01

Моделирование системы определения движения технологической платформы по данным позиционирования ГЛОНАСС и измерениям ньютонометров

© *А.С. Девятисильный, А.В. Шурыгин*

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия
E-mail: devyatis@dvo.ru

Поступило в Редакцию 6 мая 2019 г.
В окончательной редакции 6 мая 2019 г.
Принято к публикации 7 июня 2019 г.

Представлены модели реконструкции линейных и угловых параметров движения для бортовых встраиваемых систем ГЛОНАСС с двухпозиционным приемом данных и трехкомпонентным блоком ньютонометров в качестве измерителей удельных сил негравитационной природы. Существенным элементом конструкции математической модели является разработанная устойчивая процедура многократного численного дифференцирования, не зависящая от величины шага дискретизации задачи в условиях ограниченной точности вычислений и измерений. Приведены результаты численного эксперимента, верифицирующего исходные физические и математические представления для случая гиперзвукового движения.

Ключевые слова: ньютонометр, ГЛОНАСС, пульсар, гиперзвуковая скорость.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.18.48231.17867

В настоящей работе рассмотрен вариант генерации системы определения движения (СОД) в случае, когда ее информационная база представлена измерениями вектора удельных сил негравитационный природы, или кажущегося ускорения [1], полученными с помощью ньютонометров [2], и темпоральными данными о координатах места подвижного объекта, доставляемыми навигационной спутниковой системой (НСС) типа ГЛОНАСС/GPS. Область применения таких СОД — численно-аналитическое планирование, бортовое определение параметров движения и управление подвижными технологическими платформами (ТП) различного назначения и базирования (наземного, воздушного, космического).

Под „определением движения" здесь понимается решение двух задач: во-первых, определение кинематических параметров траектории (траекторная задача) и, во-вторых, определение параметров ориентации ТП в пространстве (задача ориентации).

Предлагаемая СОД отличается от известных интегрированных инерциально-спутниковых систем [3–5] отсутствием в ней гироскопических измерителей абсолютной угловой скорости вращения ТП и методологией математического моделирования и решения обеих задач.

Учитывая форму геоида, в качестве его признанной опорной модели примем эллипсоид вращения (эллипсоид Клеро) [2,3]. В соответствии с этим и с учетом стандартов ПЗ-90 (Россия) и WGS-89 (США) известным образом введем эллипсоидальную (геодезическую) систему отсчета с координатами $\{\varphi, \lambda, h\}$ — геодезические широта, долгота и высота над поверхностью эллипсоида.

В точке O, принадлежащей траектории и отождествляемой с подвижной ТП, разместим начало правого прямоугольного координатного трехгранника $Ox = Ox_1x_2x_3$ с осью Ox_3, направленной по нормали к поверхности эллипсоида, и осями Ox_1 и Ox_2, ориентированными на географические Восток и Север соответственно.

Обратимся теперь к кинематике, или к „геометрии движения" [1], точки O и обозначим через $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ вектор ее линейной скорости движения относительно твердой Земли, а через $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — вектор угловой скорости вращения трехгранника Ox, обусловленной криволинейностью траектории. Оба вектора рассматриваются в проекциях на оси Ox. Между координатами $\{\varphi, \lambda, h\}$ и скоростями достаточно просто установить следующие соотношения:

$$\omega_1 = -\dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \dot{\lambda}\cos\varphi,$$
$$\omega_3 = \dot{\lambda}\sin\varphi, \ \dot{\varphi} = \frac{v_2}{r_2}, \ \dot{\lambda} = \frac{v_1}{r_1\cos\varphi}, \ v_3 = \dot{r}_\psi, \qquad (1)$$

где

$$r_1 = a/(1 - e^2\sin^2\varphi)^{1/2} + h,$$
$$r_2 = a(1 - e^2)/(1 - e^2\sin^2\varphi)^{3/2} + h$$

— радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных главных нормалей сечений поверхности $h = \mathrm{const}$, проходящих через оси Ox_1 (сечение, касательное к параллели) и Ox_2 (меридиональное сечение); a и e — значения большой полуоси и эксцентриситета используемой модели земного эллипсоида; $r_\psi = (r_1^{-1}\sin^2\psi + r_2^{-1}\cos^2\psi)^{-1}$ — радиус кривизны нормального сечения эллипсоида при $h = \mathrm{const}$ в точке O, проходящего через вектор-проекцию $\mathbf{v}_p$ вектора $\mathbf{v}$ на плоскость Oy_1y_2 [2]; ψ — путевой угол движения, отсчитываемый по ходу часовой стрелки от оси Oy_2 к оси Oy_1, так что $v_1 = v_p\sin\psi$, $v_2 = v_p\cos\psi$, $v_p = |\mathbf{v}_p|$.

