

01

Механизмы отражения и преломления пучка заряженных частиц в рассеивающей среде

© В.Г. Куракин,¹ П.В. Куракин²

¹ Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,
119991 Москва, Россия

² Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
117997 Москва, Россия
e-mail: vgkurakin@mail.ru; erich.honec@gmail.com

Поступило в Редакцию 11 февраля 2018 г.

В окончательной редакции 11 февраля 2018 г.

Принято к публикации 23 мая 2019 г.

Предложена модель описания процессов отражения и преломления на наклонной границе раздела рассеивающей среды и вакуума для движущегося заряда, пересекающего эту границу. Для построения математической модели использована функция распределения для заряженной частицы, испытывающей многократное кулоновское рассеяние в неограниченной среде. Приведены результаты численных расчетов для угла преломления и коэффициента отражения.

Ключевые слова: многократное кулоновское рассеяние, функция распределения, линия тока, трубка тока.

DOI: 10.21883/JTF.2019.12.48480.60-18

Функция распределения, зависящая от координат и направления движения рассеянной заряженной частицы и характеристик среды, наиболее полно описывает стохастический процесс многократного кулоновского рассеяния на ядрах [1,2]. Она позволяет определить конфигурацию и распределение зарядов внутри фазового объема рассеиваемого потока частиц, что необходимо для принятого в электронной оптике метода описания коллективного движения, и вычислить необходимые интегральные характеристики. При кулоновском рассеянии на малые углы в предположении постоянства энергии рассеиваемой частицы, несущей элементарный заряд, имеет место следующая формула для распределения вероятностей: $P(x, y, \theta)dyd\theta$ для каждой из двух координатных плоскостей, пересекающихся по оси x , совпадающей с направлением движения частицы:

$$P(x, y, \theta)dyd\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\Theta_s^2 x^2} \times \exp\left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left(\theta^2 - \frac{3y\theta}{x} + \frac{3y^2}{x^2}\right)\right] dyd\theta. \quad (1)$$

Здесь $P(x, y, \theta)dyd\theta$ — вероятность обнаружить частицу с продольной координатой x в интервалах $(y, y + dy)$, $(\theta, \theta + d\theta)$ поперечного смещения и угла, составляемого движущейся частицей с осью x , а величину Θ_s , удобно выразить через параметры, описывающие радиационные процессы в веществе

$$\Theta_s^2 = \left(\frac{E_s}{\beta c p}\right)^2 \frac{1}{X_0}, \quad E_s = \left(\frac{4\pi}{\alpha}\right)^{1/2} m_e c^2 = 21 \text{ MeV}, \quad (2)$$

где β , p , c — соответственно приведенная скорость заряда, его импульс и скорость света, X_0 — радиационная

длина, $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры, e , m_e — заряд электрона и его масса, \hbar — постоянная Планка. Функция (1) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\theta \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\Theta_s^2}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \quad (3)$$

для неограниченной рассеивающей среды для частицы с элементарным зарядом, начинающей движение из начала координат в направлении оси x [1]. Если в направлении движения заряда рассеивающая среда граничит с вакуумом, причем граница раздела перпендикулярна оси x , то внутри среды имеет место распределение (1), а за ее пределами вероятность обнаружить заряд с указанными характеристиками описывается соотношением

$$P(\xi, \eta, \theta)dyd\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\Theta_s^2 h} \times \exp\left[-\frac{4}{\Theta_s^2 h} (\theta^2(1 - 3\xi + 3\xi^2) - 3\theta\eta(2\xi - 1) + 3\eta^2)\right] d\eta d\theta. \quad (4)$$

Формула (1) описывает двумерное гауссово распределение заряда на глубине x рассеивающей среды по поперечной координате y и углу $\theta = p_y/p$, равному отношению поперечного импульса p_y к полному импульсу частицы. Введены безразмерные величины $\eta = y/h$, $x = h\xi$, $\xi > 1$. Формула (4) получена из (1) подстановкой $y \rightarrow y - \theta(x - h)$, $x \geq h$ поскольку за пределами рассеивающей среды заряд распространяется свободно. Здесь h — расстояние от начала координат, из которого стартует заряд, до границы рассеивающей среды.

Если граница раздела рассеивающей среды и вакуума не перпендикулярна начальному вектору скорости

рассеиваемой частицы, то для нахождения искомого распределения вероятностей необходимо решать уравнение (3) для соответствующей области, и данная задача не представляется простой. Мы проследим за изменением усредненных характеристик процесса рассеяния на границе раздела, дополнив основную формулу (1) наглядным описанием указанного процесса, которое следует из данной формулы, и обсудим корректность такого подхода.

