравнений. Внешнее шумовое воздействие приводит к стохастическому резонансу и низкочастотному $1/f$-поведению спектров мощности. Стохастический резонанс и $1/f$-поведение спектров соответствуют максимуму информационной энтропии, что свидетельствует об устойчивости случайного процесса.

Ключевые слова: взаимодействующие фазовые переходы, динамический хаос, спектр мощности, $1/f$-шум, стохастический резонанс, максимум энтропии.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.22.48649.17936

Протекание и взаимодействие фазовых переходов в сложной неравновесной системе при наличии внешнего случайного и детерминированного воздействия могут сопровождаться возникновением больших флуктуаций с $1/f$-поведением спектров мощности, степенными распределениями амплитуд [1–4], стохастическим резонансным откликом [5]. Неугасающий интерес к флуктуациям с $1/f$-спектром мощности обусловлен их широким распространением, включая колебания напряжения и тока в вакуумных приборах или транзисторах [2–4], флуктуации астрофизических магнитных полей [6], пульсации турбулентных потоков [7,8], флуктуации в биологических системах [9]. Флуктуации с $1/f$-спектром мощности были экспериментально обнаружены в теплофизических системах с интенсивными фазовыми переходами [10]. Это дало возможность получать экспериментальные данные о статистических характеристиках случайного процесса, что важно для анализа физической природы происхождения $1/f$-шума.

При теоретическом описании экстремальные флуктуации с $1/f$- и $1/f^2$-спектром, которые могут возникать при взаимодействующих фазовых переходах, моделируются системой нелинейных стохастических уравнений [11]:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi\psi^2 + \psi + \xi_1(t),$$
$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi\varphi^2 + 2\varphi + \xi_2(t), \tag{1}$$

где φ и ψ — динамические переменные (параметры порядка), ξ_1 и ξ_2 — шумы с нормальным распределением, $\langle\xi_k(t)\rangle = 0$, $\langle\xi_k(t)\xi_l(t')\rangle = \sigma^2\delta_{k,l}\delta(t-t')$, $k, l = 1, 2$. Второе уравнение системы (1) является управляющим, первое — подчиненным [12]. При критической интенсивности шума в системе происходит индуцированный шумом переход, и частотные зависимости спектров мощности переменных ψ и φ соответственно принимают вид $S_\psi \sim 1/f^2$ и $S_\varphi \sim 1/f$. С использованием принципа максимума энтропии было показано, что это состояние системы (1) является устойчивым [12,13]. Стохастическая переменная ψ подчиняется классической статистике: гауссовский „хвост“ распределения позволяет вычислить энтропию Гиббса–Шеннона для определения устойчивости процесса. Стохастическая переменная φ не подчиняется классической статистике: имеет степенную релаксацию, степенной „хвост“ распределения и поэтому не позволяет использовать энтропию Гиббса–Шеннона из-за расходимости при вычислении интеграла. Благодаря тому что стохастические переменные φ и ψ объединены в систему уравнений (1), ее решение позволяет получать достоверные сведения для неклассической стохастической переменной φ, а устойчивость случайного процесса оценивать по классическому поведению переменной ψ, определяемой управляющим уравнением системы (1).

При дополнительном воздействии периодического сигнала на нелинейную систему (1) наблюдается стохастический резонанс, при котором отклик нелинейной системы на детерминированное воздействие усиливается при добавлении шумового сигнала [5]. В [14] исследован стохастический резонанс при добавлении членов, учитывающих воздействие периодической силы, в оба уравнения системы (1). В отсутствие шума фазовые траектории представляли собой циклы, которые в зависимости от амплитуды и частоты внешнего воздействия либо располагались внутри одной из долин потенциального рельефа, либо охватывали обе долины. В первом случае циклы были несимметричны относительно начала координат фазовой плоскости, во втором — симметричны. При определенных значениях амплитуды и частоты внешней периодической силы наблюдались неравновесные фазовые переходы от несимметричных циклов к центрально-симметричным. При добавлении внешнего шума при низких частотах наблюдался стохастический резонансный отклик. При низких частотах гармонического воздействия с повышением интенсивности белого

