

XXIII Международный симпозиум „Нанопизика и наноэлектроника“,  
Нижний Новгород, 11–14 марта 2019 г.

14  
**Режимы колебаний в одномерной цепочке джозефсоновских  
контактов с нелокальной запаздывающей связью**

© М.А. Галин,<sup>1</sup> В.В. Курин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт физики микроструктур РАН,  
603950 Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup> Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
603950 Нижний Новгород, Россия  
e-mail: galin@ipmras.ru

Поступило в Редакцию 28 марта 2019 г.

В окончательной редакции 28 марта 2019 г.

Принято к публикации 15 апреля 2019 г.

Проведено численное исследование массива последовательно соединенных джозефсоновских переходов, электромагнитно связанных между собой, при учете запаздывания связи. В общем случае ненулевого запаздывания выведены уравнения для медленной и быстрой фаз в рамках высокочастотного приближения. Изучены режимы колебаний цепочки контактов при различном положении рабочей точки на вольт-амперной характеристике, в том числе на ее обратной ветви. Аналогичное исследование проведено для системы уравнений без запаздывания связи при произвольном значении тока смещения. Обнаружено несколько режимов установившихся колебаний: синхронные колебания, режим бегущей волны, режим частичного выключения контактов, а также химерные состояния.

**Ключевые слова:** джозефсоновские контакты, нелокальная связь, химерные состояния, когерентные колебания.

DOI: 10.21883/JTF.2019.11.48321.149-19

## Введение

Джозефсоновским переходом называется слабая связь между двумя сверхпроводниками. При приложении к джозефсоновскому контакту напряжения смещения  $U$  на нем появляется высокочастотная (ВЧ) компонента тока, в результате контакт излучает с частотой  $f = 2eU/h$ , где  $e$  — заряд электрона,  $h$  — постоянная Планка. Интерес к системам, содержащим джозефсоновские переходы, связан с их применением в различных приложениях: в метрологии [1], терагерцовой генерации и терагерцовом детектировании [2–4], квантовых вычислениях [5], измерении магнитных полей [6], конструировании метаматериалов [7].

В массивах, содержащих большое количество контактов, могут возникать различные режимы когерентных или стохастических колебаний. Для изучения динамических режимов, в том числе при поиске условий взаимной синхронизации контактов, используются различные модели нелинейных взаимодействующих осцилляторов. Если контакты расположены на расстоянии порядка или чуть больше длины когерентности, то взаимная связь будет определяться главным образом неравновесными квазичастицами или функцией параметра порядка. Примером таких массивов являются контакты, образующиеся естественным образом в кристаллах  $\text{BiSrCaCuO}$ ,

где на  $1\ \mu\text{m}$  приходится около 600 джозефсоновских переходов, а также массивы контактов, ориентированных на подложке по вертикали. Модель связанных переходов, взаимодействующих посредством инъекции неравновесных квазичастиц, была исследована в [8].

В массивах планарных структур, где контакты расположены в плоскости подложки, расстояние между контактами может составлять единицы и десятки микрон. Тогда главную роль во взаимодействии между переходами будет играть ВЧ электромагнитная связь, которая может иметь резистивную, индуктивную или емкостную составляющую [9]. Такие массивы находят применение в качестве стандартов вольта, а в последнее время они рассматриваются как перспективные генераторы терагерцового излучения [4]. Из-за содержания в массиве огромного числа контактов, порядка нескольких тысяч, размер всей системы становится сравнимым с длиной волны, поэтому важным фактором, влияющим на формирование режимов колебаний в таких больших массивах, будет являться конечное время распространения взаимодействия между джозефсоновскими переходами.

В настоящей работе изучены режимы установившихся колебаний в системе уравнений, описывающих цепочку связанных джозефсоновских переходов с нелокальной емкостной связью, имеющей конечное запаздывание. В результате исследования временной динамики данной

системы при различных ее параметрах установлено, что в большинстве случаев в системе наблюдаются два типа когерентных режимов колебаний: синхронные колебания и режим бегущей волны. На обратной ветви вольт-амперной характеристики (ВАХ) могут возникать химеры — особые состояния связанных осцилляторов, характеризующиеся наличием одновременно как когерентных, так и стохастических участков. Впервые химеры были обнаружены в [10]. Химерные состояния находят в системах различной природы, а в последнее время — и в массивах джозефсоновских переходов, описываемых различными моделями [8,11]. Исследование меры взаимной корреляции осцилляторов как функции времени показало, что при нулевом запаздывании связи химеры могут быть стационарными.