Проинтегрировав (1) по всем углам, получим функцию распределения по поперечной координате

$$S(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s x^{3/2}} \exp\left(-\frac{3y^2}{\Theta_s^2 x^3}\right), \quad (5)$$

из которой, в свою очередь, следует, что вероятность обнаружить рассеиваемый заряд в интервале смещений $(0, y)$ определяется выражением

$$W(y) = \int_0^y S(x, \xi) d\xi = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Theta_s x^{3/2}} \times \int_0^y \exp\left(-\frac{3\xi^2}{\Theta_s^2 x^3}\right) d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}y}{\Theta_s x^{3/2}}} \exp(t^2) dt. \quad (6)$$

Данная вероятность постоянна на кривой, описываемой соотношением

$$y = \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \Theta_s x^{3/2}, \quad (7)$$

где

$$\kappa = \text{erf}^{-1}(2W). \quad (8)$$

Здесь $\text{erf}0$ и $\text{erf}^{-1}0$ — интеграл ошибок и обратная к нему функция

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\xi^2) d\xi. \quad (9)$$

Далее, среднее значение для угла рассеяния для заряда на расстоянии y от оси выражается, как это следует из функции распределения (1) и соотношения

$$\theta^2 - \frac{3y\theta}{x} + \frac{3y^2}{x^2} = \left(\theta - \frac{3}{2} \frac{y}{x}\right)^2 + \frac{3}{4} \frac{y^2}{x^2}, \quad (10)$$

формулой

$$\langle \theta \rangle(y, x) = \frac{3}{2} \frac{y}{x}. \quad (11)$$

К последнему выражению можно придти и непосредственным вычислением среднего по формуле

$$\langle \theta \rangle(y, x) = \frac{\int \theta P(x, y, \theta) d\theta}{\int P(x, y, \theta) d\theta}. \quad (12)$$

С другой стороны, как это следует из формулы (7), тангенс угла наклона касательной к кривой равной

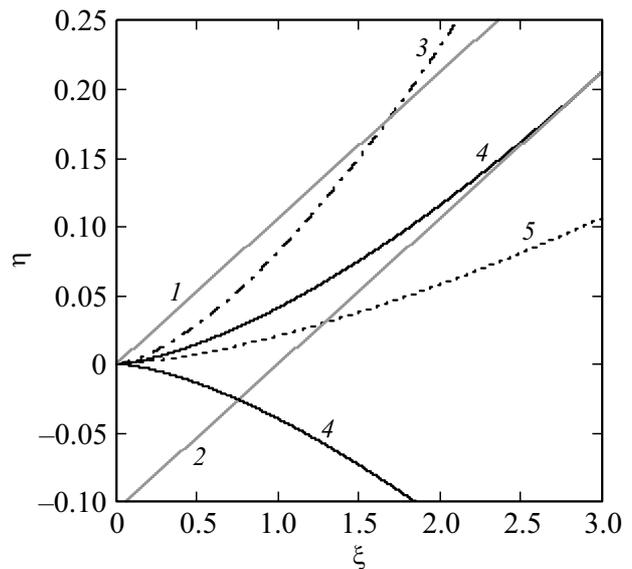


Рис. 1. Линии тока в рассеивающей среде: 1, 2 — линии, описывающие фронтальную и тыльную границы рассеивающей среды $x = ky$, $x = h + ky$, 3 — линия тока, соответствующая полному отражению, 4 — линия тока, касательная к границе раздела (показана также симметричная ей линия, соответствующая отрицательным значениям поперечного смещения), 5 — линия тока, пересекающая границу раздела. $\Theta_s^2 = 0.1 \text{ cm}^{-1}$, $h = 1 \text{ mm}$.

вероятности (12), равный при малых углах самому углу, определяется соотношением

$$\text{tg}(y) = \frac{dy(W)}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\kappa}{\sqrt{3}} \Theta_s x^{1/2} = \frac{3}{2} \frac{y(W)}{x}. \quad (13)$$

Таким образом, направление среднего угла рассеяния в любой точке неограниченной среды совпадает с направлением кривой равной вероятности в данной точке. По этой причине движение рассеянных зарядов можно интерпретировать как ламинарный поток условной жидкости, а характерные линии распределения вероятностей как линии тока. Можно также говорить о трубках тока, ширина которых изменяется от нуля в месте вхождения заряда в рассеивающую среду до значения

$$dy = \frac{1}{\sqrt{3}} \Theta_s x^{3/2} d\kappa \quad (14)$$

на глубине x рассеивающей среды.

