01,02

Об одном нелинейном эффекте в теории сверхпроводимости

© *С.О. Гладков*

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) МАИ,
Москва, Россия

E-mail: sglad51@mail.ru

Поступила в Редакцию 15 ноября 2018 г.
В окончательной редакции 30 июня 2019 г.
Принята к публикации 8 июля 2019 г.

Из решения гидродинамических уравнений и уравнений Максвелла показано, что внешнее квазиоднородное магнитное поле приводит к появлению вторичного электрического поля, являющемуся результатом проявления нелинейного эффекта по магнитному потенциалу $\mathbf{A}$. Доказано, что это поле существует в области глубиной $\frac{\delta}{2}$, где δ — лондоновская глубина проникновения. Приведена оценка скорости гидродинамического потока.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, глубина проникновения, магнитное поле, электрическое поле, нелинейный эффект.

DOI: 10.21883/FTT.2019.11.48397.317

1. Введение

Вопрос, на котором нам хотелось бы сейчас остановиться, относится к общим физическим свойствам теории сверхпроводимости, основанной не на микроскопической теории БКШ (Бардин, Купер, Шифер), а на языке макроскопических уравнений гидродинамики и уравнений Максвелла, также вполне естественными, как, например, полярность вектора электрического поля $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(-t)$, и аксиальность магнитного $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}(-t)$, являющимися их неотъемлемой характеристикой.

Речь будет идти о нелинейном эффекте, связанным с возможным появлением вторичного квазиоднородного электрического поля, которое, как увидим, всегда существует и также является неотъемлемым свойством в явлении сверхпроводимости. В силу нелинейности этого эффекта область существования вторичного электрического поля будет определяться величиной $\frac{\delta}{2}$, которая диктует максимальную глубину проникновения потока электрического поля в толщу проводника. Надо сказать, что мы не нашли никакой содержательной информации, касающейся изложения этого вопроса, в огромном количестве оригинальных статей и монографий (см., к примеру [1–7]), посвященных как микро- так и макроскопической теории сверхпроводимости. Заметим еще к слову, что сами уравнения Лондонов являются только следствием уравнений Максвелла (см. ниже) в предположении, что коллективное движение электронов по какой-то физической причине представляет собой обычный гидродинамический поток. Как сейчас увидим, подобный подход приводит к весьма любопытному выводу о том, что в квазистатическом приближении (электрическое и магнитное поля независимы), внешнее магнитное поле, в котором находится металл при температурах сверхпроводящего перехода, должен привести к появлению вторичного электрического поля, проявляющему себя лишь в виде нелинейного эффекта по магнитному потенциалу $\mathbf{A}$ (см. ниже), что вовсе не противоречит уравнениям Максвелла.

Возможность существования этого поля приводит к ряду довольно любопытных эффектов, о которых мы поговорим далее.

2. Решение задачи

Будем считать, что газ заряженных частиц движется с некоторой гидродинамической скоростью $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ сквозь толщу металла под действием приложенных электрического и магнитного полей, и пусть $\rho_0 = \frac{dm}{dV}$ — плотность потока, где dm — элемент массы движущихся частиц, а $\rho_1 = \frac{dq}{dV}$ — плотность их электрического заряда, где dq — элемент заряда, dV — элемент объема. Тогда в соответствии с уравнением Лоренца можно записать, что

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} = \rho_1 \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{V}]}{c} \right). \qquad (1)$$

Известно, что для гидродинамического потока полная производная от скорости по времени есть просто субстанциональная производная [8], то есть

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

В результате из (1) следует уравнение, которое ранее ни в одном из известных нам источников не приводилось

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = \rho_1 \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{H}}{c} \right). \qquad (2)$$

Далее, согласно уравнениям Максвелла [7] имеем

$$div\, \mathbf{D} = 4\pi\rho_1, \qquad (3)$$

$$div\,\mathbf{B} = 0, \tag{4}$$

$$rot\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$rot\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \tag{6}$$

где плотность тока

$$\mathbf{j} = \rho_1 \mathbf{v}. \tag{7}$$

(некоторые другие чисто практические приложения теории ЭМ поля можно найти, например, в работах [9–11]).

