

03

Бифуркация Пуанкаре—Андрона—Хопфа в колебаниях прощелкивания составных несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов

© М.К. Тлеулинов

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева — КАИ, Казань, Россия
E-mail: mktleulinov@kai.ru

Поступило в Редакцию 25 декабря 2018 г.

В окончательной редакции 9 апреля 2019 г.

Принято к публикации 13 апреля 2019 г.

Рассмотрены колебания катастрофического изменения формы (колебания прощелкивания) составных несущих и управляющих поверхностей, соединенных между собой статически неопределимым образом. Исследовано влияние угла атаки на характер колебаний. Приведены фазовые портреты угла закручивания управляющей поверхности при разных углах атаки.

Ключевые слова: несущие и управляющие поверхности, автоколебания, бифуркации, катастрофы, бифуркация Пуанкаре—Андрона—Хопфа.

DOI: 10.21883/PJTF.2019.15.48088.17656

Явления, связанные с бифуркациями и автоколебаниями, происходят в системах различной природы [1–9]. Современные летательные аппараты в полной мере относятся к таким системам. В составных несущих и управляющих поверхностях летательных аппаратов с тремя и более шарнирами навески руля, т.е. при статически неопределимой схеме крепления, при отклонении рулевой поверхности возникают лобовые реакции, лежащие в плоскости руля. Эти реакции в значительной степени зависят от условия совместности перемещений несущей и управляющей поверхностей. Они могут оказывать больше нормальных и существенно изменить картину напряженно-деформированного состояния конструкции. Более того, они могут привести к возникновению нового явления — колебаний катастрофического изменения формы составной несущей поверхности (явление колебаний прощелкивания). Суть этого явления заключается в том, что при таких колебаниях конструкция скачком переходит из одного положения в другое, при этом существенно меняются прогибы и углы закручивания. Это явление было открыто Павловым [7]. Существование данного явления было подтверждено экспериментом в аэродинамической трубе [8]. Для его исследования необходимо построение геометрически нелинейной расчетной модели. В настоящей работе рассматривается только один аспект этого сложного явления — самопроизвольное затухание при увеличении угла атаки. Дело в том, что в экспериментах в аэродинамической трубе колебания прощелкивания иногда затухали. Причины этого не были известны. Численные исследования позволили установить одну из причин.

Процесс колебаний прощелкивания (катастрофического изменения формы) составной конструкции, состоящей из несущей поверхности и управляющей поверхности (руля), соединенных между собой в трех или

более точках, т.е. при статически неопределимой схеме крепления руля, выглядит следующим образом. При отклонении руля на угол θ^1 (рис. 1) появляется дополнительная подъемная сила Y_{cs} , вызванная отклонением, при этом в узлах навески возникают вертикальные и горизонтальные (лобовые) реакции. При отклонении по часовой стрелке данная сила направлена вверх. Под действием указанной силы конструкция начнет перемещаться вверх, при этом возникнет угол закручивания руля φ^1 , величина которого определяется крутящими моментами от внешней нагрузки и реакций в узлах навески. Угол закручивания руля φ^1 уменьшает эффективный угол отклонения $\delta_{eff} = \theta^1 - \varphi^1$. Это приводит к уменьшению Y_{cs} . При достижении определенного положения руль теряет устойчивость плоской формы изгиба в плоскости хорд и резко (скачком) переходит в новое положение, т.е. происходит жесткая бифуркация (катастрофа) — катастрофическое изменение формы составной конструкции (положение 1 на рис. 1). Угол закручивания руля становится равным углу отклонения: $\varphi^1 = \theta^1$, эффективный угол отклонения становится равным нулю ($\delta_{eff} = 0$), и дополнительная подъемная

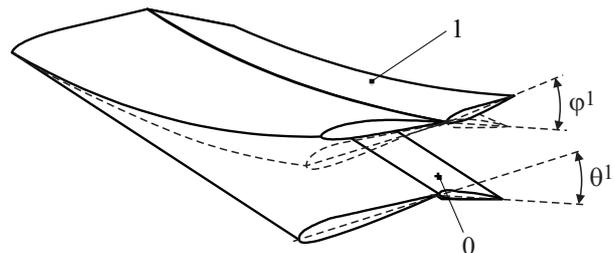


Рис. 1. Катастрофическое изменение формы составной конструкции: положение 0 — исходное, положение 1 — после катастрофического изменения формы.