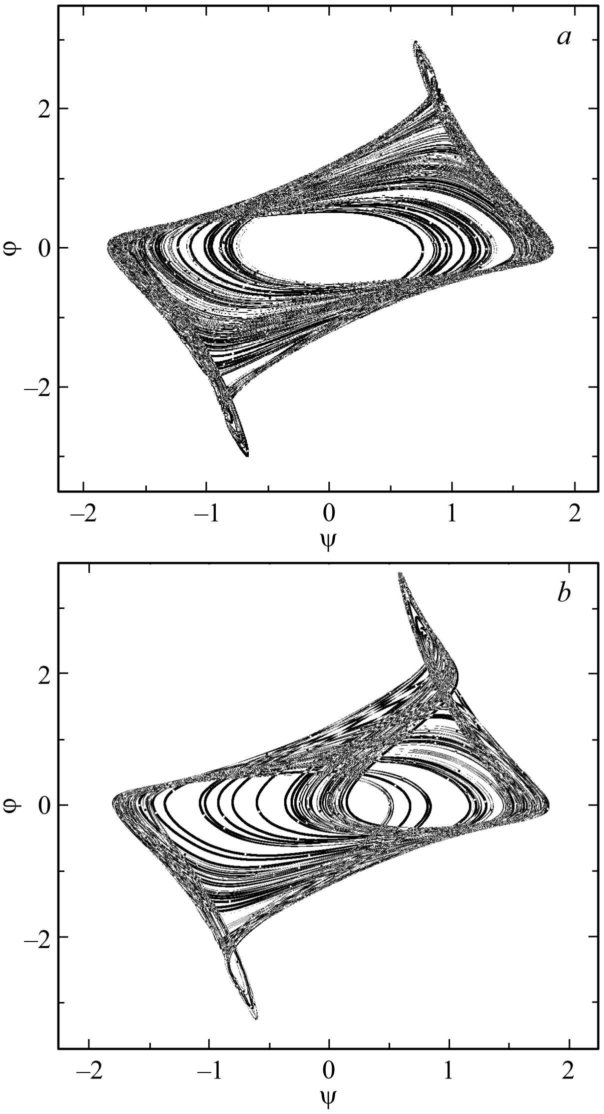

Рис. 1. Фазовые диаграммы системы в плоскости динамических переменных ψ и φ, соответствующие хаотическому режиму. a — фазовая траектория в отсутствие внешнего шума; b — фазовая траектория при дополнительном воздействии шума с амплитудой $\sigma = 0.025$. Амплитуда периодического сигнала $A = 2.15$, частота $f_0 = 0.123$.

шума наблюдается анизотропный стохастический резонанс, при котором движение системы ограничивается двумя взаимно перпендикулярными направлениями.

В настоящей работе рассмотрен случай, когда член, учитывающий периодическое воздействие с частотой f_0 и амплитудой A, добавлен только в первое уравнение системы (1). Динамика результирующего процесса в этом случае описывается уравнениями

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi\psi^2 + \psi + \xi_1(t) + A\sin(2\pi f_0 t),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = -\psi\varphi^2 + 2\varphi + \xi_2(t). \qquad (2)$$