Из уравнений (4) и (5) следуют известные определения для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ через магнитный потенциал $\mathbf{A}$ и электрический φ в виде [7]

$$\begin{cases} \mathbf{B} = rot\,\mathbf{A}, \\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi. \end{cases} \tag{8}$$

Подставив (8) в уравнение (2), найдем

$$\rho_0\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = \left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi + \frac{[\mathbf{v}\times rot\,\mathbf{A}]}{c}\right). \tag{9}$$

Слагаемое $[\mathbf{v}\times rot\,\mathbf{A}]$ преобразуем с помощью формулы

$$[\mathbf{v}\times rot\,\mathbf{A}] = \nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{A}. \tag{10}$$

Где значок $\mathbf{A}$ внизу у оператора „набла“ означает, что его действие распространяется только на вектор $\mathbf{A}$. После подстановки (10) в уравнение (9) находим

$$\rho_0\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = \rho_1\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi + \frac{1}{c}\left(\nabla_{\mathbf{A}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}\right)\right).$$

В результате элементарной перегруппировки слагаемых будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0\mathbf{v} + \frac{\rho_1}{c}\mathbf{A}\right) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\left(\rho_0\mathbf{v} + \frac{\rho_1}{c}\mathbf{A}\right) + \rho_1\nabla \times \left(\varphi - \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})}{c}\right) + \frac{\rho_1}{c}\left([\mathbf{A}\times rot\,\mathbf{v}] + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) - \frac{\mathbf{A}}{c}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla\rho_1)\right) - \mathbf{v}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla\rho_0)\right) = 0. \tag{11}$$

В силу уравнения электронейтральности

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + div\,(\rho_1\mathbf{v}) = 0 \tag{12}$$

и уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial t} + div\,(\rho_0\mathbf{v}) = 0 \tag{13}$$

имеем из (11)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0\mathbf{v} + \frac{\rho_1}{c}\mathbf{A}\right) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\left(\rho_0\mathbf{v} + \frac{\rho_1}{c}\mathbf{A}\right) + \left(\rho_0\mathbf{v} + \frac{\rho_1}{c}\mathbf{A}\right)div\,\mathbf{v} + \rho_1\nabla_{\mathbf{A}}\left(\varphi - \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})}{c}\right) = 0. \tag{14}$$

Благодаря независимости параметров $\mathbf{v}$ и φ из (14) получаются два следующих уравнения

$$\rho_0\mathbf{v} = -\frac{\rho_1}{c}\mathbf{A}, \tag{15}$$

и

$$\varphi - \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})}{c} = S(t), \tag{16}$$

где $S(t)$ — некоторая функция времени.

Заметим, что решение (16) не противоречит уравнениям Максвелла. Действительно, если взять градиент от обеих частей уравнения (16), то получим

$$-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Откуда следует, что $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Взяв отсюда ротор, и воспользовавшись определением (8), приходим к известному уравнению $rot\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

3. Обобщение уравнения Лондонов

Остановимся теперь на некоторых следствиях соотношений (15) и (16).

Из уравнения (15) видно, что $\mathbf{v} = -\frac{\rho_1}{c\rho_0}\mathbf{A}$. Подставляя это решение в (7), а его, в свою очередь, в уравнение (6), получаем

$$rot\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi\rho_1^2}{\rho_0 c}\mathbf{A}. \tag{17}$$

Используя, наконец, решения (8) и пользуясь уравнением калибровки ЭМ поля

$$div\,\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \tag{18}$$

приходим в итоге к волновому уравнению вида

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\rho_1^2}{\rho_0 c}\mathbf{A} = 0. \tag{19}$$

Надо заметить, что уравнение (19) отличается от уравнения Лондонов, которое, как известно [7], имеет вид

$$\Delta\mathbf{B} - \frac{4\pi e^2 n_s}{mc}\mathbf{B} = 0. \tag{20}$$

И дело здесь вовсе не во второй производной по времени, а в плотностях ρ_0 и ρ_1. В самом деле, если учесть, что $\rho_0 = mn_s$, а $\rho_1 = en_s$, где $n_s = \frac{dN_s}{dV}$ — концентрация носителей, dN_s их количество в объеме dV, то после взятия операции „ротор“ от уравнения (26) в квазистатическом приближении, опустив вторую производную по времени, получим

$$\Delta\mathbf{B} - \frac{4\pi e^2}{mc}\,\mathbf{B} - \frac{4\pi e^2}{mc}\,\mathbf{B}\,[\nabla n_s \times \mathbf{A}] = 0, \qquad (21)$$