Под решением траекторной задачи далее понимается решение задачи оценки значений и их производных до порядка $n-1$ параметров φ, λ, h, r_1, r_2, r_ψ, v_1, v_2, v_3 и т.д. При этом математическая модель такой общей задачи рассматривается как совокупность моделей частных обратных задач вида „состояния–измерения“ порядка n, где каждая из частных моделей ассоциируется с некоторой функцией времени $\eta(t)$, аппроксимируемой моделью „состояний“ вида $\eta(t)=\eta_1$, $\dot\eta_1=\dot\eta_2=\dots=\dot\eta_n=0$, по ее темпорально измеряемым с инструментальными погрешностями значениям $\eta(t_k)$, $k=0,1,2,\dots$; $t_{k+1}=t_k+\tau$, $\tau=\text{const}$. Как видно, каждая частная модель „состояний“ — это система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с простейшей одноклеточной жордановой (с нулевыми диагональными элементами) матрицей [6] в качестве матрицы связи, имеющей индекс нильпотентности, равный n. Естественное обращение к такой модели существенно упростило дискретизацию задачи по времени и реализацию нейросетевого алгоритма динамического псевдообращения [7,8] калмановского типа с ядерным механизмом настройки [8] на фоне преодоления проблемы разрешимости задачи при больших значениях n и малых τ в условиях конечной точности вычислений и измерений [9].

Полагая далее, что траекторная задача решена [9], обратимся к динамике теперь уже материализованной точки O, т.е. к уравнениям Ньютона, которые с учетом вращения Земли с угловой скоростью $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)^T$ в осях трехгранника Ox представимы в следующем виде:

$$D_{ij}V_j=g_i+f_j,\quad V_j(0)=V_{0,i},\tag{2}$$

где $D_{ij}=\delta_{ij}d/dt+e_{ikj}(\omega_k+u_k)$ — оператор абсолютной производной; δ_{ij} — символ Кронекера; e_{ikj} — символ Леви-Чивита $(i,k,j=1,2,3$; по повторяющимся индексам производится суммирование); $u_1=0$, $u_2=u\cos\varphi$, $u_3=u\sin\varphi$; $\mathbf{V}=(V_1,V_2,V_3)^T$ — вектор абсолютной скорости, причем $V_1=v_1+u_2r_1$, $V_2=v_2$, $V_3=v_3$; $\mathbf{f}=(f_1,f_2,f_3)^T$ — вектор кажущегося ускорения; $\mathbf{g}=(g_1,g_2,g_3)^T$ — напряженность гравитационного поля Земли, известного с достаточной точностью.

Разрешая уравнение (2) относительно $\mathbf{f}$ покомпонентно и принимая во внимание (1), получаем

$$\begin{aligned}f_1&=\dot v_1+\frac{v_1}{r_1}(v_3-v_2\operatorname{tg}\varphi)-v_2u_3\left(\frac{r_1}{r_2}+1\right)\\&\quad+v_3u_2+u_2\dot r_1-g_1,\\f_2&=\dot v_2+\frac{v_1^2}{r_1}\operatorname{tg}\varphi+\frac{v_2u_3}{r_2}+2v_1u_3+u_2u_3r_1-g_2,\\f_3&=\dot v_3-\frac{v_1^2}{r_1}+\frac{v_2^2}{r_2}-2v_1u_2-u_2^2r_1-g_3.\end{aligned}\tag{3}$$

С учетом того, что все значения переменных в правой части (3) известны благодаря интерпретации данных спутникового позиционирования ТП, т.е. в результате решения траекторной задачи, вектор $\mathbf{f}$ также может быть вычислен. Таким образом, устанавливается и каузальность траектории.

