03

Резонансное взаимодействие переходного излучения заряженной частицы с периодически модулированным в пространстве анизотропным магнитодиэлектрическим заполнением волновода

Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова,
117997 Москва, Россия
e-mail: gevor_mesi@mail.ru

Поступила в редакцию 03.02.2019 г.
В окончательной редакции 20.03.2019 г.
Принята к публикации 24.05.2019 г.

Рассмотрены особенности взаимодействия переходного излучения заряженной частицы с периодически модулированной в пространстве анизотропной магнитодиэлектрической средой в волноводе в частотной области „сильного" (резонансного) взаимодействия излучения с модулированной средой. Предполагается, что заряженная частица движется с постоянной скоростью перпендикулярно оси волновода. Получены аналитические выражения для энергии переходного излучения поперечно-электрического (TE) и поперечно-магнитного (TM) полей в волноводе в области сильного взаимодействия с точностью до малых индексов модуляции в первой степени включительно. Найдены аналитические выражения для частоты и для ширины частотной области сильного взаимодействия. Анализируется возможность возникновения черенковского излучения в области сильного взаимодействия для случая прямоугольного волновода.

Ключевые слова: волновод, модулированная среда, черенковское излучение.

DOI: 10.21883/OS.2019.09.48198.38-19

Введение

Взаимодействие переходного излучения заряженных источников, движущихся в волноводе с периодически модулированным заполнением, было рассмотрено в наших ранних работах [1–3]. В работе [4] была решена задача переходного излучения заряженной частицы при ее равномерном движении перпендикулярно оси волновода с анизотропным магнитодиэлектрическим заполнением, периодически модулированным в пространстве. При этом результаты получены в частотной области „слабого" взаимодействия излучения с модулированным заполнением. Настоящая работа посвящена выяснению особенностей переходного излучения с модулированным заполнением волновода в частотной области сильного взаимодействия.

Постановка задачи и ее решение

Пусть ось регулярного волновода произвольного поперечного сечения совпадает с осью некоторой прямоугольной системы координат. Предположим, что волновод заполнен модулированной анизотропной магнитодиэлектрической средой и диэлектрическая и магнитная проницаемости заполнения выражаются формулами

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2(z) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2(z) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где ε_1, μ_1 — постоянные, а $\varepsilon_2(z)$ и $\mu_2(z)$ имеют вид

$$\varepsilon_2(z) = \varepsilon_2^0(1 + m_\varepsilon \cos k_0 z),$$
$$\mu_2(z) = \mu_2^0(1 + m_\mu \cos k_0 z). \quad (2)$$

Отметим, что в (2) m_ε и m_μ — малые индексы модуляции ($m_\varepsilon \ll 1$, $m_\mu \ll 1$, $m_\varepsilon \approx m_\mu$), k_0 — волновое число волны модуляции, ε_2^0 и μ_2^0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды в волноводе в отсутствие волны модуляции.

Рассмотрим частицу с зарядом q, которая движется с постоянной скоростью $\mathbf{v} = \{v, 0, 0, \}$ в перпендикулярном к оси волновода направлении и пересекает стенки волновода в точках $A_1(x_1, y_1, 0)$ и $A_2(x_2, y_0, 0)$. В работе [4], описывая поперечно-электрическое (TE) и поперечно-магнитное (TM) поля переходного излучения заряда с помощью продольных составляющих магнитного и электрического векторов (H_z, E_z) и решая соответствующие волновые уравнения с учетом (1), получены аналитические выражения для TE- и TM-полей переходного излучения заряженной частицы в области слабого взаимодействия излучения с волной модуляции заполнения волновода.

