Журнал технической физики, 2019, том 89, вып. 10

01

Взаимная энергия колец Гаусса

© Б.П. Кондратьев,[1,2] В.С. Корноухов[1]

[1] Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119234 Москва, Россия

[2] Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН,
196140 Санкт-Петербург Россия
e-mail: work@boris-kondratyev.ru

*Поступило в Редакцию 7 февраля 2019 г.
В окончательной редакции 7 февраля 2019 г.
Принято к публикации 11 марта 2019 г.*

Поставлена и решена задача о взаимной потенциальной энергии двух эллиптических гравитирующих (или заряженных статическим электрическим зарядом) колец Гаусса. Кольца компланарные, а их линии апсид в общем случае имеют наклон друг к другу. Взаимная энергия колец ищется в квадратичном приближении по степеням эксцентриситетов колец e_1 и e_2. На первом этапе решения задачи потенциал кольца Гаусса представлен рядом по степеням эксцентриситета и записан в точках другого эллиптического кольца. Этот результат представляет также самостоятельный теоретический интерес. Установлено, что в найденном выражении взаимной энергии колец отсутствуют линейные (по e_1 и e_2) члены, а коэффициенты второго порядка при e_1^2 и e_2^2 равны друг другу. От угла наклона линий апсид зависит один только смешанный член при $e_1 e_2$. Этот результат позволяет весьма просто найти момент сил между кольцами, который потребуется для изучения малых взаимный поворотных колебаний колец Гаусса.

Ключевые слова: гравитация, эллиптические кольца, взаимная потенциальная энергия.

DOI: 10.21883/JTF.2019.10.48161.41-19

Введение

Изучение силовых полей гравитирующих (или заряженных статическим электрическим зарядом) колец и торов составляет большой класс задач в математической физике. Актуальность этой проблемы очевидна, так как кольца имеют многие объекты Солнечной системы: от планет-гигантов до астероидов [1] и карликовых планет [2,3]. Однако до сих пор нерешенной остается важная для приложений задача нахождения потенциала, а также взаимной потенциальной энергии колец.

Следует подчеркнуть, что задачи по изучению силовых полей неоднородных эллиптических колец являются сложными и трудоемкими. Это в полной мере относится и к задаче о взаимной энергии эллиптических колец Гаусса, решению которой и посвящена настоящая работа.

Напомним, что кольца Гаусса были введены в той области физики и небесной механики, которая известна как теория возмущений. Рассмотрим движение спутника массой m_1 вокруг массивного центрального тела. Это движение происходит по эллипсу с большой полуосью a_1 , уравнение которого в полярных координатах с началом в первом (активном) фокусе имеет вид

$$r_1(\upsilon_1) = \frac{a_1(1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos \upsilon_1}, \tag{1}$$

где υ_1 — угол истинной аномалии, e_1 — эксцентриситет орбиты. Для решения сложных задач теории возмущений Гаусс предложил заменять точечную массу спутника эллиптическим кольцом, которое получается при распределении массы спутника вдоль его орбиты с одномерной плотностью вещества, обратной скорости движения спутника на данном участке траектории. Элемент массы на таком кольце оказывается равным [4]

$$dm_1 = \frac{m_1}{2\pi} \frac{(1 - e_1^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e_1 \cos \upsilon_1)^2}\, d\upsilon_1. \tag{2}$$

В частном случае, когда $e_1 = 0$ и кольцо превращается в однородный круглый обруч радиуса R пространственный потенциал был хорошо известен

$$\varphi(r, x_3) = \frac{2GM}{\pi\sqrt{(R + r)^2 + x_3^2}} K\left(\sqrt{\frac{4Rr}{(R + r)^2 + x_3^2}}\right). \tag{3}$$

Однако пространственный потенциал эллиптического кольца Гаусса долгое время оставался неизвестным и в общем аналитическом виде принципиально новым методом был получен в работе [4] (см. также [5]):

$$\varphi_{\text{ring}}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2Gm}{\pi\sqrt{\lambda - \nu}} \{\mathrm{K}(k) + \frac{1}{a_1} \times \sqrt{\frac{(a_1^2 + \lambda)(a_1^2 + \mu)}{a_1^2 + \nu}} [\Pi(n, k) - \mathrm{K}(k)]\},$$

$$n = \frac{a_1^2 + \nu}{\nu - \lambda},\; k = \sqrt{\frac{\mu - \nu}{\lambda - \nu}}. \tag{4}$$

Здесь (ν, μ, λ) — эллипсоидальные координаты пробной точки (x_1, x_2, x_3), $\mathrm{K}(k)$ и $\Pi(n, k)$ — стандартные полные эллиптические интегралы первого и третьего рода соответственно.