Обратимся к рис. 1, на котором изображены введенные выше линии тока, описывающие процесс рассеяния движущегося заряда в неограниченной среде. Проведем мысленно прямую линию на некотором расстоянии от точки старта заряда в направлении его первоначальной скорости, описываемую уравнением $x = h + ky$. Имеют место три случая: линии тока и прямая пересекаются в одной или двух точках; не пересекаются совсем в полуплоскости $x > 0$; касаются. Если теперь представить, что прямая представляет собой границу рассеивающей

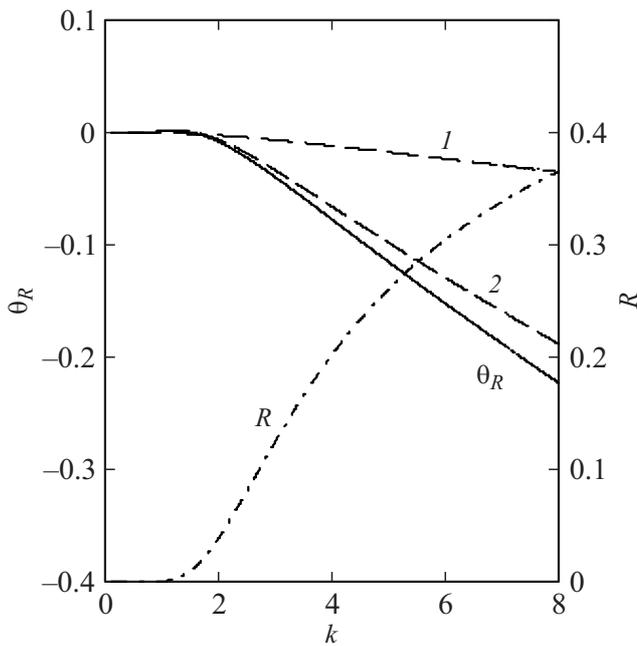


Рис. 2. Угол преломления θ_R и коэффициент отражения R на границе раздела рассеивающей среды (Al) для электронного пучка с энергией 5 MeV, $h = 200 \mu\text{m}$ в зависимости от наклона границы раздела (k). 1 — составляющая угла преломления, обусловленная преломлением отдельных линий тока, 2 — составляющая среднего угла рассеяния, обусловленная обеднением периферийной части пучка.

среды и вакуума, то картина распределения линий тока изменится как в рассеивающей среде, так и за ее пределами. Линии тока, не пересекающие границу раздела, останутся неизменными. Часть линий тока исчезнет за линией тока, касательной к границе раздела.

Действительно, как легко видеть, в неограниченной среде плоскость выше линии тока, касательной к границе раздела, заполнена линиями тока, пересекающими границу раздела второй раз, и при отсутствии рассеивающей среды за границей раздела эти линии тока становятся прямыми. Эти прямые линии испытывают преломление на границе раздела, если за линию тока в вакууме, как и в рассеивающей среде, принимать кривую, касательная к которой совпадает со средним углом рассеяния. Действительно, часть зарядов рассеивается в интервале углов $(\pi/2 - \text{arctg}(k), \pi/2)$, остается в среде и не вносит вклад в среднее направление движения частиц, вылетевших из рассеивающей среды в вакуум, которое по этой причине изменяется, прижимаясь к горизонтальной оси. Заряды, рассеиваемые в интервале отмеченных выше углов и продолжающие движение в среде, своим усредненным движением образуют новые линии тока.

Перейдем к количественному описанию указанных процессов на границе раздела. Линии тока, не пересекающие границу раздела, сначала приближаются к последней, а затем удаляются от нее. В этом смысле

можно говорить о полном отражении части потока, хотя это чисто кинематический эффект. Линия тока, отделяющая заряды, испытывающие полное отражение, и заряды, пересекающие эту границу, представляет собой касательную к границе раздела и описывается уравнением (7) со значением κ :

$$\kappa = \frac{2}{3} \frac{1}{\Theta_s \sqrt{hk}}. \tag{15}$$

Данное значение определяется совместным решением уравнений $x = h + ky$ и $y = Ax^{3/2}$, описывающих границу раздела и граничную линию тока вместе с условием касания $Ak\sqrt{x} = 2/3$.

Вычисления по формуле (12) для среднего угла прошедших через границу раздела частиц — угла преломления для линии тока дают

$$\langle \theta \rangle_p = \frac{3}{2} \frac{y}{x} + \delta, \tag{16}$$

где

$$\delta = \frac{\Theta_s \sqrt{x}}{4\sqrt{\pi}\Delta} \left[\exp \left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left(\frac{\pi}{2} + \text{arctg}(k) + \frac{3}{2} \frac{y}{x} \right)^2 \right] - \exp \left[-\frac{4}{\Theta_s^2 x} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(k) - \frac{3}{2} \frac{y}{x} \right)^2 \right] \right], \tag{17}$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \text{erf} \left[\frac{2}{\Theta_s \sqrt{x}} \left(\frac{\pi}{2} + \text{arctg}(k) + \frac{3}{2} \frac{y}{x} \right) \right] + \frac{1}{2} \text{erf} \left[\frac{2}{\Theta_s \sqrt{x}} \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(k) - \frac{3}{2} \frac{y}{x} \right) \right]. \tag{18}$$

Здесь Δ — относительное число вылетевших за границу рассеивающей среды частиц для конкретной линии тока.