Как известно [1,2], в случае выполнения условия Вульфа-Брэгга первого порядка [5] при интерференции отраженных от неоднородностей модулированного заполнения электромагнитных волн вокруг определенной частоты имеет место сильное (резонансное) взаимодействие между волной переходного излучения и волной модуляции заполнения, и происходит интенсивный обмен энергией между указанными выше волнами. В поставленной задаче сильное взаимодействие возникает, когда величины

$$\hat{\theta}_0^n = \frac{4\mu_1(\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_2^0\omega^2 - \hat{\lambda}_n^2)}{k_0^2\mu_2^0}, \tag{3}$$

$$\theta_0^n = \frac{4\varepsilon_1(\varepsilon_0\mu_0\mu_1\varepsilon_2^0\omega^2 - \lambda_n^2)}{k_0^2\varepsilon_2^0}, \tag{4}$$

входящие в дисперсионные уравнения задачи

$$\hat{\mu}_n^2 \simeq \hat{\theta}_0^n + \frac{(\hat{\theta}_1^n)^2}{(\hat{\mu}_n - 2)^2 - \hat{\theta}_0^n} + \frac{(\hat{\theta}_1^n)^2}{(\hat{\mu}_n + 2)^2 - \hat{\theta}_0^n}, \tag{5}$$

$$\mu_n^2 \simeq \theta_0^n + \frac{(\theta_1^n)^2}{(\mu_n - 2)^2 - \theta_0^n} + \frac{(\theta_1^n)^2}{(\mu_n + 2)^2 - \theta_0^n}, \tag{6}$$

близки к единице ($\hat{\theta}_0^n \simeq 1$, $\theta_0^n \simeq 1$), или, точнее, при выполнении условий [6]

$$|1 - \hat{\theta}_0^n| \le \hat{\delta}_n, \quad |1 - \theta_0^n| \le \delta_n, \tag{7}$$

где

$$\hat{\delta}_n \simeq \frac{\hat{\theta}_1^n}{2\sqrt{2}}, \quad \delta_n \simeq \frac{\theta_1^n}{2\sqrt{2}}, \tag{8}$$

$$\hat{\theta}_1^n \simeq \frac{2\mu_1\hat{\lambda}_n^2}{k_0^2\mu_2^0}\, m_\mu, \quad \theta_1^n \simeq \frac{2\varepsilon_1\lambda_n^2}{k_0^2\varepsilon_2^0}\, m_\varepsilon. \tag{9}$$

Заметим, что в (3) и (4) $\hat{\lambda}_n$ и λ_n — собственные значения краевых задач Неймана и Дирихле для поперечного сечения волновода, $\varepsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$ F/m — электрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ — магнитная постоянная.

Здесь уместно отметить, что на важность исследования особенностей переходного излучения в частотной области сильного взаимодействия было указано уже в работах [7–9].

В области сильного взаимодействия дисперсионные уравнения (5) и (6) имеют комплексные решения вида [1–2]

$$\hat{\mu}_n \simeq 1 + i\,\frac{\hat{\theta}_1^n}{2}, \quad \mu_n \simeq 1 + i\,\frac{\theta_1^n}{2}. \tag{10}$$

Выражения для потери энергии на переходное излучение движущейся заряженной частицы на её траектории от x_1 до x_2 можно получить с помощью вектора Пойнтинга. Вычисления приводят к следующим выражениям (учитываем три пространственные гармоники):

$$S_n^{TE} = \frac{\mu_0\mu_1 k_0 q^2}{4\pi\hat{c}_0^n\hat{\lambda}_n^2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-1}^{1}\hat{c}_k^n\right)\frac{\omega}{\hat{\mu}_n}\,|\hat{B}_n|^2 d\omega, \tag{11}$$

$$S_n^{TM} = \frac{k_0^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\nu^2 c_0^n\lambda_n^2}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\left[i\sum_{k=-1}^{1}(\mu_n + 2k)c_k^n\right]|B_n|^2\omega d\omega, \tag{12}$$

где

$$\hat{c}_{\pm1}^n = \frac{\hat{c}_0^n\hat{\theta}_1^n}{4(1 \pm \sqrt{\hat{\mu}_n})}, \quad \hat{B}_n = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\hat{\psi}_n(x,y)}{\partial y}\bigg|_{y=y_0} e^{i\frac{\omega}{\nu}x}dx, \tag{13}$$

$$c_{\pm1}^n = \frac{c_0^n\theta_1^n}{4(1 \pm \sqrt{\mu_n})}, \quad B_n = \int_{x_1}^{x_2}\psi_n(x,y)\big|_{y=y_0} e^{i\frac{\omega}{\nu}x}dx, \tag{14}$$