Нормальная изгибная жесткость EI_x^0 , погонная масса m^0 и погонный массовый момент инерции j_z^{m0} НП

Параметр	z/l												
	0	0.083	0.167	0.25	0.33	0.417	0.5	0.583	0.67	0.75	0.83	0.917	1
$EI_x^0, N \cdot m^2$	7.63	6.02	4.42	2.81	2.187	1.563	0.94	0.793	0.647	0.5	0.44	0.38	0.32
$m^0, kg/m$	0.727	0.67	0.614	0.558	0.512	0.466	0.42	0.406	0.392	0.378	0.369	0.36	0.35
$j_z^{m0} \cdot 10^{-3}, kg \cdot m$	1.36	1.25	1.147	1.04	0.9556	0.871	0.787	0.761	0.735	0.709	0.692	0.675	0.658

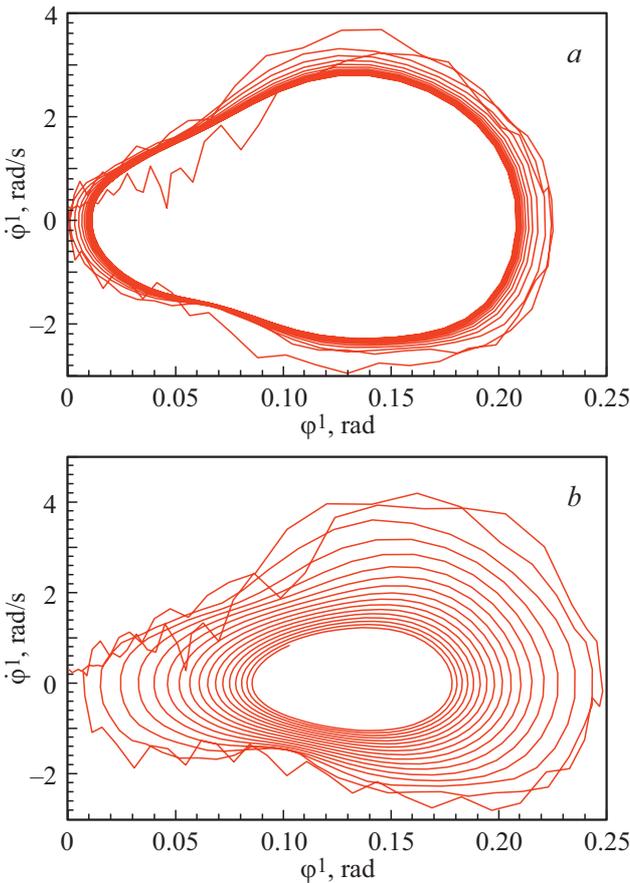


Рис. 2. Фазовые портреты $\dot{\varphi}^1(\varphi^1)$ при различных углах атаки α . $\alpha = 0.1$ (a) и 0.15 rad (b).

сила $Y_{cs} = 0$. После этого начинается движение вниз и в некоторый момент конструкция опять резко (скачком) переходит в положение, близкое к исходному (до катастрофы), несмежное с предыдущим: происходит обратная катастрофа. Таким образом, за одно колебание происходит две жесткие бифуркации (катастрофы).

На рис. 1 схематично изображена качественная картина явления катастрофического изменения формы составной конструкции: положение 0 — исходное, положение 1 — после катастрофического изменения формы.

При движении вниз руль раскручивается, происходит уменьшение φ^1 , эффективный угол отклонения δ_{eff} увеличивается и, следовательно, увеличивается сила Y_{cs} , направленная вверх. Таким образом, при движении вверх

сила Y_{cs} направлена по движению и является фактором возбуждающим, при движении вниз она направлена против движения и является фактором демпфирующим. Кроме того, на конструкцию действуют другие демпфирующие силы — аэродинамического, конструкционного демпфирования. Если работа возбуждающих сил не меньше работы демпфирующих сил, то происходит автоколебательный процесс. Если меньше, имеют место затухающие колебания.