Последние формулы количественно иллюстрируют эффект преломления линий тока на выходе из рассеивающей среды. Для вычисления среднего угла движения рассеянного пучка воспользуемся стандартной формулой статистики. Из функции распределения следует распределение рассеянных частиц по трубкам дрейфа

$$S(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-\kappa^2) d\kappa, \tag{19}$$

откуда

$$\langle \theta \rangle = \frac{\int \langle \theta \rangle_p(\kappa) \Delta(\kappa) \exp(-\kappa^2) d\kappa}{\int \Delta(\kappa) \exp(-\kappa^2) d\kappa}. \tag{20}$$

Интегралы в (20) берутся в пределах от $-\infty$ до значения, определяемого (15).

На рис. 2 изображена зависимость среднего угла рассеяния от угла наклона границы рассеивающей среды и вакуума, полученная в результате численного интегрирования по формуле (20) для каждого слагаемого в выражении (16). Как следует из графика, основной вклад в эффект преломления определяет интеграл от первого слагаемого в указанной формуле для угла рассеяния

отдельной линии тока. На этом же графике приведена доля отраженных частиц в зависимости от угла среза рассеивающей среды, которая четко коррелирует со средним углом преломления.

Приведенные вычисления можно дополнить приближенным критерием (порогом) отражения зарядов, пересекающих установленную под углом к их траектории плоскопараллельную пластину толщины t :

$$t\Theta_s^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \geq 0.1. \quad (21)$$

Последняя формула получена приравнением утроенного значения для среднеквадратичного отклонения $\sqrt{\langle y^2 \rangle} = \Theta_s x^{3/2} / \sqrt{6}$ выражению (7) со значением κ , определяемом формулой (15). Упомянутое приближение заключается в пренебрежении вкладом второго слагаемого в формуле (16).

Из вышеизложенного можно сформулировать следующие выводы. Для построения математической модели, описывающей динамику рассеиваемых в среде зарядов на скошенной прямолинейной границе, разделяющей рассеивающую среду и вакуум, можно использовать функцию распределения, выведенную для неограниченной рассеивающей среды. Из функции распределения следует, что движение рассеянных зарядов можно интерпретировать, как ламинарный поток условной жидкости, и описание процессов на границе можно провести путем изучения движения линий тока и трубок тока, как элементов этого потока. Данное представление позволяет единым образом интерпретировать процессы отражения и преломления и произвести корректные вычисления средних значения и доли отраженных частиц. Имеются два механизма отражения и преломления потока. Один из них связан с обеднением прошедшего через границу потока частиц, вызванного тем, что периферийная часть распространяющегося потока из-за загиба трубок дрейфа просто не достигает границы раздела двух сред. По аналогии со световой оптикой можно говорить о полном внутреннем отражении части трубок тока. Второй механизм преломления и отражения связан с тем, что пересекающая границу отдельная трубка тока также обедняется в силу того, что в формировании усредненного потока на границе раздела не участвует часть частиц, рассеиваемых на углы, превышающие угол среза и остающиеся внутри среды. Часть не прошедших в вакуум частиц образует долю отраженных частиц. Можно также провести аналогию со световой оптикой — при пересечении границы раздела двух сред световой луч испытывает преломление и частичное отражение. Отметим, что обсчет экспериментальных данных по исследованию процессов отражения и преломления на фольгах электронного пучка из микротрона [3] по приведенной в данной работе методике свидетельствует об адекватном или близком к адекватному описанию упомянутых явлений.

Финансирование работы

Работа выполнена в Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН в рамках бюджетного финансирования.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] *Rossi B.* High energy particles. NJ: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1952. [*Росси Б.* Частицы больших энергий. / Пер с англ. М.: ГИТТЛ, 1955. 536 с.]
- [2] *Беленький С.З.* Лавинные процессы в космических лучах. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 244 с.
- [3] *Koltsov V., Serov A.V., Mamonov I.A.* Experimental study of the scattering of 7.4-MeV electrons intersecting a foil at angle of 5–60 degrees to its surface. Proc. Ru PAC-2016. P. 401–403. Obninsk October 6–10, 2014. <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/rupac2014/thpsc36.pdf>