## Система уравнений

Рассматривается система из  $N$  джозефсоновских контактов, соединенных последовательно и описываемых резистивной моделью с конечной емкостью. Полагается, что контакты в цепочке взаимодействуют посредством экспоненциально спадающей нелокальной связи емкостного типа. Связь характеризуется также запаздыванием между соседними контактами, которое учитывает конечную скорость распространения электромагнитного взаимодействия. Соответствующая система дифференциальных уравнений для данных связанных осцилляторов выглядит следующим образом:

$$c\ddot{\varphi}_n(t) + \dot{\varphi}_n(t) + \sin \varphi_n(t) = \xi - a \sum_{m \neq n} \ddot{\varphi}_m(t - \tau |m - n|) \exp(-|m - n|/P). \quad (1)$$

Здесь  $\varphi_n(t)$  — разность фаз на  $n$ -м контакте,  $\dot{\varphi}_n(t)$ ,  $\ddot{\varphi}_n(t)$  — соответственно первая и вторая производные фазы по времени,  $\xi$  — ток смещения,  $c$  — нормированная емкость контакта (параметр Маккамбера),  $a$  — коэффициент связи, пропорциональный индуцируемому переменному току,  $P$  — эффективное число соседних контактов, влияющих с каждой стороны на текущий контакт (дальнодействие связи),  $\tau$  — время запаздывания связи между соседними контактами.

Отдельное уравнение системы (1) без суммы в правой части представляет собой уравнение резистивной модели джозефсоновского контакта в нормированном виде [9]. Ток  $\xi$  в (1) нормирован на критический ток  $I_c$ , а время  $t$  — на величину  $h/(4\pi e I_c R)$ , где  $R$  — сопротивление контакта в резистивной модели. Суммирование в (1) ведется по всем осцилляторам  $m = 1, 2, \dots, N$  в цепочке, за исключением текущего  $n$ -го контакта. На связь между осцилляторами наложены периодические граничные условия, т.е. цепочка представляется замкнутой в кольцо, и все контакты таким образом являются идентичными относительно связи.

Преобразуем систему (1), используя метод разделения на быстрые и медленные колебания [9]. Представим джозефсоновскую разность фаз в виде  $\varphi_n = \omega_J t + \theta_n + \psi_n$ , где  $\omega_J$  — частота джозефсоновских осцилляций автономного контакта,  $\theta_n$  — медленная фазовая переменная,  $\psi_n$  — ВЧ вклад в джозефсоновскую фазу. Из уравнения для автономного контакта в ВЧ приближении имеем  $\omega_J = \bar{u} \approx \xi$ . Аналогично [12] разделяем (1) на отдельные решения для  $\theta_n$  и  $\psi_n$ , первое из которых будет иметь вид

$$c\ddot{\theta}_n + a \sum_{m \neq n} \ddot{\theta}_m \exp(-|m - n|/P) + \dot{\theta}_n + 1/2 \sum_{m=1}^N \operatorname{Re} [M_{nm}^{-1} \exp(i(\theta_m - \theta_n))] = 0, \quad (2)$$

а второе сведется к системе линейных неоднородных алгебраических уравнений:

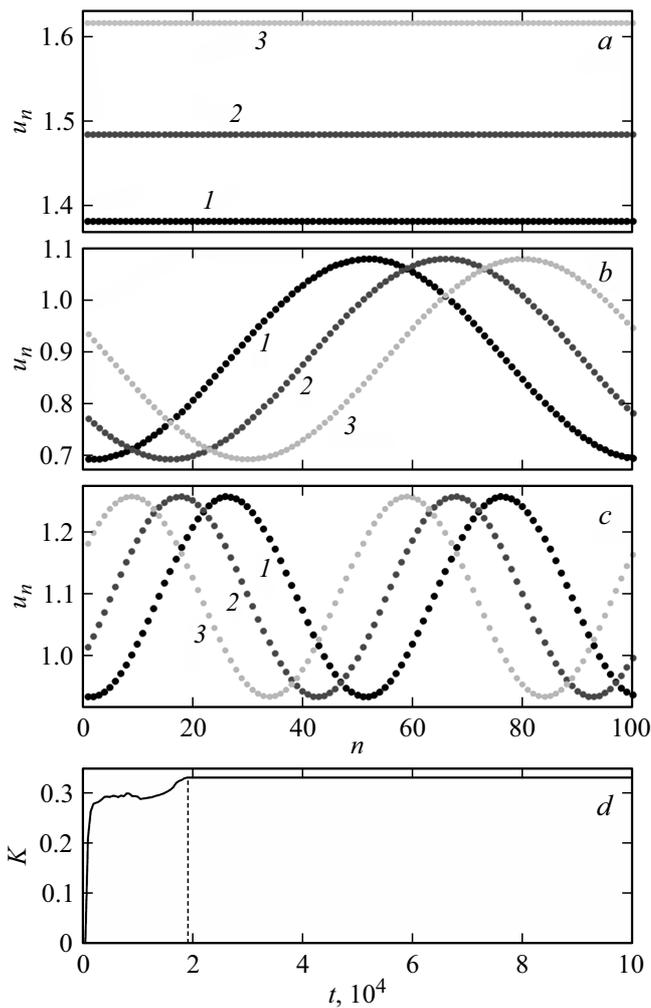
$$\psi_n = \operatorname{Re} \left[ \sum_{m=1}^N M_{nm}^{-1} \exp(i\theta_m + i\omega_J t) \right]. \quad (3)$$

В представленных выше уравнениях  $M_{nm}^{-1}$  — элементы матрицы, обратной матрице емкостей  $\hat{M}$ , диагональные и недиагональные элементы которой имеют вид:  $M_{nn} = \omega_J + ic\omega_J^2$ ,  $M_{mn} = M_{nm} = ia\omega_J^2 \times \exp(-|m - n|/P - i\omega_J \tau |m - n|)$ . Последняя сумма в левой части (2) содержит разностные компоненты  $\theta_m - \theta_n$  и по форме схожа с характером взаимодействия осцилляторов в модели Курамото [13]. В [14] модель Курамото использовалась для описания динамики джозефсоновских контактов, взаимодействующих через последовательный колебательный контур. Расчеты в [14] продемонстрировали полную синхронизацию в случае идентичных джозефсоновских переходов.