Система (2) решалась численным методом. В отсутствие шума ($\xi_1 = \xi_2 = 0$) найдены хаотические режимы с образованием странного аттрактора. Возможность возникновения хаоса в системе двух нелинейных дифференциальных уравнений связана с неавтономностью системы (2) (наличием явной зависимости от времени в правой части первого уравнения). Была определена область управляющих параметров A и f_0, при которых наблюдалась хаотизация траекторий. Эта область была достаточно узкой: амплитуда A находилась в интервале от 2.10 до 3.0, а частота f_0 — в интервале от 0.7 до 0.14. На рис. 1, a приведены фазовые траектории системы (2) в плоскости динамических переменных ψ и φ, соответствующие хаотическому режиму при значениях $A = 2.15$ и $f_0 = 0.123$. Фазовые траектории, приведенные на данном рисунке, типичны для состояния динамического хаоса и имеют вид странного аттрактора [15,16]. Переход к хаосу от регулярных циклов при изменении управляющего параметра (f_0 или A) происходил через удвоение периода. На рис. 2, a приведен спектр мощности S_φ переменной φ в отсутствие внешнего шума. Вид спектра свидетельствует о хаотической динамике.

При включении небольшого внешнего шума ($\sigma < 0.06$) хаотическое поведение системы сохранялось. На рис. 1, b показана фазовая траектория системы при дополнительном воздействии шума с амплитудой $\sigma = 0.025$ на оба уравнения системы (2), а на рис. 2, b приведен соответствующий спектр мощности. При воздействии шума наблюдалось низкочастотное $1/f$-поведение спектров мощности (штриховая линия на рис. 2, b).

Воздействие шума приводило к стохастическому резонансному отклику, проявляющемуся в увеличении амплитуды колебаний переменной φ, и соответственно увеличению пика спектральной плотности переменной на частоте f_0. Так, при амплитуде периодической силы $A = 2.15$ и частоте $f_0 = 0.123$ максимум пика спектральной плотности $S^*(\sigma)$ наблюдался при шуме с амплитудой $\sigma = 0.025$. Увеличение пика спектральной плотности при таком шуме по сравнению с бесшумовым поведением составляло около 40%. Следует отметить, что максимум на зависимости $S^*(\sigma)$ наблюдался при тех же интенсивностях шума, что и переход к низкочастотному $1/f$-поведению спектра мощности.

Из численных решений системы (2) были определены функции плотности вероятности распределений переменных $P(\psi)$ и $P(\varphi)$. Плотность вероятности $P(\psi)$ спадает при возрастании аргумента экспоненциально, как и для гауссовского распределения. Функция плотности вероятности распределения $P(\varphi)$ спадает при больших значениях φ по степенному закону. Энергия флуктуационных процессов определяется квадратом флуктуирующей переменной. На рис. 3, a приведена плотность вероятности $P(\varphi^2)$ распределения квадрата переменной φ в логарифмических координатах при шуме с амплитудой $\sigma = 0.025$, на рис. 3, b показана плотность вероятности $P(\varphi^2)$ в обычных координатах. Из рис. 3, a

видно, что зависимость $P(\varphi^2)$ в диапазоне почти трех порядков величины обратно пропорциональна аргументу: $P(\varphi^2) \sim 1/\varphi^2$.

Гауссовское распределение „хвостов“ переменной $\psi(t)$ дает основание пользоваться обычными формулами статистической механики. В частности, устойчивость процесса будет определяться максимумом информационной энтропии Гиббса–Шеннона [17]:

$$H = -\sum_n P_n \log(P_n),$$

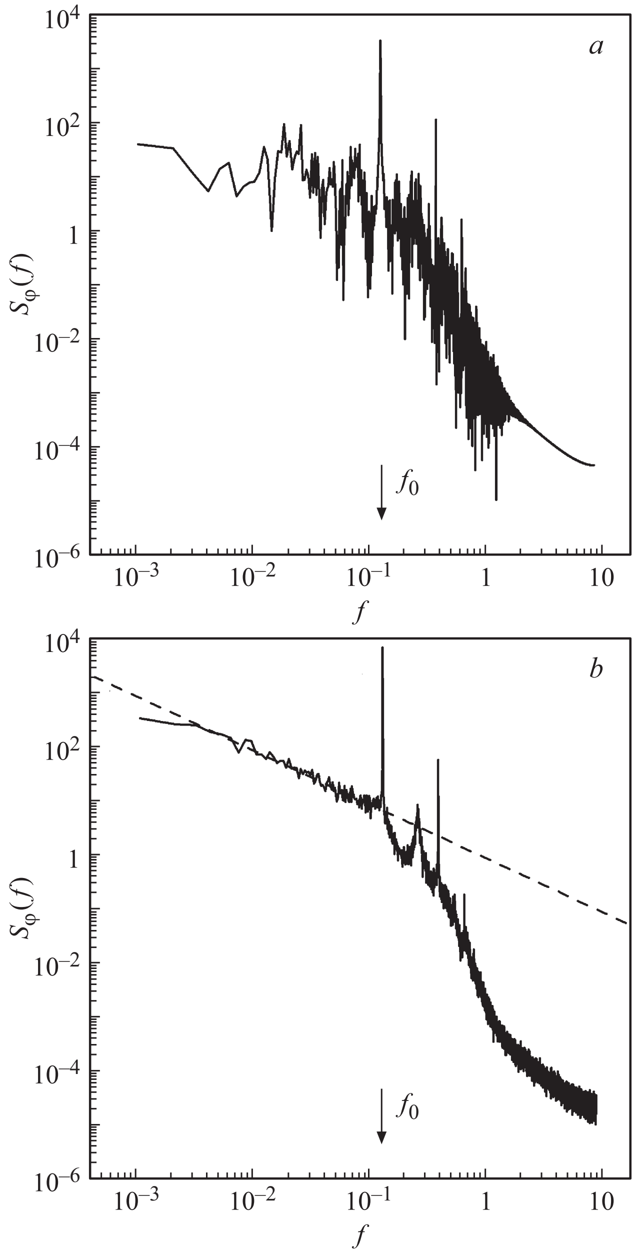

Рис. 2. Спектр мощности $S_\varphi(f)$ переменной φ. a — спектр хаотического режима в отсутствие внешнего шума; b — спектр при дополнительном воздействии шума с амплитудой $\sigma = 0.025$, штриховая линия соответствует зависимости $\sim 1/f$. Амплитуда периодического сигнала $A = 2.15$, частота $f_0 = 0.123$.