где последнее слагаемое учитывает возможное проявление неоднородности потока электронов. Для однородного потока имеет место уравнение Лондонов (20). Соотношение (15) при этом позволяет написать, что

$$div\,\mathbf{v} = -\frac{e}{mc}\,div\,\mathbf{A}$$

и в квазистатическом приближении согласно условию калибровки ЭМ потенциалов (18) $div\,\mathbf{A} = 0$ мы приходим к уравнению несжимаемости

$$div\,\mathbf{v} = 0. \qquad (22)$$

В рассматриваемом нами статическом случае вторая производная по времени исчезает, и из уравнения (19) получим

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}}{\delta^2} = 0, \qquad (23)$$

где параметр лондоновской длины определяется соотношением $\frac{1}{\delta^2} = \frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2}$.

Выбирая произвольный малый участок поверхности проводника l такой, что он удовлетворяет условию $l \ll \lambda$, где λ — длина волны внешнего магнитного поля, можно считать что в перпендикулярном поверхности металла направлении, которое мы принимаем за ось z, направленную вверх, из уравнения (23) следует единственное физически разумное решение, затухающее при $z \to -\infty$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{\frac{z}{\delta}}, \qquad (24)$$

где $\mathbf{A}_0$ — значение векторного потенциала на поверхности проводника при $z = 0$.

В соответствии с (7) и (16) для плотности тока будем иметь

$$\mathbf{j} = -\frac{\rho_1^2}{\rho_0 c}\,\mathbf{A} = -\frac{e^2 n_s}{mc}\,\mathbf{A}. \qquad (25)$$

Уравнение (25) напоминает уравнение Лондонов [1–7], однако, в (25) мы говорим о плотности тока, а не о токе. Действительно, если в (25) подставить концентрацию носителей тока в виде $n_s = \frac{dN_s}{dV}$, то получим

$$\int \mathbf{j}dV = -\frac{e^2}{mc}\int n_s \mathbf{A} dV.$$

В силу же решения (24) отсюда следует, что $\int \mathbf{j}dV = \mathbf{J}\delta$, а потому, в однородном случае немедленно приходим к уравнению Лондонов

$$\mathbf{J} = -\frac{e^2 N_s}{mc\delta}\,\mathbf{A}. \qquad (26)$$

Заметим также, что если от уравнения (25) взять операцию ротор, то получим уравнение

$$rot\,\mathbf{j} = -\frac{e^2 N_s}{mc}\,\mathbf{B}, \qquad (27)$$

которое было получено Л.Д. Ландау, но другим способом, а его вывод приведен в монографии [7].

4. Оценка глубины проникновения электрического поля в сверхпроводник

Проанализируем теперь соотношение (16). Подставляя в него решение (15) и полагая $S = 0$, найдем

$$\varphi = -\frac{e^2 A^2}{mc^2}. \qquad (28)$$

Это означает, что для вторичного электрического поля, действующего строго вдоль оси z, имеем

$$E_z = -\frac{d\varphi}{dz} = \frac{eA_0^2}{mc^2}\frac{d}{dz}\,e^{\frac{2z}{\delta}} = \frac{2eA_0^2}{mc^2\delta}\,e^{\frac{2z}{\delta}}. \qquad (29)$$

Из решения (29) следует, что квазиоднородное электрическое поле может проникать внутрь сверхпроводника только на глубину $\frac{\delta}{2}$ (где лондоновская длина δ определена в уравнении (23)), а на поверхности сверхпроводника оно имеет конечное значение, равное

$$E_z(0) = \frac{2eA_0^2}{mc^2\delta}. \qquad (30)$$

Формула (30) отвечает на поставленный вначале статьи вопрос, и указывает на существование вторичного электрического поля на поверхности сверхпроводника, которое является просто его свойством.