## Моделирование системы с запаздыванием связи

Ниже обсуждаются результаты исследования режимов колебаний при различном токе смещения  $\xi$  в цепочке контактов. Для фазы выбирались случайные начальные условия, равномерно распределенные в интервале от нуля до  $2\pi$ , а для начального напряжения использовалось условие нулевого приближения:  $u_n(t=0) = \xi$ . Система дифференциальных уравнений (2) решалась неявным методом Рунге–Кутты, а полученный результат для  $\theta_n$  затем подставлялся в систему (3), откуда получали значения  $\psi_n$ . Исследование проводилось как на прямой, так и на обратной ветви ВАХ. Для того чтобы попасть на обратную ветвь, вначале колебания возбуждались при токе смещения  $\xi$ , немного превышающем единицу, а затем в течение временного промежутка  $0 < t < 250$  рабочая точка ВАХ опускалась до значений  $\xi < 1$ .

Для количественной оценки когерентности колебаний использовалась величина, определенная аналогично [15].



**Рис. 1.** Распределения напряжений на контактах при различных типах стационарных когерентных колебаний: в синхронном режиме (a), в бегущей волне с одним периодом на длине цепочки контактов (b) и в бегущей волне с двумя периодами (c). Реализации получены при  $\xi = 1.5$  (a), 0.9 (b), 1.1 (c). Распределения 1–3 взяты в последовательные моменты времени с временным промежутком  $\Delta t = 1$ . Зависимость меры когерентности контактов от времени (d) показана для реализации (c). Штриховой линией обозначен момент времени, когда колебательная система выходит на стационарный режим.

Введем матрицу корреляционных коэффициентов:

$$\rho_{mn}(t) = \sum_{t'=t-500}^t \frac{(u_m(t') - \bar{u}_m)(u_n(t') - \bar{u}_n)}{\sigma\{u_m\}\sigma\{u_n\}}. \quad (4)$$

Как видно из (4), корреляция вычисляется во временном окне размером  $\Delta t = 500$ , т.е. эта величина является зависящей от времени. Далее будем считать выбранную пару осцилляторов когерентными, если  $|\rho_{mn}| > 0.99$ . Мерой когерентности является доля когерентных пар осцилляторов в системе, и выражение для нее имеет вид:

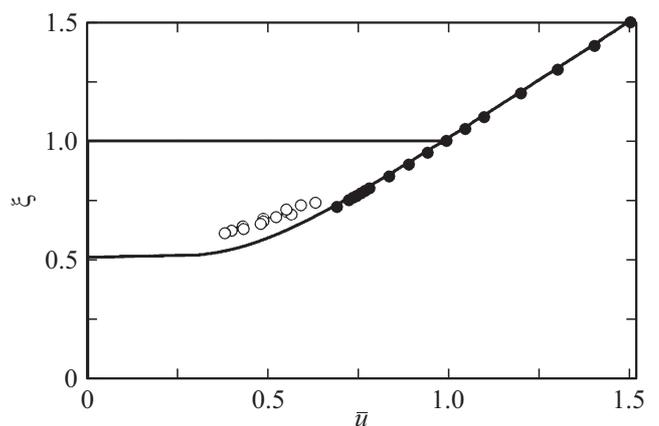
$$K(t) = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n} g_{mn}(t)}{N(N-1)}}, \quad (5)$$

где  $g_{mn} = 1$ , если  $|\rho_{mn}| > 0.99$ , и  $g_{mn} = 0$  в противном случае. Выражение в знаменателе под корнем означает полное число различных пар осцилляторов. Далее во всех расчетах полагалось  $N = 100$ , поэтому полное число пар равно 9900. Определенная в (4), (5) оценочная величина позволяет проследить за изменением и развитием колебательной системы с момента ее возбуждения, а также зафиксировать ее выход на стационарный режим.

В отличие от (5) мера когерентности, введенная в [15], рассматривалась на всей временной полуоси  $t > 0$ , поэтому являлась постоянной величиной. Мера когерентности в [15] использовалась для исследования различных типов химерных состояний. Предложенные в [15] критерии мы также применяли для классификации обнаруженных здесь химер.

Положим для емкости контактов, коэффициента связи и дальнего действия связи  $c = 2.5$ ,  $a = 2.7$ ,  $P = 1$ . Выбранное значение емкости соответствует наилучшей аппроксимации в рамках резистивной модели ВАХ массивов ниобиевых контактов, исследованных в [4]. Из выбранных значений параметров  $a$ ,  $P$  следует, что связь между осцилляторами является в данном случае сильной, но короткодействующей. Для времени запаздывания положим  $\tau = 0.1$ . Данное значение соответствует оценке времени распространения электромагнитного взаимодействия между соседними секциями контактов в меандровом (meander) массиве, который исследовался в [4].