Чтобы найти взаимную потенциальную энергию двух колец Гаусса, необходимо решить очень сложную задачу. Эту задачу мы решаем здесь в два этапа: вначале находим разложение в ряд потенциала кольца Гаусса по степеням эксцентриситета, а затем находим взаимную гравитационную энергию двух компланарных колец Гаусса с несовпадающими линиями апсид.

Внутренний потенциал кольца Гаусса в точках его главной плоскости

Прежде всего, запишем потенциал (4) в его главной плоскости Ox_1x_2 в тех пробных точках x_1, x_2 , которые расположены внутри кольца Гаусса [4]:

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{2Gm_1}{\pi\sqrt{-\nu}}\Big\{K(k) + \frac{e_1a_1(x_1+e_1a_1)}{a_1^2+\nu} \times [\Pi(\tilde{n}, k) - K(k)]\Big\}. \tag{5}$$

Здесь $K(k)$ и $\Pi(k)$ — эллиптические интегралы Лежандра первого и третьего рода соответственно, модуль k и параметр $\tilde{n}$ равны

$$k = \sqrt{\frac{\mu-\nu}{-\nu}};\ \tilde{n} = \frac{a_1^2+\nu}{\nu}. \tag{6}$$

Кроме того, μ и ν — эллиптические координаты пробной точки, связанные с декартовыми координатами x_1, x_2 соотношениями

$$\mu+\nu = x_1^2 + 2e_1a_1x_1 + x_2^2 - a_1^2 - a_2^2,$$

$$\mu\nu = a_1^2a_2^2\left[1 - \frac{x_1^2+2e_1a_1x_1}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right]. \tag{7}$$

Вначале мы представим внутренний потенциал кольца Гаусса (5) в виде ряда по степеням эксцентриситета e_1 до квадрата включительно. После многих расчетов и преобразований этот потенциал получим в виде

$$\varphi(x_1, x_2) \approx \frac{2Gm_1}{\pi a_1}\Big\{K(k) + \frac{x_1}{k^2a_1}\left[\frac{2-k^2}{1-k^2}E(k) - 2K(k)\right]e_1 + \left[C_1E(k) - C_2K(k)\right]e_1^2\Big\}, \tag{8}$$

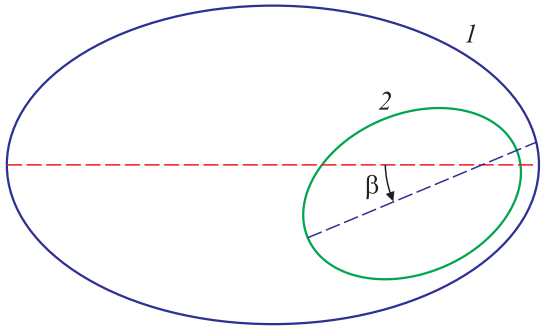
где модуль эллиптических интегралов

$$k = \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{a_1}, \tag{9}$$

а входящие в (8) коэффициенты C_1 и C_2 суть

$$C_1 = \frac{1}{k^2}\left[1 + \frac{x_2^2}{a_1^2k^2(1-k^2)}\right] - \frac{(6-11k^2+3k^4)x_1^2}{2a_1^2k^4(1-k^2)^2},$$

$$C_2 = \frac{(2-k^2)x_1^2+4x_2^2}{2a_1^2k^4} - \frac{(6-8k^2+k^4)x_1^2}{2a_1^2k^4(1-k^2)}. \tag{10}$$



Два софокусных (внешнее *1* и внутреннее *2*) эллиптических кольца. Штрихами показаны линии апсид колец, угол задает наклон линий апсид.