Введем жестко связанный с подвижной ТП правый координатный трехгранник, в осях которого могут производиться векторные измерения, — приборный трехгранник $Oy=Oy_1Oy_2Oy_3$, в идеале совпадающий с трехгранником Ox, но реально связанный с ним матрицей ориентации $\mathbf{A}=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,3)$, так что $y_i=a_{ij}x_j$ и $x_j=a_{ji}y_i$. Суть задачи определения ориентации ТП в физическом пространстве состоит в оценке матрицы $\mathbf{A}$ или значений трех углов последовательного вращения трехгранника Oy из состояния $Oy\equiv Ox$ в текущее состояние. Учитывая, что под ТП здесь понимается объект искусственного происхождения, целесообразно считать, что оси трехгранника Oy совпадают со строительными осями ТП, и ввести углы Эйлера–Крылова — углы курса (α), крена (β) и тангажа (θ), соответствующие парциальным вращениям относительно осей Oy_3, Oy_2, Oy_1.

Для определения значений девяти элементов (направляющих косинусов) матрицы $\mathbf{A}$ (или трех углов Эйлера–Крылова), вообще говоря, достаточно найти систему двух неколлинеарных векторов, известных своими проекциями как в Ox, так и в Oy. В качестве двух таких векторов могут быть взяты орты известных звезд, пульсаров или иных объектов. Корректность решения проблемы в таком случае обусловливается возможностью пополнения системы двух векторов третьим, образуемым векторным произведением известных двух, и, таким образом, линейной независимостью этих трех векторов. В предельном случае, когда наблюдению в Ox и Oy доступен только один вектор, определить ориентацию Oy относительно Ox можно только с точностью до поворота Oy относительно Ox вокруг единственного вектора как оси.

Возможность вычисления $\mathbf{f}$, демонстрируемая системой уравнений (3), обращает внимание на методологически другую возможность — непосредственное измерение проекций $\mathbf{f}$ в трехграннике Oy с помощью тройки линейных ньютонометров; таким образом решается проблема выбора первого из двух требуемых векторов. Однако существенно отметить, что, оставаясь в рамках анонсируемой в настоящей работе задачи комплексирования измерений геодезических координат места объекта с помощью НСС и измерений ньютонометров, также можно строго решить проблему и второго вектора, но только в случае двухпозиционного (и более) бортового приема данных НСС. Вместе с тем, как показывают вычислительные эксперименты, и при однопозиционном приеме возможны вполне допустимые приближенные оценки углов, если отождествлять угол α с путевым углом ψ в рамках псевдоизмерения $\alpha=-\psi+\delta\alpha$, когда $\delta\alpha$ выступает в качестве небольшой по величине методологической погрешности, обусловленной взаимодействием подвижной ТП с внешней средой. В таком случае методом последовательных приближений достаточно просто и в пределах шага дискретизации τ решается система