На прямой ветви и на части обратной ветви ВАХ система связанных осцилляторов, пробыв в течение  $t \sim 10^4$  в режиме установления колебаний, всегда выходит на стационарный когерентный режим, при котором частоты всех осцилляторов одинаковы и не меняются во времени. Условно эти колебания можно разделить на два



**Рис. 2.** ВАХ джозефсоновского контакта (сплошная линия), рассчитанная в резистивной модели с конечной емкостью, и значения нормированного напряжения, приходящегося на один контакт (символы), в различных режимах колебаний цепочки контактов с нелокальной запаздывающей связью. Темные символы соответствуют стационарным когерентным режимам колебаний, светлые — химерным состояниям и хаотическим колебаниям.

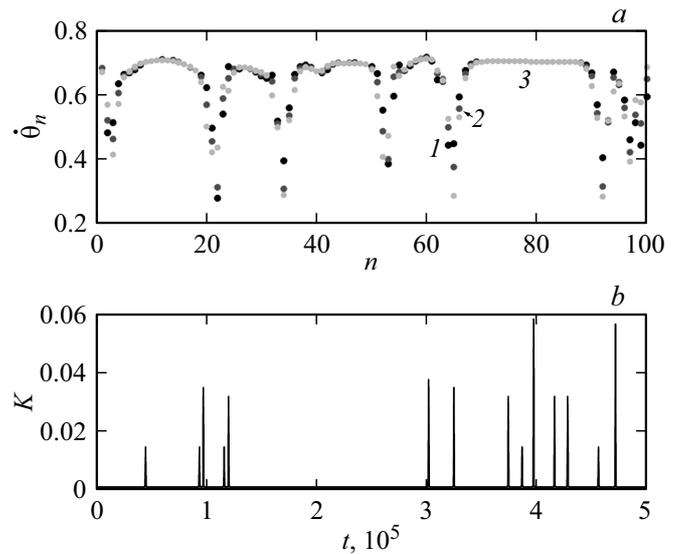
типа, которые характеризуются лишь ВЧ зависимостями  $\psi_n(t)$ : синхронный режим и режим бегущей волны. Реализация конкретного типа когерентного режима определяется лишь начальными условиями. Как указывалось выше, распределение начальной фазы выбиралось случайным образом, поэтому предсказать тип когерентного режима невозможно.

При синхронном режиме все контакты колеблются в фазе, поэтому пространственное распределение напряжений  $u_n(t)$  представляет собой горизонтальную линию в любой момент времени (рис. 1, *a*). В режиме бегущей волны имеется небольшая разность фаз между соседними осцилляторами. Она одинакова на всем протяжении цепочки контактов, в результате на ней формируется бегущая волна  $u_n(t)$  с различным количеством периодов, укладывающихся вдоль длины цепочки. На рис. 1, *b* показаны мгновенные профили бегущей волны с одним периодом на длине цепочки, на рис. 1, *c* — мгновенные профили волны с двумя периодами (также наблюдались волны с тремя и четырьмя периодами, но значительно реже). Число периодов, как и направление движения волны, случайно и определяется лишь начальными условиями. На рис. 1, *d* для последней реализации представлена зависимость меры когерентности от времени. Из нее видно, что установление колебаний происходит до момента времени  $t = t^* = 2 \cdot 10^4$ , после чего система выходит на стационарный режим со значением  $K_s = K(t > t^*)$ , не меняющимся во времени. Отметим, что стационарное значение меры описанных выше когерентных колебаний  $K_s = K(t > t^*)$  зависит лишь от формы пространственного распределения  $u_n$ , т.е. от количества периодов в волне, и не зависит от значения внешнего тока  $\xi$ . Установлено, что для волн с одним и тремя периодами  $K_s = \sqrt{1/\Pi}$  (900 когерентных пар из 9900 согласно (4), (5)), для волн с двумя и четырьмя периодами  $K_s = 1/3$  (1100 когерентных пар). Для синхронного режима, очевидно, всегда имеем  $K_s = 1$ .

Систему когерентно колеблющихся джозефсоновских контактов, описываемых (1), при условии, что фазы любых последовательно расположенных  $P$  контактов отличаются незначительно, можно представить как совокупность независимых осцилляторов, емкость которых увеличена за счет емкостной связи между контактами исходного массива (1). Согласно (1), вклад в емкость от единичной связи между парой осцилляторов, отстоящих друг от друга на  $k$  элементов, составляет  $\Delta c_k = 2a \exp(-k/P)$ . Используя формулу суммы геометрической прогрессии и полагая  $P \ll N$ , получим следующее выражение для поправки емкости когерентно колеблющихся контактов:

$$\Delta c = 2a \frac{\exp(-1/P)}{1 - \exp(-1/P)}. \quad (6)$$

Для выбранных параметров связи, как следует из (6), имеем  $\Delta c = 3.14$ , следовательно, емкость контакта эффективно повышается до  $c_{\text{coh}} = c + \Delta c = 5.54$ . Соответствующая ВАХ одного перехода, рассчитанная в



**Рис. 3.** Распределение медленных фаз вдоль цепочки контактов, находящейся в химерном состоянии (*a*), и соответствующая зависимость меры когерентности от времени (*b*). Реализация получена при  $\xi = 0.73$ . Распределения 1–3 взяты в последовательные моменты времени с временным промежутком  $\Delta t = 3.5$ .