5. Оценка скорости гидродинамического потока

Чтобы вычислить скорость гидродинамического потока, то первое предположение, которое, казалось бы, появляется, это воспользоваться уравнением (2) Однако, если подставить в него соотношениями (15) и (16), то мы, как это и должно быть, приходим к тождеству. Сказанное означает, что для вычисления скорости гидродинамического потока $\mathbf{v}$ нам следует воспользоваться иными соображениями, не используя уравнение (2).

Для его получения обратимся к уравнению (6) и соотношениям (15), (16). Действительно согласно (15) $\mathbf{v} = -\frac{e}{mc}\mathbf{A}$ или $\mathbf{A} = -\frac{mc\mathbf{v}}{e}$, а согласно (16) $\varphi = \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})}{c} = -\frac{m}{e}v^2$. Поэтому благодаря равенствам $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, где μ, ε — соответственно магнитная и диэлектрическая проницаемости, из уравнения (6) получаем

$$rot\,rot\,\mathbf{A} = grad\,div\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{dt} + \frac{4\pi\mu}{c}\rho_1\mathbf{v}. \quad (31)$$

Но $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$ и благодаря условию калибровки $div\,\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ легко находим отсюда

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} = \frac{4\pi\mu}{c}\rho_1\mathbf{v}.$$

Подставив сюда $\mathbf{A} = -\frac{mc\mathbf{v}}{e}$, получаем искомое уравнение на скорость потока

$$\Delta\mathbf{v} - \frac{1}{u_0^2}\frac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2} - \frac{\mathbf{v}}{\delta^2} = 0, \quad (32)$$

где $u_0 = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$. Полученное уравнение позволяет вычислить пространственно — временное распределение гидродинамической скорости. Как из него видно, если скорость потока направлена вдоль оси x, то стационарное и чисто физическое формальное решение вблизи поверхности сверхпроводника будет

$$v_x(z) = v_F e^{\frac{z}{\delta}}, \quad (33)$$

где v_F — скорость гидродинамического потока вблизи его поверхности, которая, очевидно, должна совпадать со скоростью нормальных электронов, представляющую из себя просто скорость Ферми. Напомним, что направление оси z выбрано от поверхности вовнутрь тела.

Рассмотрим теперь уравнение (32) для реального практического случая, когда проводник представляет собой проволоку радиуса R. Тогда для скорости $\mathbf{v} = \big(v_x(r), 0, 0\big)$ в статическом случае в системе цилиндрических координатах уравнение (32) примет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dv_x}{dr} - \frac{v_x}{\delta^2} = 0. \quad (34)$$

Его решение есть

$$v_x(r) = CJ_0\left(i\frac{r}{\delta}\right), \quad (35)$$

где C — константа интегрирования, а $J_0(ix)$ — функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Из граничного условия $v_x(R) = v_F$ следует, что $C = \frac{v_F}{J_0(i\frac{R}{\delta})}$. Поэтому решение будет

$$v_x(r) = v_F\frac{J_0\left(i\frac{r}{\delta}\right)}{J_0\left(i\frac{R}{\delta}\right)}. \quad (36)$$

Отсюда легко сделать вывод о том, что скорость потока на оси проволоки оказывается такой

$$v_x(0) = \frac{v_F}{J_0\left(i\frac{R}{\delta}\right)}. \quad (37)$$

Пользуясь асимптотикой модифицированной функции Бесселя первого типа [12]

$$J_0(ix) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

при $x \gg 1$, благодаря условию $R \gg \delta$ имеем из (37)

$$v_x(0) \approx v_F\frac{e^{-\frac{R}{\delta}}\sqrt{\delta}}{\sqrt{2\pi R}}. \quad (38)$$

Как видно из решения (38), скорость потока быстро убывает с расстоянием, что вполне соответствует реальности, и не противоречит теории Гинзбурга–Ландау.

Стоит еще раз подчеркнуть, что предложенный выше подход опирался на два главных предположения.