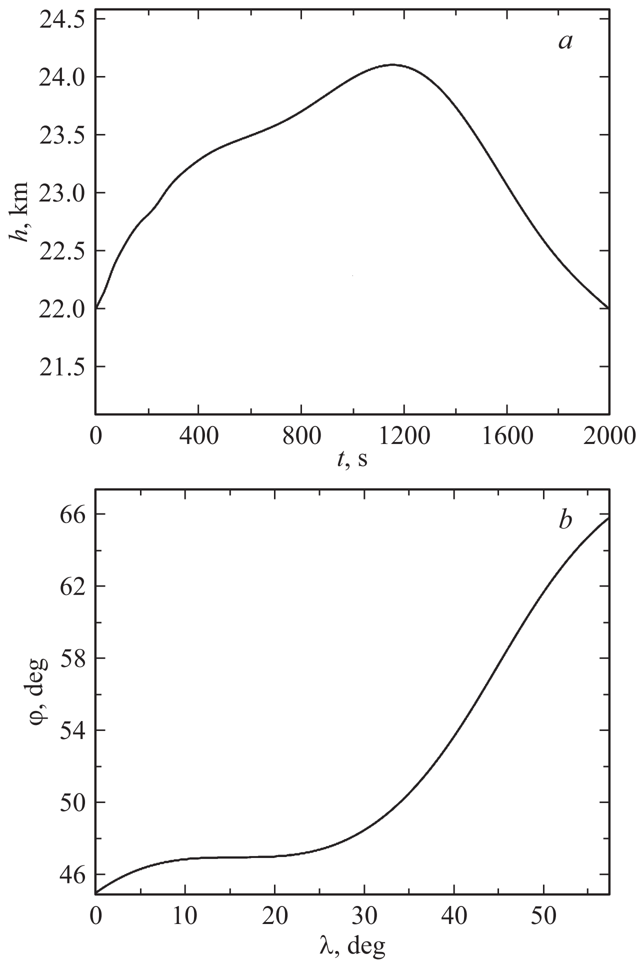

Рис. 1. Элементы траектории движения: высота (a), широта и долгота (b).

уравнений $\mathbf{f}_y = \mathbf{A}\mathbf{f}$, где $\mathbf{f}_y$ — вектор силы $\mathbf{f}$, измеряемой ньютонометрами, т. е. задача точечного оценивания углов β и θ. Здесь же, в пределах этого же шага, оценивается необходимое число производных углов α, β, θ и таким образом реализуется возможность оценки в трехграннике Oy вектора угловой скорости собственного вращения $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$, где $q_1 = \dot{\theta} + \dot{\alpha}\sin\beta$, $q_2 = \dot{\beta}\cos\theta + \dot{\alpha}\sin\theta\cos\beta$, $q_3 = \dot{\alpha}\cos\theta\sin\beta - \dot{\beta}\sin\theta$.

Подобным же образом вычисляется и вся тройка углов Эйлера–Крылова, т. е. $\{\alpha, \beta, \theta\}$, и дополнительно угол курсового дрейфа $\delta\alpha = \psi - \alpha$, если на борту ТП осуществляется двухпозиционный прием спутниковой навигационной информации и решается система уравнений $\{\mathbf{f}_y = \mathbf{A}\mathbf{f}, \mathbf{l}_y = \mathbf{A}\mathbf{l}\}$, где $\mathbf{l}_y$ — технологический (известный) вектор места второго приемника НСС в Oy, а $\mathbf{l}$ — этот же вектор в Ox, вычисляемый по данным его позиционирования НСС. Очевидно, возможен и отказ от исходной декларируемой бортовой системы измерителей и пополнения ее астровизирами известных звезд или пульсаров.

В общем случае, если вектор $\mathbf{q}$ определен, открывается возможность и для оценки абсолютной угловой скорости ТП $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ в проекциях на оси Oy, а именно $\mathbf{p} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u})_x + \mathbf{q}$, где индекс x указывает на то, что вектор $\boldsymbol{\omega} + \mathbf{u}$ представлен своими проекциями в трехграннике Ox. Таким образом, по сути, реализуется безгироскопный датчик угловых скоростей, что с учетом возможности качественного дифференцирования вектора $\mathbf{p}$ открывает путь для оценки главного момента сил — вектора $\mathbf{m}$, обусловливающего совместно с вектором $\mathbf{f}$ движение реальной ТП. Действительно, $m_i = J_{ij}\dot{p}_j + (e_{ikj}p_k)J_{js}p_s$, где $\mathbf{J} = (J_{js})$ — известный тензор инерции ТП, $i, j, k, s = 1, 2, 3$.

На рис. 1 представлена траектория ТП, движущейся с гиперзвуковой скоростью $v = 3560$ m/s (12M, $\mathrm{M}_{h=20\,\mathrm{km}} \approx 298$ m/s). Данные позиционирования поступают с шагом $\tau = 0.2$ s, содержат погрешности со среднеквадратическими значениями (СКЗ) $\sigma_\varphi = \sigma_\lambda = \sigma_h = 1.5$ m и временами корреляции $\tau_c = 4$ s. На рис. 2, a представлены оценки сил, выполняемые по формулам (3); СКЗ погрешностей оценивания $\sigma_{f_1} = \sigma_{f_2} = \sigma_{f_3} = 0.006\,\mathrm{m/s^2}$. На рис. 2, b представлены оценки углов α, β, θ; СКЗ погрешностей оценивания $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\theta = 0.01^\circ$. При этом погрешности шумов ньютонометров характеризуются СКЗ $\sigma_{f_1} = \sigma_{f_2} = \sigma_{f_3} = 0.01\,\mathrm{m/s^2}$ и временами корреля-