резистивной модели с учетом данной емкостной поправки, представлена на рис. 2 сплошной линией. Темные символы на рис. 2 соответствуют реализациям, которые приводили к когерентным режимам колебаний. Каждый такой символ обозначает среднее значение напряжения всей системы  $\bar{u} = \sum_n \bar{u}_n / N$ , т.е. постоянную составляющую напряжения, которая в среднем приходится на один контакт. Видно, что когерентные режимы колебаний наблюдаются при  $\xi > 0.75$ . Значения  $\bar{u}$  лежат точно на ВАХ автономного перехода, как и должно быть в случае когерентных колебаний системы.

При  $\xi < 0.75$  в течение периода времени  $t \sim 10^5$  система будет находиться в нестационарном состоянии, которое является химерным. На рис. 3, *a* показано мгновенное распределение производных от медленных фаз в несколько моментов времени. Данная зависимость дает наглядное представление о распределении частот колебаний осцилляторов с точностью до слагаемого  $\omega_J$ , исключая несущественную информацию о распределении разности фаз между ними. Из рис. 3, *a* видно, что на цепочке существуют кластеры осцилляторов с почти одинаковыми частотами колебаний, и кластеры, в которых частоты осцилляторов нестабильны и хаотичным образом меняются. Таким образом, явно наблюдается соседство когерентных и стохастических участков, что указывает на реализацию в системе химерного состояния. Зависимость  $K(t)$  (рис. 3, *b*) состоит из пиков с ненулевым значением  $K$ , которые непрогнозируемо возникают на фоне полного отсутствия когерентности  $K(t) = 0$ . Ненулевые значения  $K$  соответствуют достаточно сильному разрастанию когерентных кластеров и

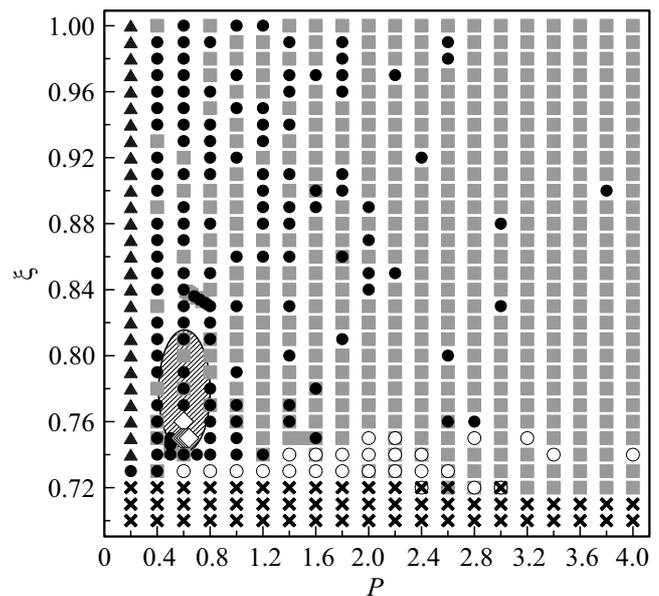
их стабилизации на цепочке, благодаря чему на время появляются когерентные пары осцилляторов. Кроме того, в данных химерах регулярно происходит спонтанное рождение стохастического кластера из более широкой области когерентности, а также имеется обратный процесс — поглощение стохастического кластера соседними когерентными кластерами. Последнее, если это произошло со всеми стохастическими кластерами одновременно, оказывается необратимым, в результате стохастичность в системе навсегда исчезает. Затем после непродолжительного процесса установления система перейдет в один из обсуждавшихся выше стационарных режимов когерентных колебаний. Таким образом, для данных химерных состояний нельзя точно сказать, когда произойдет их трансформация в когерентный режим колебаний, однако наблюдения показывают, что время жизни химерных состояний тем больше, чем ниже значение тока смещения  $\xi$ . С понижением  $\xi$  растет также и доля стохастических кластеров в системе, в результате когерентные области могут исчезнуть совсем, и колебания станут хаотическими. Отметим, что ситуация может измениться, если в системе (1) учесть шумовые флуктуации тока. Тогда, возможно, стохастические кластеры смогут как исчезать, так и появляться вновь, не позволяя установиться когерентным колебаниям, и химера, таким образом, будет существовать более продолжительное время.

По классификации, предложенной в [15], данный тип химер относится к классу турбулентных подвижных (turbulent moving) химер. Подобный результат был получен в [16], где в системах с задержкой обратной связи наблюдались нестабильные химерные состояния при проведении как модельных исследований, так и реальных экспериментов.

На рис. 2 светлыми символами показаны средние значения напряжения в системе, пребывающей в химерном или хаотическом состоянии. Как видно, они оказываются ниже напряжений, предсказываемых резистивной моделью. Как следует из рис. 3, *a*, напряжение понижают осцилляторы, находящиеся в стохастических кластерах.