Подчеркнем, что в приближенном выражении (8) отсутствует эллиптический интеграл третьего рода $\Pi(n, k)$ (зато появился эллиптический интеграл Лежандра второго рода $E(k)$), что упрощает дальнейшие очень трудоемкие расчеты.

Потенциал кольца Гаусса на геометрическом месте точек другого эллипса

Далее для вычисления взаимной энергии двух колец необходимо, как уже говорилось, записать потенциал (8) на геометрическом месте точек второго кольца Гаусса, расположенного внутри первого. Уравнение этого второго кольца в прежней системе полярных координат имеет вид

$$r_2(\upsilon_2) = \frac{a_2(1-e_2^2)}{1+e_2\cos\upsilon_2}. \tag{11}$$

Далее потребуем, чтобы рассматриваемые кольца Гаусса в общем случае были несоосными и их линии апсид располагались под углом β (см. рисунок).

Без ограничения общности считаем, что поворот на угол β получило только второе (внутреннее) кольцо. Тогда декартовы координаты точек на этом кольце до и после поворота (соответственно (x_1, x_2) и (x_1', x_2')) будут связаны соотношениями

$$x_1 = x_1'\cos\beta - x_2'\sin\beta,$$

$$x_1 = x_2'\cos\beta + x_1'\sin\beta. \tag{12}$$

Подставляя сюда выражения

$$x_1' = r_2\cos\upsilon_2,\ x_2' = r_2\sin\upsilon_2, \tag{13}$$

где радиус-векторы $r_1(\upsilon_1)$ и $r_2(\upsilon_2)$ даны в (1) и (11), находим связь между координатами в виде

$$x_1 = r_2\cos(\upsilon_2+\beta),\ x_2 = r_2\sin(\upsilon_2+\beta). \tag{14}$$

Заметим, при повороте системы координат (12) модуль эллиптических интегралов, входящих в (8):

$$k = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{a_1} = \frac{r_2}{a_1}, \tag{15}$$

не изменит своего значения. Обозначив отношение главных полуосей колец через

$$n = \frac{a_2}{a_1} \leq 1, \tag{16}$$

запишем модуль (15) в виде

$$k = n\,\frac{1 - e_2^2}{1 + e_2 \cos \upsilon_2}, \tag{17}$$

или в требуемом здесь квадратичном приближении по эксцентриситетам

$$k \approx n[1 - e_2 \cos \upsilon_2 - e_2^2 \sin^2 \upsilon_2],$$

$$k^2 \approx n^2[1 - 2e_2 \cos \upsilon_2 + e_2^2(3\cos^2 \upsilon_2 - 2)]. \tag{18}$$

Оба полных эллиптических интеграла, входящих в (8), целесообразно также представить в виде рядов по степеням e_2. Находим

$$K(k) \approx K(n) - n^2 \cos \upsilon_2 e_2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} n^4 \cos^2 \upsilon_2 e_2^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x dx}{(1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{2} n^2(3\cos^2 \upsilon_2 - 2)e_2^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}; \tag{19}$$

$$E(k) \approx E(n) + n^2 \cos \upsilon_2 e_2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} n^2(3\cos^2 \upsilon_2 - 2)e_2^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} n^4 \cos^2 \upsilon_2 e_2^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x dx}{(1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}}. \tag{20}$$

Вспомогательные интегралы, входящие в (19) и (20), равны

$$K(n) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}};\ E(n) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} dx;$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - n^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{E(n) - (1 - n^2)K(n)}{n^2(1 - n^2)};$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x dx}{(1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{(3n^4 - 5n^2 + 2)K(n) - 2(1 - 2n^2)E(n)}{3n^4(1 - n^2)^2};$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{(1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{K(n) - E(n)}{n^2};$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x dx}{(1 - n^2 \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(2 - n^2)E(n) - 2(1 - n^2)K(n)}{n^4(1 - n^2)}. \tag{21}$$