Классическая теория сверхпроводимости может быть сконструирована с помощью теории электромагнитного поля Максвелла и уравнений гидродинамики. Во всяком случае серьезных разногласий приведенного выше подхода с теорией Гинзбурга–Ландау (сокращенно Г–Л) мы не заметили.

Действительно, если внимательно посмотреть на формулу (30), то легко увидеть следующее. Поскольку электрическое поле на поверхности сверхпроводника ведет себя как $E_z(0) = \frac{2eA_0^2}{mc^2\delta}$, а глубину проникания δ можно представить через параметр порядка теории Г–Л ψ в виде

$$\delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}} = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2|\psi|^2}} = \sqrt{\frac{mc^2 T_c}{4\pi e^2 n_0(T_c - T)}}, \quad (39)$$

то это как раз и означает, что возникающее электрическое поле должно зависеть от параметра порядка линейно в соответствии с формулой

$$E_z(0) = \frac{4\sqrt{\pi}e^2A_0^2}{mc^3\sqrt{m}}|\psi|. \quad (40)$$

Чтобы убедиться в том, что этот эффект вполне может быть обнаружен экспериментально, оценим численное значение величины поля на поверхности сверхпроводника, исходя из соотношения (40).

Полагая по порядку величины, что заряд электрона и его масса есть $e \sim 10^{-10}$ СГС, $m \sim 10^{-27}$ g, а скорость света в вакууме составляет $c \sim 10^{10}\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$, в Гауссовой системе единиц немедленно получаем, что

$$E_z(0) \sim 10^{-8}A_0^2|\psi|.$$

Как видим, эффект оказывается вполне ощутимым, если речь идет не о самой точке сверхпроводящего перехода T_s, а о температурах лишь ее порядка, поскольку в этом случае $|\psi| \sim \sqrt{n_s} \sim 10^{11}\,\text{cm}^{-3}$.

В связи со сказанным следует также отметить, что предложенное выше описание имеет одно, на наш взгляд, вполне оправданное преимущество, которое довольно сильно отличает его от классических теорий, поскольку речь идет о предсказании эффекта нелинейного выталкивания из толщи сверхпроводника электрического поля, о чем ранее в известных нам публикациях не упоминалось.

6. Заключение

1. Показана принципиальная возможность проявления нелинейного эффекта, связанная с появлением вторичного электрического поля в сверхпроводнике, происхождение которого индуцируется внешним магнитным полем, и приведена его связь с параметром порядка в теории Гинзбурга–Ландау.

2. Дана оценка области существования вторичного электрического поля вблизи поверхности сверхпроводника, и найдена глубина его проникновения в толщу проводника, составляющая ровно половину лондоновского параметра длины.

3. Показано, что лондоновская глубина проникновения квазиоднородного магнитного поля в сверхпроводник является естественным следствием уравнений Максвелла и уравнений гидродинамики, а не отличительной чертой сверхпроводимости.

4. Приведено аналитическое выражение для распределения скорости гидродинамического потока v_s, которую можно описать с помощью формул (33) и (36).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Дж. Шриффер. Теория сверхпроводимости. Наука, М. (1970). 311 с.
[2] М. Тинкхам. Введение в сверхпроводимость. Атомиздат, М. (1980). 312 с.
[3] А.В. Свидзинский. Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости. Наука, М. (1982). 422 с.
[4] M. Tinkham. Introduction to superconductivity. 2nd ed. Mc Graw–Hill (1996). 356 p.
[5] В.В. Шмидт. Введение в физику сверхпроводников. МЦНМО, М. (2000). 416 с.
[6] N.B. Kopnin. Theory of nonequilibrium superconductivity. Clarendon Press (2001). 421 p.
[7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (2004). Т. 8. 620 с.
[8] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Гидродинамика. Наука, М. (2004). Т. 6. 742 с.
[9] С.О. Гладков. ЖТФ **85**, *7*, 138 (2015).
[10] С.О. Гладков, С.Б. Богданова. Радиотехника и электроника. **62**, *7*, 632 (2017).
[11] С.О. Гладков, С.Б. Богданова. Изв. вуз. Физика. **61**, *1*, 94 (2018).
[12] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Наука, М. (1974). Т. 2. 295 с.

Редактор Т.Н. Василевская