## Система без запаздывания связи

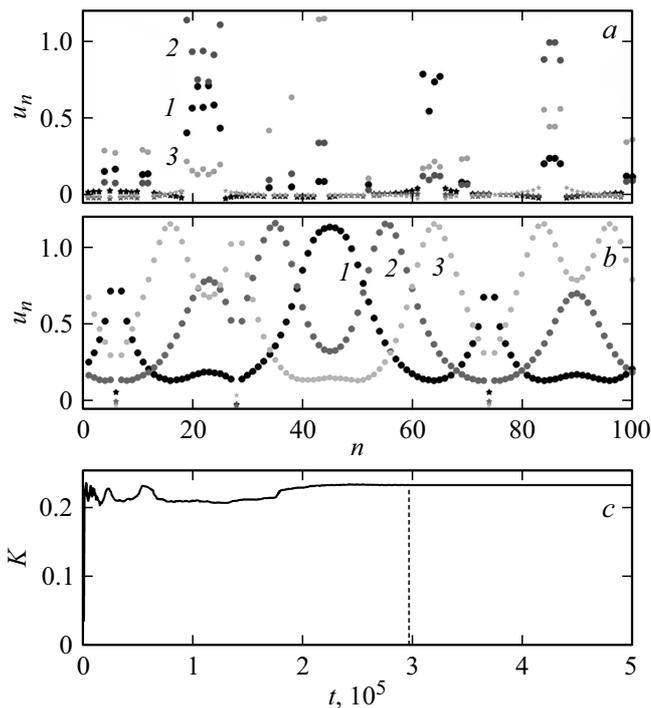
Если в системе (1) пренебречь запаздыванием и положить  $\tau = 0$ , то уравнения можно решать стандартными методами без использования какого-либо приближения. Для решения (1) при  $\tau = 0$  мы взяли тот же неявный метод Рунге–Кутты, который был применен к системе (2). Для емкости контактов и коэффициента связи зафиксированы значения  $c = 2.5$ ,  $a = 0.1$  (слабая связь между контактами). Поправка к емкости за счет связи будет незначительной и составлять, согласно (6),  $\Delta c = 0.05$ , тогда  $c_{\text{coh}} = 2.55$ . Режимы колебания системы изучены в широком диапазоне изменения остальных двух параметров  $P$ ,  $\xi$ . Аналогично случаю с ненулевым запаздыванием, при  $\xi > 1$  всегда будет реализовываться один



**Рис. 4.** Режимы колебаний, наблюдаемые на плоскости параметров  $P$ ,  $\xi$  в системе уравнений без запаздывания связи при  $c = 2.5$ ,  $a = 0.1$ . Квадраты обозначают синхронные режимы колебаний, темные круги — режимы бегущей волны, светлые круги — режимы частичного выключения контактов, треугольники — слабокогерентные колебания, кресты — затухающие колебания, ромбы — устойчивые химерные состояния. Заштрихованный эллипс выделяет область, где в течение  $t \sim 10^4$  могут существовать неустойчивые химеры.

из двух типов когерентных колебаний — синхронный режим или режим бегущей волны. Более разнообразная картина наблюдается на обратной ветви ВАХ.

На рис. 4 на плоскости параметров  $P$ ,  $\xi$ , где  $\xi < 1$ , отмечены типы колебаний, наблюдавшиеся в большинстве случаев при однократной реализации. В некоторых местах на плоскости  $P$ ,  $\xi$  имеется наложение нескольких символов друг на друга, что соответствует наблюдению различных типов колебаний в случае проведения повторных наблюдений при одних и тех же  $P$ ,  $\xi$ . Как видно из представленных данных, при  $\xi > 0.75$  и почти всех значениях дальности действия связи  $P$  реализуется когерентный режим колебаний. Стационарное состояние устанавливается тем дольше, чем меньше  $P$ . Четкой границы между синхронным режимом и режимом бегущей волны на плоскости параметров не существует, поэтому данные для когерентных режимов на рис. 4 дают представление скорее о частоте реализации типов этих колебаний. Видно, что бегущие волны чаще возникают при малых  $P$ , выраженной зависимости от  $\xi$  при этом не наблюдается, разве что в диапазоне  $1 < P < 2$  вероятность реализации бегущих волн несколько выше в случае больших  $\xi$ . При повышении параметра дальности действия, в области  $P > 2$ , соотношение между колебаниями резко меняется в сторону синхронного режима, так что при  $P > 3$  бегущие волны возникают крайне редко.



**Рис. 5.** Распределения напряжений вдоль цепочки, находящейся в режиме частичного выключения контактов. Реализация (а) получена при  $P = 2.4$ ,  $\xi = 0.73$ , выключены 72 контакта, реализация (b) получена при  $P = 1.4$ ,  $\xi = 0.74$ , выключены 3 контакта. Распределения 1–3 взяты в последовательные моменты времени с временным промежутком  $\Delta t = 3.5$ . Выключенные осцилляторы обозначены звездочками. Мера когерентности как функция времени (c) показана для реализации (b), где штриховая линия обозначает выход системы на стационарный режим колебаний.