$\hat{\psi}_n(x,y)$ и $\psi_n(x,y)$ — собственные функции краевых задач Неймана и Дирихле для поперечного сечения волновода, $\hat{c}_0^n$ и c_0^n определяются из условий нормировки. Из (11) и (12) с учетом (9) и (10) можно получить выражения для потери энергии на переходное излучение в области сильного взаимодействия в виде

$$S_{n,s}^{TE} = \frac{\mu_0\mu_1 k_0 q^2}{4\pi\hat{\lambda}_n^2}\,\mathrm{Re}\int_{(\Delta\omega_s)^{TE}}\left(1 + \frac{3\mu_1\hat{\lambda}_n^2}{4k_0^2\mu_2^0}\,m_\mu\right)|\hat{B}_n|^2\omega d\omega, \tag{15}$$

$$S_{n,s}^{TM} = \frac{3k_0^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\nu^2\lambda_n^2}\,\mathrm{Re}\int_{(\Delta\omega_s)^{TM}}\left(1 + \frac{2\varepsilon_1\lambda_n^2}{3k_0^2\varepsilon_2^0}\,m_\varepsilon\right)|B_n|^2\omega d\omega. \tag{16}$$

Как видно из (15) и (16), интегрирование распространяется на частотную область сильного взаимодействия $\Delta\omega_s$. Частоты сильного взаимодействия для TE- и TM-волн определяются, как отмечалось выше, из условий:
для TE-волны

$$4\mu_1(\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_2^0\omega^2 - \hat{\lambda}_n^2) = k_0^2\mu_2^0, \tag{17}$$

для TM-волны

$$4\varepsilon_1(\varepsilon_0\mu_0\mu_1\varepsilon_2^0\omega^2 - \lambda_n^2) = k_0^2\varepsilon_2^0 \tag{18}$$

и определяются формулами

$$\omega_s^{TE} = \frac{k_0}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_1}}\left(1 + \frac{4\mu_1\hat{\lambda}_n^2}{\mu_2^0 k_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

$$\omega_s^{TM} = \frac{k_0}{2\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_1}}\left(1 + \frac{4\varepsilon_1\lambda_n^2}{\varepsilon_2^0 k_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Заметим, что в области сильного взаимодействия имеют место следующие неравенства (см., (7) и (8)):

для TE-волны

$$1-\frac{\hat{\theta}_1^n}{2\sqrt{2}} \le \frac{4\mu_1}{k_0^2\mu_2^0}(\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_2^0\omega^2-\hat{\lambda}_n^2) \le 1+\frac{\hat{\theta}_1^n}{2\sqrt{2}}, \quad (21)$$

для TM-волны

$$1-\frac{\theta_1^n}{2\sqrt{2}} \le \frac{4\varepsilon_1}{k_0^2\varepsilon_2^0}(\varepsilon_0\mu_0\mu_1\varepsilon_2^0\omega^2-\lambda_n^2) \le 1+\frac{\theta_1^n}{2\sqrt{2}}, \quad (22)$$

Если теперь учесть (7)–(9), (17) и (18), то из (21) и (22) для ширины частотных областей сильного взаимодействия получим

$$(\Delta\omega_s)^{TE} = \frac{\mu_1\hat{\lambda}_n^2}{4\sqrt{2}\sqrt{\mu_2^0\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_1(k_0^2\mu_2^0+4\mu_1\hat{\lambda}_n^2)}}\, m_\mu, \quad (23)$$

$$(\Delta\omega_s)^{TM} = \frac{\varepsilon_1\lambda_n^2}{4\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_2^0\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_1(k_0^2\varepsilon_2^0+4\varepsilon_1\lambda_n^2)}}\, m_\varepsilon. \quad (24)$$

Формулы (23) и (24) показывают, что ширина частотных областей сильного взаимодействия мала и пропорциональна индексам модуляции в первой степени.