Для изучения колебаний прощелкивания (катастрофического изменения формы) составной конструкции были проведены численные исследования на основе математической стержневой модели, приведенной в работе [9]. Для определения динамической реакции системы использовалась схема, предложенная в [10]. Для интегрирования уравнений движения по времени использовался метод прямого интегрирования по времени, изложенный в [11].

Скорости и ускорения в этом методе определяются выражениями

$$\dot{U}_{k+1} = \frac{12}{13} \Delta t \left(\frac{\beta_0}{3} + \beta_1 + \beta_2 \right) \ddot{U}_{k+1} + \Delta \dot{U}_{k+1},$$

$$\ddot{U}_{k+1} = a(U_{k+1} - \Delta U_{k+1}),$$

где

$$a = 13/[12\Delta t^2(\alpha_0/3 + \alpha_1 + \alpha_2)],$$

$$\Delta U_{k+1} = U_k + \dot{U}_k \Delta t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{11}{26} \alpha_0 - \frac{16}{13} \alpha_1 - \frac{42}{13} \alpha_2 \right) \ddot{U}_k \right.$$

$$\left. - \left(\frac{10}{13} \alpha_0 + \frac{4}{13} \alpha_1 - \frac{48}{13} \alpha_2 \right) \ddot{U}_{k-1} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{26} \alpha_0 + \frac{8}{13} \alpha_1 - \frac{18}{13} \alpha_2 \right) \ddot{U}_{k-2} \right],$$

$$\Delta \dot{U}_{k+1} = \dot{U}_k + \Delta t \left[\left(1 + \frac{11}{26} \beta_0 - \frac{16}{13} \beta_1 - \frac{42}{13} \beta_2 \right) \ddot{U}_k \right.$$

$$\left. - \left(\frac{10}{13} \beta_0 + \frac{4}{13} \beta_1 - \frac{48}{13} \beta_2 \right) \ddot{U}_{k-1} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{26} \beta_0 + \frac{8}{13} \beta_1 - \frac{18}{13} \beta_2 \right) \ddot{U}_{k-2} \right].$$

Точность и устойчивость приведенного метода зависят от значений коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ и $\beta_0, \beta_1, \beta_2$. Условие абсолютной устойчивости выполняется при различ-