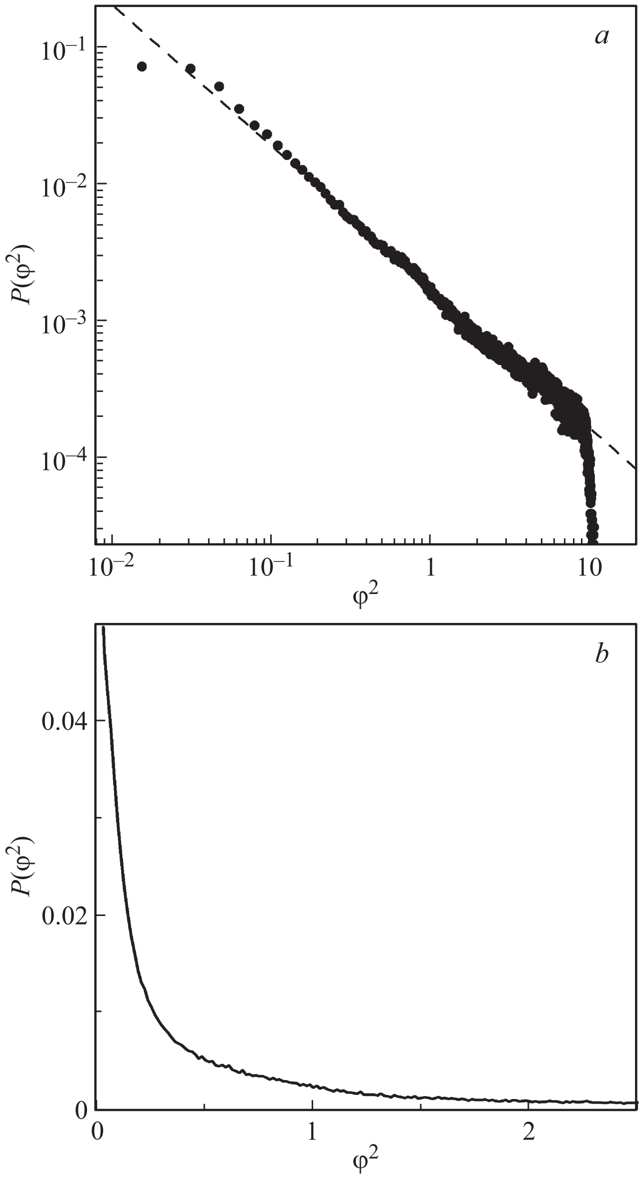

Рис. 3. Плотность вероятности распределения $P(\varphi^2)$ при дополнительном шуме с амплитудой $\sigma = 0.025$. a — зависимость $P(\varphi^2)$ в логарифмических координатах, штриховая линия соответствует зависимости $\sim 1/\varphi^2$; b — зависимость $P(\varphi^2)$ в обычных координатах.

где P_n — нормированная функция плотности вероятности процесса, индекс n относится к последовательности разбиения аргумента. Расчет энтропии Гиббса–Шеннона H_ψ для распределения $P(\psi^2)$ показал, что стохастическому резонансу и $1/f$-поведению спектра мощности переменной φ соответствует максимум информационной энтропии H_ψ^*. Положение максимума спектра S_φ^* при стохастическом резонансе совпадает с положением максимума энтропии H_ψ^*, при этом наблюдается низкочастотный $1/f$-шум.

Таким образом, при периодическом воздействии на систему, описывающую взаимодействующие фазовые переходы, обнаружена хаотизация траекторий с образованием странного аттрактора. При шумовом воздействии наблюдается стохастический резонанс при сохранении хаотической динамики. Полученные результаты важны для объяснения физической природы $1/f$-спектров.

Финансирование работы

Работа выполнена при частичной поддержке Комплексной программы УрО РАН (проект № 18-2-2-3) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00091-а).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995. 624 с.
[2] *Коган Ш.М.* // УФН. 1985. Т. 145. № 2. С. 285–328.
[3] *Dutta P., Horn P.M.* // Rev. Mod. Phys. 1981. V. 53. P. 497–516.
[4] *Weissman M.B.* // Rev. Mod. Phys. 1988. V. 60. P. 537–571.
[5] *Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л.* // УФН. 1999. Т. 169. № 1. С. 7–39.
[6] *Matthaeus W.H., Goldstein M.L.* // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 495–498.
[7] *Колмогоров А.Н.* // ДАН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303.
[8] *Pereira M., Gissinger C., Fauve S.* // Phys. Rev. E. 2019. V. 99. P. 023106.
[9] *Gilden D.L., Thornton T., Mallon M.W.* // Science. 1995. V. 267. P. 1837–1839.
[10] *Skokov V.N., Koverda V.H., Reshetnikov A.V., Skripov V.P., Mazheiko N.A., Vinogradov A.V.* // Int. J. Heat Mass Transfer. 2003. V. 46. P. 1879–1883.
[11] *Koverda V.P., Skokov V.N.* // Physica A. 2005. V. 346. P. 203–216.
[12] *Koverda V.P., Skokov V.N.* // Physica A. 2012. V. 391. P. 21–28.
[13] *Коверда В.П., Скоков В.Н.* // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45. В. 9. С. 19–22.
[14] *Скоков В.Н., Коверда В.П.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. В. 5. С. 9–13.
[15] *Шустер Г.* Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
[16] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И.* // УФН. 2005. Т. 48. № 2. С. 151–166.
[17] *Башкиров А.Г.* // ТМФ. 2006. Т. 149. № 2. С. 299–317.