Рассмотрим частный случай прямоугольного волновода, стенки которого определяются уравнениями $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ $(a>0,\ b>0)$. Пользуясь известными формулами для ортонормированных собственных функций $\hat{\psi}_n(x,y)$ и $\psi_n(x,y)$ краевых задач Неймана и Дирихле для поперечного сечения волновода [10] и проводя интегрирование по координате χ в (13) и (14), для величин $|\hat{B}_n|^2$ и $|B_n|^2$ получим

$$|\hat{B}_n|^2 = \frac{4\pi^2n^2\omega^2\delta_n\delta_m}{ab^3\nu^2}\sin^2\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right)\frac{\sin^2\left[\left(\frac{\pi m}{a}-\frac{\omega}{\nu}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2-\frac{\omega^2}{\nu^2}\right]^2}, \quad (25)$$

$$|B_n|^2 = \frac{16\pi^2m^2}{a^3b}\sin^2\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right)\frac{\sin^2\left[\left(\frac{\pi m}{a}-\frac{\omega}{\nu}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2-\frac{\omega^2}{\nu^2}\right]^2}, \quad (26)$$

где $\delta_j=2,\ j\ne 0,\ \delta_0=1$. Подстановка (25) и (26) в (15) и (16) приводит к следующим выражениям для энергии переходного излучения в области сильного взаимодействия:

$$S_{n,m,s}^{TE} = \frac{4\pi\mu_0\mu_1q^2n^2\delta_n\delta_m}{ab^3\nu^2\hat{\lambda}_{n,m}^2}\sin^2\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right)$$
$$\times \operatorname{Re}\int\limits_{(\Delta\omega_s)^{TE}}\left(1+\frac{3\mu_1\hat{\lambda}_{n,m}^2}{4k_0^2\mu_2^0}\,m_\mu\right)\frac{\sin^2\left[\left(\frac{\pi m}{a}-\frac{\omega}{\nu}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2-\frac{\omega^2}{\nu^2}\right]^2}\,\omega^3d\omega,$$

$$S_{n,m,s}^{TM} = \frac{6\pi k_0^2q^2m^2}{\varepsilon_0\varepsilon_1a^3b\nu^2\lambda_{n,m}^2}\sin^2\left(\frac{\pi n y_0}{b}\right)$$
$$\times \operatorname{Re}\int\limits_{(\Delta\omega_s)^{TM}}\left(1+\frac{2\varepsilon_1\lambda_{n,m}^2}{3k_0^2\varepsilon_2^0}\,m_\varepsilon\right)\frac{\sin^2\left[\left(\frac{\pi m}{a}-\frac{\omega}{\nu}\right)\frac{a}{2}\right]}{\left[\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2-\frac{\omega^2}{\nu^2}\right]^2}\,\omega d\omega,$$

где

$$\hat{\lambda}_{n,m}=\lambda_{n,m}=\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}. \quad (27)$$

Представляет определенный интерес выяснить условия, при выполнении которых возможно возникновение излучения Вавилова-Черенкова в области сильного взаимодействия между волной переходного излучения и волной модуляции заполнения волновода. Подставляя значение частоты черенковского излучения [11] в выражения (17) и (18) с учетом (27) и приравнивая ширину черенковского пика $\Delta\omega_{\mathrm{Cher}}\simeq 4\pi\nu/a$ [4,11] и ширину частотной области сильного взаимодействия $\Delta\omega_s$ (см., (23) и (24)), получим для TE-волны

$$k_0^2=\frac{4\mu_1}{\mu_2^0}\left[\frac{\pi^2m^2}{a^2}(\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_2^0\nu^2-1)-\frac{\pi^2n^2}{b^2}\right],$$

$$\nu=\frac{a\hat{\lambda}_n^2}{16\sqrt{2}\pi\mu_2^0\varepsilon_1\varepsilon_0\mu_0\omega_s^{TE}}\,m_\mu, \quad (28)$$

для TM-волны

$$k_0^2=\frac{4\varepsilon_1}{\varepsilon_2^0}\left[\frac{\pi^2m^2}{a^2}(\varepsilon_0\mu_0\mu_1\varepsilon_2^0\nu^2-1)-\frac{\pi^2n^2}{b^2}\right],$$

$$\nu=\frac{a\lambda_n^2}{16\sqrt{2}\pi\varepsilon_2^0\mu_1\varepsilon_0\mu_0\omega_s^{TM}}\,m_\varepsilon. \quad (29)$$