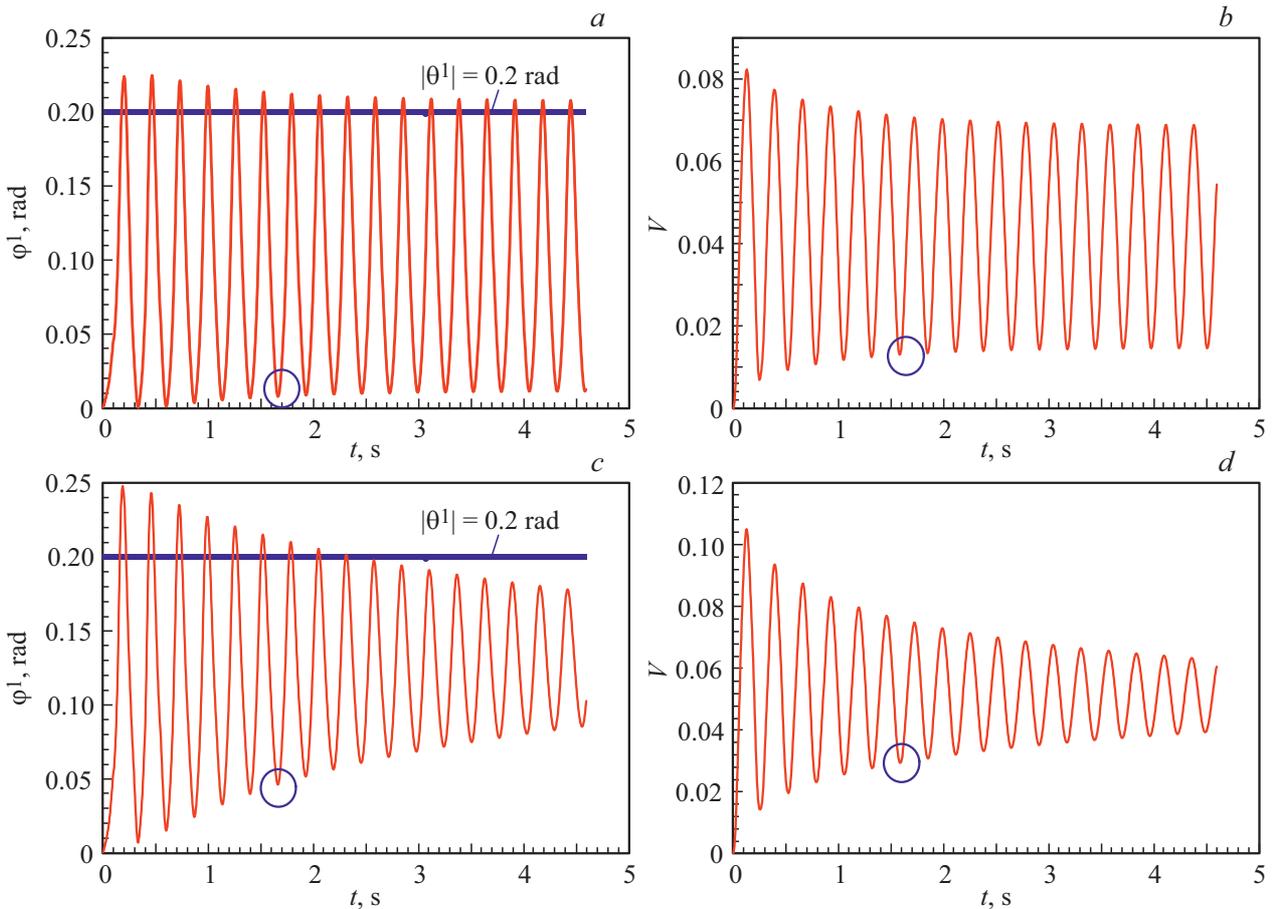


Рис. 3. Зависимости от времени угла закручивания руля $\varphi^1(t)$ (*a, c*) и относительных вертикальных прогибов несущей поверхности $V(t)$ (*b, d*) при различных углах атаки α . $\alpha = 0.1$ (*a, b*) и 0.15 rad (*c, d*).

ных сочетаниях этих значений, при этом меняются точность и демпфирующие свойства метода. В настоящей работе использовались следующие значения: $\alpha_0 = 0.167$, $\alpha_1 = 0.145$, $\alpha_2 = 0.115$, $\beta_0 = 0.5$, $\beta_1 = 0.38$, $\beta_2 = 0.225$.

Решения уравнения движения будут достаточно точными, а метод абсолютно устойчивым для линейных систем с консервативной нагрузкой. При решении нелинейных и неконсервативных динамических задач возникает дополнительная погрешность, обусловленная указанными факторами. При исследовании колебаний прощелкивания это приводит к расходящемуся нелинейному процессу. Поэтому для определения динамической реакции системы использовалась схема, предложенная в работе [10]. На каждом шаге по времени решение уточняется с помощью метода Ньютона или его модификаций для систем нелинейных алгебраических уравнений. Таким образом, в схему метода прямого интегрирования включается уточняющая процедура.