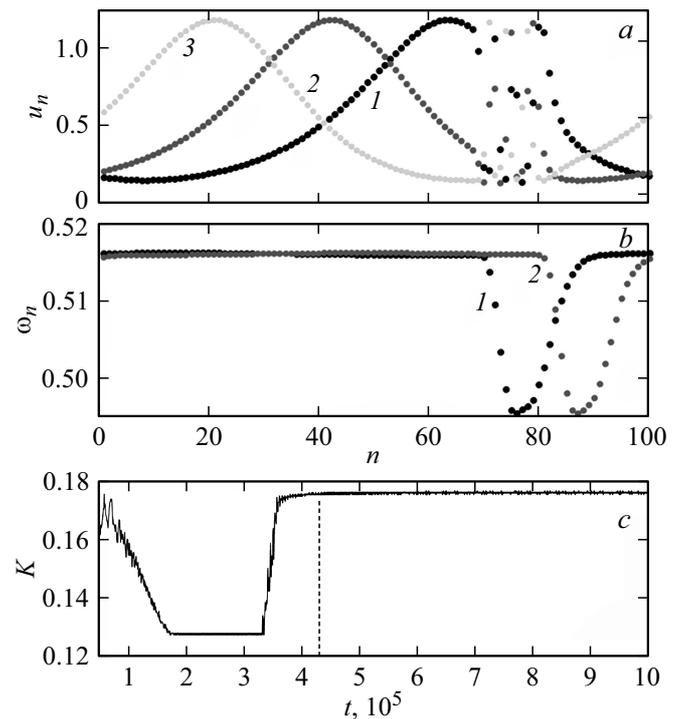
При малых  $P \sim 0.2$  не удается дождаться установления колебаний за время наблюдений  $t \sim 10^5$ . Эти колебания здесь обозначены как слабокогерентные, хотя возможно через большее время, чем было доступно нам для наблюдений, они выходят на стационарный когерентный режим.

При  $\xi \approx 0.72$  наблюдается переход системы связанных контактов в сверхпроводящее состояние: ниже этого значения колебания являются затухающими. В диапазоне  $0.72 < \xi < 0.75$  и при  $P < 3$  чаще всего реализуется промежуточное состояние, при котором выключаются только часть контактов. На рис. 5, a, b продемонстрировано, как выглядят такие реализации при различном количестве контактов, перешедших в сверхпроводящее состояние. Строго говоря, их колебания полностью не прекращаются, но остаточные осцилляции обусловлены воздействием соседних контактов, а амплитуда этих осцилляций значительно меньше амплитуды колебаний остальной части системы. На рис. 5, c показана зависимость меры когерентности от времени для реализации на рис. 5, b. Аналогично когерентным колебаниям си-

стема также проходит период установления, после чего мера  $K$  приходит к стационарному значению.

В узком диапазоне параметров  $P = 0.5–0.7$ ,  $\xi = 0.74–0.8$  в данной системе связанных контактов возбуждаются химерные состояния. Большинство из них неустойчивы и при  $t \sim 10^4$  трансформируются в когерентные колебания, но некоторые химеры не исчезают при  $t \sim 10^5–10^6$  и, судя по характеру зависимости  $K(t)$ , являются стационарными. Такие стационарные химеры существуют в еще более узком диапазоне  $P = 0.57–0.64$ ,  $\xi = 0.75–0.76$ , причем максимальная вероятность их возбуждения, равная около 30%, зафиксирована при  $P = 0.6$ ,  $\xi = 0.75$ .

Одно из устойчивых химерных состояний, наблюдаемое при  $P = 0.6$ ,  $\xi = 0.76$ , изображено на рис. 6, a. В отличие от химер, возникающих в системе с ненулевым запаздыванием  $\tau$  (см. рис. 3), здесь имеется всего один стохастический кластер, содержащий небольшое, но фиксированное число осцилляторов. В данной реализации когерентные осцилляции имеют форму бегущей однопериодной волны, которая проходит сквозь стохастический кластер, при этом никак не меняя характер



**Рис. 6.** Распределения напряжений (a) и частоты первой гармоники колебаний (b) вдоль цепочки контактов в химерном состоянии и соответствующая зависимость меры когерентности от времени (c). Реализация получена при  $P = 0.6$ ,  $\xi = 0.76$ . Распределения 1–3 для напряжений (a) взяты в последовательные моменты времени с временным промежутком  $\Delta t = 2.5$ . Распределения 1, 2 частот первой гармоники (b) взяты через временной промежуток  $\Delta t = 1000$ , откуда видно, что стохастический кластер смещается слева направо. Штриховая линия на (c) обозначает момент времени, когда химерное состояние стабилизировалось.

колебаний в нем. Реже в химерах наблюдались волны с большим числом периодов, еще реже со стохастическим кластером уживались синхронные колебания. Также химерное состояние иногда содержало два отдельных стохастических кластера.