Теперь из условий возникновения черенковского излучения [4] $(\varepsilon_0\mu_0\varepsilon_1\mu_2^0\nu^2>1$ для TE-волны и $\varepsilon_0\mu_0\mu_1\varepsilon_2^0\nu^2>1$ для TM-волны) с учетом (28), (29), (19) и (20) следуют неравенства:
для TE-волны

$$\frac{a^2\hat{\lambda}_n^4\mu_1}{128\pi^2(k_0^2\mu_2^0+4\mu_1\hat{\lambda}_n^2)}\,m_\mu^2>1, \quad (30)$$

для TM-волны

$$\frac{a^2\lambda_n^4\varepsilon_1}{128\pi^2(k_0^2\varepsilon_2^0+4\varepsilon_1\lambda_n^2)}\,m_\varepsilon^2>1. \quad (31)$$

Для проведения численных оценок левых частей неравенств (30) и (31) рассмотрим следующий пример. Пусть $\varepsilon_1\simeq\varepsilon_2^0\simeq 2$, $\mu_1\simeq\mu_2^0\simeq 2$, $m_\mu\sim 10^{-2}$, $m_\varepsilon\sim 10^{-2}$, $\hat{\lambda_n}=\lambda_n\sim 314\,\mathrm{m}^{-1}$, $k_0\sim 10^7\,\mathrm{m}^{-1}$, $a\sim 10^{-2}\,\mathrm{m}$. Тогда оценки приводят к следующему:

$$\frac{a^2\hat{\lambda}_n^4\mu_1}{128\pi^2(k_0^2\mu_2^0+4\mu_1\hat{\lambda}_n^2)}\,m_\mu^s$$
$$\sim\frac{a^2\lambda_n^2\varepsilon_1}{128\pi^2(k_0^2\varepsilon_2^0+4\varepsilon_1\lambda_n^2)}\,m_\varepsilon^2\sim 2\cdot 10^{-15}\ll 1. \quad (32)$$

Из (32) следует, что в частотной области сильного взаимодействия невозможно возникновение излучения Вавилова-Черенкова.

Заключение

Полученные в работе результаты показывают, что ширина частотной области сильного взаимодействия волны излучения с волной модуляции мала и пропорциональна индексам модуляции заполнения волновода в первой степени. В выражениях для энергии переходного излучения в области сильного взаимодействия под интегралами добавляются члены, пропорциональные индексам модуляции в первой степени. В работе показано, что в области сильного взаимодействия в спектре переходного излучения отсутствует пик черенковского излучения, так как не удовлетворяются условия его возникновения.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Геворкян Э.А.* // Успехи современной радиоэлектроники. 2006. № 1. С. 3–29.

[2] *Gevorkyan E.A.* // Wave propagation. / Ed. by Petrin A. IntechOpen, 2011. P. 267; [Электронный ресурс] Режим доступа: http: www.intechopen.com

[3] *Геворкян Э.А.* // T — Comm. Телекоммуникация и транспорт. 2016. Т. 10. № 10. С. 28–32.

[4] *Геворкян Э.А.* // Опт. и спектр. 2018. Т. 125. № 2. С. 218–222. doi 10.21883/OS.2018.08.46363.258-17; *Gevorkyan E.A.* // Opt. Spectrosc. 2018. V. 125. N 2. P. 227. doi 10.1134/SOO30400X18080076

[5] *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1973. 719 с.

[6] *Барсуков К.А., Геворкян Э.А.* // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28. В. 2. С. 237.

[7] *Аматуни А.Ц., Корхмазян Н.А.* // Известия АН Армянской ССР. Серия Физика. 1960. Т. 13. В. 5. С. 55.

[8] *Cassey K.F., Yeh C., Kaprielian Z.A.* // Phys. Rev. B. 1965. V. 140. N 3. P. 768.

[9] *Гарибян Г.М., Ян Ши.* // Научное сообщение № 16 (73). ЕФИ. Ереван, 1978. 33 с.

[10] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2004. 798 с.

[11] *Геворкян Э.А.* // Опт. и спектр. 2015. Т. 119. № 2. С. 302. doi 10.7868/S0030403415080085; *Gevorkyan E.A.* // Opt. Spectrosc. 2015. V. 119. N 2. P. 286. doi 10.1134/SOO30400X15080081