С учетом (21) выражения (19) и (20) примут теперь вид

$$K(k) = c_1 K(n) + c_2 E(n);$$

$$E(k) = c_3 K(n) + c_4 E(n), \tag{22}$$

где коэффициенты c_1, c_2, c_3, c_4 равны

$$c_1 = 1 + e_2 \cos \upsilon_2 + e_2^2\left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \upsilon_2\right) - e^2\,\frac{3n^2 - 2}{2(1 - n^2)} \cos^2 \upsilon_2;$$

$$c_2 = \frac{n^2 e_2^2 \cos^2 \upsilon_2}{(1 - n^2)^2} - \frac{e_2 \cos \upsilon_2 + e_2^2\left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \upsilon_2\right)}{1 - n^2};$$

$$c_3 = e_2 \cos \upsilon_2 + e_2^2\left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \upsilon_2\right);$$

$$c_4 = 1 - e_2 \cos \upsilon_2 - e_2^2\left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \upsilon_2\right) - e_2^2\,\frac{n^2 \cos^2 \upsilon_2}{2(1 - n^2)}. \tag{23}$$

Подставляя теперь эллиптические интегралы (22) в (8), после многих преобразований получим выражение потенциала кольца Гаусса в следующем виде:

$$\varphi(\upsilon_2) = \frac{2Gm_1}{\pi a_1}\Big\{K(n) + s_1 e_1 + s_2 e_2 + s_{11} e_1^2 + s_{22} e_2^2 + s_{12} e_1 e_2\Big\}. \tag{24}$$

Входящие в (24) коэффициенты будут равны

$$s_1 = \frac{\cos(\beta + \upsilon_2)}{n}\left[\frac{2 - n^2}{1 - n^2} E(n) - 2K(n)\right];$$

$$s_2 = \cos \upsilon_2\left[K(n) - \frac{E(n)}{1 - n^2}\right];$$

$$s_{11} = \frac{E(n)}{n^2}\left[1 + \frac{\sin^2(\beta + \upsilon_2)}{1 - n^2} - \frac{(6 - 11n^2 + 3n^4)\cos^2(\beta + \upsilon_2)}{2(1 - n^2)^2}\right] - \frac{K(n)}{2n^2}\left[(2 - n^2)\cos^2(\beta + \upsilon_2) + 4\sin^2(\beta + \upsilon_2) - \frac{(6 - 8n^2 + n^4)\cos^2(\beta + \upsilon_2)}{1 - n^2}\right];$$

$$s_{22} = \left[1 - \frac{\cos^2 \upsilon_2}{2(1 - n^2)}\right]K(n) + \frac{E(n)}{1 - n^2}\left[\frac{(1 + n^2)\cos^2 \upsilon_2}{2(1 - n^2)} - 1\right];$$

$$s_{12} = \frac{\cos \upsilon_2 \cos(\beta + \upsilon_2)}{n(1 - n^2)}\left[(3n^2 - 2)K(n) + \frac{2(1 - 2n^2)}{1 - n^2}E(n)\right], \quad (25)$$

а отношение n дано в (16). Следует отметить, что в отличие от потенциала эллиптического диска (см., например, [6]), коэффициенты s_1 и s_2 в выражении (24) не равны нулю.

Выражение (24) представляет решение задачи на первом этапе: необходимый для дальнейших расчетов потенциал $\varphi(\upsilon_2)$ первого кольца Гаусса с параметрами (m_1, a_1, e_1) в точках второго (повернутого на угол β) внутреннего кольца Гаусса с параметрами (m_2, a_2, e_2). Подчеркнем, что этот потенциал получен в квадратичном приближении по эксцентриситетам обоих колец.

Взаимная гравитационная энергия двух колец Гаусса

При заданном потенциале φ из (24) от первого кольца Гаусса вклад во взаимную гравитационную энергию W_{mut} двух колец от элемента массы второго кольца dm_2 будет равен $dW_{\text{mut}} = -\varphi dm_2$, где [4]

$$dm_2 = \frac{m_2}{2\pi}\,\frac{(1 - e_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e_2 \cos \upsilon_2)^2}\,d\upsilon_2. \quad (26)$$

Следовательно, полную взаимную гравитационную энергию двух колец представляет интеграл

$$W_{\text{mut}} = -\int \varphi dm_2. \quad (27)$$

Поскольку все расчеты проводятся в квадратичном приближении по эксцентриситетам колец, то в (27) вместо (26) следует подставить

$$dm_2 \approx \frac{m_2}{2\pi}\left[1 - 2e_2 \cos \upsilon_2 + \left(3\cos^2 \upsilon_2 - \frac{3}{2}\right)e_2^2\right]. \quad (28)$$