Более детальное представление о характере химерного состояния дает распределение частот основной гармоники, взятое в достаточно удаленные моменты времени (рис. 6, *b*). Оказывается, частота колебаний каждого осциллятора в стохастическом кластере почти постоянна и несколько ниже основной частоты, на которой колеблются остальные осцилляторы. Частоты осцилляторов в стохастическом кластере меняются таким образом, что визуально происходит медленное перемещение этой области вдоль цепочки. На его переднем фронте частоты осцилляторов начинают медленно уменьшаться, в результате происходит расфазировка колебаний контактов, попадающих в стохастический кластер, относительно колебаний контактов, остающихся в области когерентности. Частоты осцилляторов уменьшаются до некоторого минимального значения, а затем происходит более резкое возрастание частот до исходного уровня. Как видно из рис. 6, *b*, минимальная частота в стохастическом кластере меньше частоты когерентных колебаний всего на 4%, а данная область расфазировки перемещается вдоль системы осцилляторов слева направо со скоростью примерно 10 осцилляторов за интервал времени  $\Delta t = 1000$ .

На рис. 6, *c* показана часть временной зависимости меры когерентности на большом интервале наблюдений, достигающем  $t = 10^6$ . Видно, что с какого-то момента процесс колебаний приобретает почти стационарный характер, так как мера  $K$  стабилизируется в очень узком диапазоне, внутри которого она испытывает нерегулярные осцилляции. Такие отклонения могут быть связаны с указанным выше нетривиальным поведением фаз осцилляторов. Возможно, неизменное значение для  $K$  получим, если расширим временное окно  $\Delta t$  для вычисления корреляций (4). В этой связи мы можем утверждать, что наблюдаемые химерные состояния являются стационарными. По классификации [15] их можно отнести к классу дышащих подвижных (breathing moving) химер.

## Заключение

Для описания динамики системы из последовательно соединенных джозефсоновских контактов предложена система уравнений, в которой взаимодействие между контактами описывается нелокальной запаздывающей связью емкостного типа. Для решения системы использовалось ВЧ приближение.

На основе предложенной системы уравнений обнаружены несколько типов устойчивых когерентных режимов колебаний, а на обратной ветви ВАХ наблюдаются химерные состояния.

В системе уравнений без запаздывания связи также реализуются устойчивые когерентные колебания. На обратной ветви ВАХ наблюдаются режимы частичного выключения контактов, а в достаточно узком диапазоне параметров обнаружены химерные состояния, которые могут быть стационарными.

## Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 18-02-00912, а также программы Президиума РАН № I.1 „Нелинейная динамика: фундаментальные проблемы и приложения“, проект „Нелинейная динамика сверхпроводниковых и полупроводниковых сверхрешеток“.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Jeanneret B., Benz S.P. // Eur. Phys. J. Special Topics. 2009. Vol. 172. P. 181–206.
- [2] Kashiwagi T., Yamamoto T., Kitamura T., Asanuma K., Watanabe C., Nakade K., Yasui T., Saiwai Y., Shibano Y., Kubo H. et al. // Appl. Phys. Lett. 2015. Vol. 106. 092601.
- [3] Kinev N.V., Rudakov K.I., Baryshev A.M., Koshelets V.P. // J. Phys. Conf. Ser. 2018. Vol. 1124. 071001.
- [4] Galin M.A., Borodianskyi E.A., Kurin V.V., Shereshevsky I.A., Vdovicheva N.K., Krasnov V.M., Klushin A.M. // Phys. Rev. Appl. 2018. Vol. 9. N. 5. 054032.
- [5] Barends R., Kelly J., Megrant A., Sank D., Jeffrey E., Chen Y., Yin Y., Chiaro B., Mutus J., Neill C. // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 111. N 8. 080502.
- [6] Liu Q., Wang H., Zhang Q., Wang H., Peng W., Wang Zh. // Appl. Phys. Lett. 2017. Vol. 110. N 22. 222604.
- [7] Jung P., Butz S., Shitov S. V., Ustinov A.V. // Appl. Phys. Lett. 2013. Vol. 102. N 6. 062601.
- [8] Kolahchi M.R., Botha A.E., Shukrinov Yu.M. // J. Supercond. Nov. Magn. 2017. Vol. 30. P. 1659–1663.
- [9] Лухачев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985. 320 с.
- [10] Kuramoto Y., Battogtokh D. // Nonlinear Phenom. Complex Syst. 2002. Vol. 5. N 4. P. 380–385.
- [11] Mishra A., Saha S., Roy P.K., Kapitaniak T., Dana S.K. // Chaos. 2017. Vol. 27. N 2. 023110.
- [12] Курин В.В., Вдовичева Н.К., Шерешевский И.А. // Изв. вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59. С. 1030–1046.
- [13] Sakaguchi H., Kuramoto Y. // Prog. Theor. Phys. 1986. Vol. 76. N 3. P. 576–581.
- [14] Wiesenfeld K., Colet P., Strogatz S.H. // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76. N 3. P. 404–407.
- [15] Kemeth F.P., Haugland S.W., Schmidt L., Kevrekidis I.G., Krischer K. // Chaos. 2016. V. 26. N 9. 094815.
- [16] Larger L., Penkovsky B., Maistrenko Yu. // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 111. N 5. 054103.