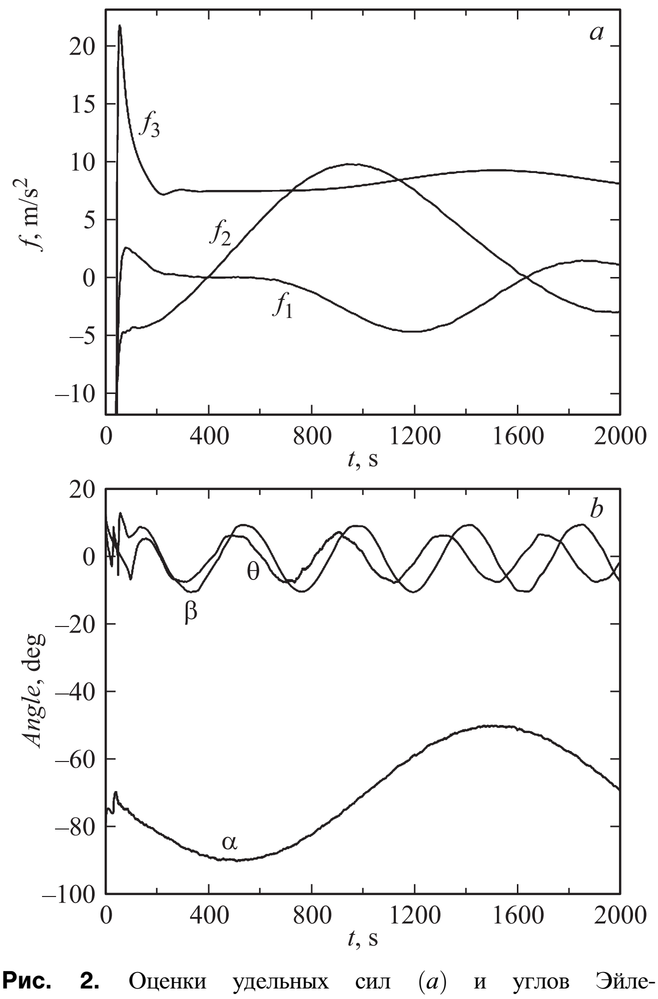

Рис. 2. Оценки удельных сил (a) и углов Эйлера–Крылова (b).

ции $\tau_c = 1.5\,\mathrm{s}$; место второго приемника НСС в Oy: $\mathbf{y} = (0, 4\,\mathrm{m}, 0)^T$.

Таким образом, как подтверждается результатами численного исследования, предложенная модель безгироскопной гибридной инерциально-спутниковой системы определения движения обладает высокой эффективностью решения как траекторной задачи, так и задачи пространственной ориентации и актуальна для управления высокоскоростными объектами.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Ишлинский А.Ю.* Классическая механика и силы инерции. М.: Едиториал УРСС, 2018. 320 с.

[2] *Андреев В.Д.* Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.

[3] *Перов А.И., Харисов В.Н.* ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования. М.: Радиотехника, 2010. 800 с.

[4] *Groves P.* Challenges of integrated navigation // Proc. of the 31st Int. Technical Meeting of the satellite division of the institute of navigation. Miami, 2018. P. 3237–3264.

[5] *Mahboub V., Mohammadi D.* // J. Navigation. 2018. V. 71. N 4. P. 971–988.

[6] *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 656 с.

[7] *Осипов Ю.С., Кряжемский А.В.* // Вестн. РАН. 2006. Т. 76. № 7. С. 615–624.

[8] *Девятисильный А.С.* // ЖТФ. 2015. Т. 85. В. 10. С. 5–8.

[9] *Девятисильный А.С., Шурыгин А.В.* // Геодезия и картография. 2018. Т. 79. В. 1. С. 47–51.