Алгоритм уточнения решения на произвольном $k + 1$ шаге по времени будет следующим:

1) по найденному решению уравнения движения \mathbf{U}_{k+1} определяются перемещения первого приближения $\mathbf{U}_{k+1}^{(1)} = \mathbf{U}_{k+1}$;

2) формируются матрицы $\mathbf{B}_{k+1}^{(1)}$, $\mathbf{W}_{k+1}^{(1)}$, $\mathbf{P}_{k+1}^{(1)}$, где $\mathbf{B}_{k+1} = (\mathbf{K}_{k+1} + ba\mathbf{C} + a\mathbf{M})$ — эквивалентная матрица жесткости, $\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{U}}_{k+1} + (ba\mathbf{C} + a\mathbf{M})\Delta\mathbf{U}_{k+1}$ — вектор эквивалентной нагрузки, $b = (12/13)\Delta t(\beta_0/3 + \beta_1 + \beta_2)$, \mathbf{K}_{k+1} — матрица жесткости, \mathbf{C} и \mathbf{M} — матрицы демпфирования и масс, $\mathbf{W}^{(i)}$ — матрица Якоби;

3) вычисляются $\mathbf{U}_{k+1}^{(2)}$.

Процесс повторяется до тех пор, пока невязка нелинейного решения не станет меньше заданной малой величины.

Были проведены исследования влияния угла атаки на характер колебаний. Исследовалась составная конструкция, характеристики которой приведены далее.

Нормальная (вертикальная) изгибная жесткость EI_x^0 , погонная масса m^0 и погонный массовый момент инерции J_z^{m0} несущей поверхности (НП) приведены в таблице ($l = 0.63$ m — размах (длина) конструкции, z — координата поперечного сечения по размаху). Лобовая (горизонтальная, в плоскости хорд) жесткость НП $EI_y^0 = 2300$ N · m², крутильная жесткость $GI^0 = 2 \cdot 10^4$ N · m².

Руль имеет постоянные по размаху характеристики: нормальную изгибную жесткость $EI_x^1 = 0.12$ N · m²,

лобовую изгибную жесткость $EI_y^1 = 47.95 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, крутильную жесткость $GI^1 = 0.12 \text{ N} \cdot \text{m}^2$, погонную массу $m^1 = 0.14 \text{ kg/m}$, погонный массовый момент инерции $j_z^{m1} = 10.57 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}$.

Центр жесткости и центр масс НП совпадают, центр масс руля совпадает с осью вращения, центр жесткости руля находится на расстоянии 0.01 m за центром масс.

На рис. 2 приведены фазовые портреты угла закручивания руля $\dot{\varphi}^1(\varphi^1)$ при углах атаки $\alpha = 0.1$ и 0.15 rad и угле отклонения руля $\theta^1 = -0.2 \text{ rad}$. Когда угол закручивания руля $\varphi^1(t)$ достигает уровня $|\theta^1| = 0.2 \text{ rad}$, т. е. становится равным по величине углу отклонения θ^1 , происходит прощелкивание. При $\alpha = 0.1 \text{ rad}$ фазовый портрет представляет собой предельный цикл (рис. 2, а), что соответствует автоколебаниям. При $\alpha = 0.15 \text{ rad}$ фазовый портрет — устойчивый фокус (рис. 2, б), что отвечает затухающим колебаниям. Таким образом, при увеличении угла атаки от 0.1 до 0.15 rad происходит фазовый переход — исчезновение предельного цикла, т. е. происходит бифуркация Пуанкаре–Андронов–Хопфа.

Это явление можно объяснить следующим образом. При увеличении угла атаки увеличивается подъемная сила несущей поверхности Y_0 , за счет этого растут вертикальные прогибы несущей поверхности и колебания происходят относительно нового положения равновесия. В этом положении руль закручивается на угол φ^1 и эффективный угол отклонения руля $\delta_{eff} = \theta^1 - \varphi^1$ уменьшается. Таким образом, чем больше α , тем больше Y_0 , меньше δ_{eff} и, следовательно, меньше сила Y_{cs} руля, а она является возбуждающим фактором колебаний прощелкивания. При этом аэродинамические демпфирующие силы остаются прежними. При некотором значении δ_{eff} работа возбуждающих сил становится меньше работы демпфирующих, и колебания затухают.