С учетом сказанного интегрирование (27) в квадратичном по эксцентриситетам приближении дает следующее выражение для взаимной гравитационной энергии двух колец Гаусса:

$$W_{\text{mut}} = -\frac{Gm_1m_2}{\pi a_1}\left[W_0 + W_1e_1 + W_2e_2 + W_{11}e_1^2 + W_{22}e_2^2 + W_{12}e_1e_2\right]. \quad (29)$$

Здесь

$$W_0 = 2K(n);$$

$$W_1 = W_2 = 0;$$

$$W_{11} = \frac{(1 + n^2)E(n) - (1 - n^2)K(n)}{2(1 - n^2)^2};$$

$$W_{22} = \frac{(1 + n^2)E(n) - (1 - n^2)K(n)}{2(1 - n^2)^2};$$

$$W_{12} = \frac{(1 - n^2)(2 - n^2)K(n) - 2(1 - n^2 + n^4)E(n)}{n(1 - n^2)^2}\cos\beta. \quad (30)$$

Заметим, что линейные члены в выражении (29) исчезают $W_1 = W_2 = 0$ в силу очевидных равенств

$$\int_0^{2\pi} \cos(\beta + \upsilon_2)d\upsilon_2 = \int_0^{2\pi} \cos \upsilon_2 d\upsilon_2 = 0. \quad (31)$$

В (29) выполняется также важное равенство коэффициентов $W_{11} = W_{22}$, что говорит об определенной симметрии в задаче о двух эллипсах. Кроме того, мы видим, что от угла наклона линий апсид колец β зависит только член W_{12}.

Для проверки выражения (29) заметим, что в частном случае, когда эллиптические кольца вырождаются в круглые (концентрические) кольца с радиусами $R_1 > R_2$, расположенные в одной плоскости, их взаимная потенциальная энергия будет равна

$$W_{\text{mut}} = -\frac{2Gm_1m_2}{\pi R_1}K\left(\frac{R_2}{R_1}\right). \quad (32)$$

Выражение (32) совпадает с полученным ранее другим способом в [7].

Выводы

В работе решена задача о взаимной потенциальной энергии двух эллиптических гравитирующих (или заряженных статическим электрическим зарядом) колец Гаусса. Эти кольца компланарны, но их линии апсид в общем случае имеют наклон друг к другу. Взаимная энергия колец была получена в квадратичном приближении по степеням эксцентриситетов обоих колец. На первом этапе решена задача, где потенциал одного из колец Гаусса представлен рядом по степеням эксцентриситета в точках другого эллиптического кольца. Это выражение потенциала кольца Гаусса представляет самостоятельный теоретический интерес. Затем было получено выражение взаимной энергии двух колец Гаусса. Доказан ряд важных свойств этого выражения: отсутствие линейных (по e_1 и e_2) членов, равенство коэффициентов второго порядка и то, что от угла наклона линий апсид зависит только один смешанный член. Последнее свойство позволяет очень просто решить сложную задачу о взаимном моменте сил между кольцами Гаусса. Результат проверен в частном случае двух компланарных круговых колец.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *Ortiz J.L., Santos-Sanz P., Sicardy B.* et al. // Nature. 2017. Vol. 550. N 7675. P. 219–223.
[2] *Braga-Ribas F., Sicardy B., Ortiz J.L.* et al. // Nature. 2014. Vol. 508. P. 72–75.
[3] *Kondratyev B.P.* // Astrophys. Space Sci. 2016. Vol. 361. N 12. P. 389.
[4] *Kondratyev B.P.* // Solar Syst. Res. 2012. Vol. 46. N 5. P. 352–362.
[5] *Антонов В.А., Никифоров И.И., Холшевников К.В.* Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПб.: СПбГУ, 2008. С. 207.
[6] *Кондратьев Б.П.* // ЖТФ. 2016. Т. 61. Вып. 7. С. 136–139. [*Kondratyev B.P.* // Tech. Phys. 2016. Vol. 61. N 7. P. 1097–10100.]
[7] *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. С. 512.