Это можно увидеть на графиках временных рядов — зависимости от времени относительных вертикальных прогибов (отношение прогибов к размаху консоли) несущей поверхности $V(t)$ и угла закручивания руля $\varphi^1(t)$ (рис. 3). Из зависимостей $V(t)$ видно, что колебания при $\alpha = 0.15 \text{ rad}$ происходят относительно более высокого уровня, чем при $\alpha = 0.1 \text{ rad}$. Первые примерно 1.5 s на обоих графиках происходит затухание колебаний от аэродинамического демпфирования. При этом минимальное значение $V(t)$ меняется при $\alpha = 0.1 \text{ rad}$ от 0 до ~ 0.014 , а при $\alpha = 0.15 \text{ rad}$ — до ~ 0.03 . Этим значениям соответствуют минимальные значения угла закручивания руля $\varphi^1(t)$: при $\alpha = 0.1 \text{ rad}$ $\varphi^1 \sim 0.008 \text{ rad}$, а при $\alpha = 0.15 \text{ rad}$ $\varphi^1 \sim 0.047 \text{ rad}$. Зоны рассматриваемых минимальных значений обведены кружками. Минимальным значениям $\varphi^1(t)$ соответствуют максимальные значения эффективного угла отклонения $\delta_{eff} = \theta^1 - \varphi^1 = 0.192 \text{ rad}$ при $\alpha = 0.1 \text{ rad}$ и $\delta_{eff} = 0.153 \text{ rad}$ при $\alpha = 0.15 \text{ rad}$. В начальный момент времени возбуждающая сила Y_{cs} соответствует углу θ^1 и одинакова в обоих случаях. При движении Y_{cs} отвечает углу δ_{eff} . При $\alpha = 0.1 \text{ rad}$ угол δ_{eff} почти равен θ^1 , и

возбуждающая сила Y_{cs} меняется мало. При $\alpha = 0.15 \text{ rad}$ δ_{eff} заметно меньше θ^1 , поэтому сила Y_{cs} в этом случае меньше начальной, соответствующей θ^1 , и ее работа становится меньше работы демпфирующих сил.

Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. При обтекании потоком составных несущих и управляющих поверхностей летательных аппаратов, у которых управляющая поверхность прикреплена к несущей статически неопределимым образом, при отклонении руля могут возникнуть колебания катастрофического изменения формы — колебания прощелкивания. На каждом цикле этих колебаний происходит две жесткие бифуркации — катастрофы.

2. Эти колебания являются автоколебательным процессом с фазовым портретом в виде предельного цикла.

3. Устойчивость этого предельного цикла зависит от угла атаки. При увеличении угла атаки выше определенного значения происходит фазовый переход — исчезновение предельного цикла, превращение его в устойчивый фокус. Происходит бифуркация Пуанкаре–Андронов–Хопфа. Автоколебания переходят в затухающие колебания.

Список литературы

- [1] *Rosenblum M., Pikovsky A.* // Phys. Rev. E. 2015. V. 92. P. 012919.
- [2] *Vitolo R., Broer H., Simó C.* // Regul. Chaotic Dyn. 2011. V. 16. P. 154–184.
- [3] *Kaplan D., Glass L.* Understanding nonlinear dynamics. N.Y.: Springer, 1995. 437 p.
- [4] *Станкевич Н.В., Кузнецов А.П., Селезнев Е.П.* // ЖТФ. 2017. Т. 87. В. 6. С. 952–955.
- [5] *Егоров Ф.А.* // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 8. С. 103–110.
- [6] *Кривокрылов М.С., Голуб В.В., Моралев И.А.* // Письма в ЖТФ. 2013. Т. 39. В. 18. С. 38–44.
- [7] *Павлов В.А.* // Изв. вузов. Авиационная техника. 1975. № 2. С. 99–105.
- [8] *Павлов В.А., Хакимуллин Ф.Ш., Гурьянов А.Я., Герштейн М.И.* // Изв. вузов. Авиационная техника. 1980. № 4. С. 81–84.
- [9] *Павлов В.А., Тлеулинов М.К.* // Изв. вузов. Авиационная техника. 2005. № 3. С. 13–15.
- [10] *Тлеулинов М.К.* // Вестн. КГТУ им. А.Н.Туполева. 2010. № 1. С. 5–8.
- [11] *Тлеулинов М.К.* // Изв. вузов. Авиационная техника. 2009. № 2. С. 20–23.